

DER  
LEHRER  
RUNDBRIEF



7. JAHRGANG

NOVEMBER 1952

HEFT 11

HIRSCHGRABENVERLAG · FRANKFURT/MAIN

## AUS DEM INHALT

Der elementare mathematische Unterricht . . . . .	482
Von der Anpassung des mathematischen Unterrichtsstoffes an die geistige Auffassungsfähigkeit des Schülers . . . . .	484
Intuitive Geometrie . . . . .	490
Die Verwendung von Zahlbildern . . . . .	497
Einige Bemerkungen zur Methode des ersten Rechenunterrichts im Licht des phylogenetischen Parallelismus . . . . .	503
<hr/>	
Gedanken zur Methodik des physikalischen Unterrichts II. . . . .	508
Aus dem Ausland . . . . .	512
Besinnung und Ausschau . . . . .	514
Die Bücherschau . . . . .	518
Berichte . . . . .	521
Die Schulfunkecke . . . . .	525

## DIE MITARBEITER DIESES BRIEFES

Walter Bezenberger, Messel bei Darmstadt, Schule  
Edmond Breuer, Genf, 24, rue St. Léger, Schweiz  
Prof. Emma Castelnovo, Rom, via boncompagni 16, Italien  
Prof. Dr. Friedrich Drenckhahn, Flensburg, Mürwikerstraße 192  
Prof. Dr. Ewald Fettweis, Aachen, Beekstraße 26  
Dr. Hardi Fischer, Genf, 8, rue du Contrat Social, Schweiz  
Werner Röpnack, Timmendorfer Strand, Gastro-Siedlung 10  
Dr. Minnie Stahl, Jugenheim/Bergstraße, Hauptstraße 2  
Dr. Karl Waigand, Magistrats-Oberschulrat i. R., Frankfurt/Main-West,  
Georg-Speyer-Straße 37  
Josef Weyrich, Regierungsrat, Salzburg, Kaigasse 14, Österreich

---

Herausgeber und Schriftleiter: Willi Himmerich, Eschhofen a. d. Lahn  
und Bruno W. Karlsson, Frankfurt/Main, Eckenheimer Landstraße 170.  
Monatlich ein Heft. Bezugspreis: Vierteljährlich DM 3,50, Einzelheft DM 1,20  
Zu beziehen durch den Buchhandel oder durch die Post  
Abbestellung bis spätestens 8 Tage vor dem Quartalsersten  
Druck: Phil. L. Fink KG., Groß-Gerau  
Hirschgraben-Verlag, Frankfurt am Main, Grüneburgweg 118  
Nachdruck nur mit Quellenangabe gestattet.

Zum neuzeitlichen Raumlehreunterricht in der Volksschule — Gleichzeitig eine Anregung für den geometrischen Unterricht der Unter- und Mittelstufe der Höheren Schule. (Vortrag auf dem Internationalen Pädagogen-Kongreß in Mainz 1949 unter dem Titel: Raumlehre für den anschaulich denkenden und praktisch handelnden Menschen.) In *Schola* 6 (1951) S. 12—26 u. S. 101—116.

Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik. (Vortrag auf der Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Hamburg 1951.) In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 5 (1952/53), Heft 4.

Psychologisch-Didaktisches zum mathematischen Unterricht. Erscheint in einer der nächsten Nummern von „Die Realschule“.

Vorlesungen zur Einführung in die Methodik des Rechenunterrichts. In Vorbereitung. Arbeitsbuch für den Rechenunterricht an Volksschulen. Unter Mitarbeit von W. Wriedt und H. Wulff, Hamburg, Pinneberg und Frankfurt a. M., Otto Salle Verlag. Hefte 1—4 erschienen, die weiteren in Vorbereitung.

Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht an Realschulen, Mittelschulen und Aufbauzügen. Unter Mitarbeit von W. Dahnke und W. Schwark. Hamburg, Pinneberg und Frankfurt a. M., Otto Salle Verlag. Bd. 3 (für das 7. Schuljahr) erschienen, die weiteren in Vorbereitung.

## INTUITIVE GEOMETRIE<sup>1</sup>

Es ist einleuchtend, daß die Verschiedenheit der Lehrpläne und Methoden des mathematischen Unterrichts in einzelnen verschiedenen Ländern nicht nur der mathematischen Tradition des entsprechenden Landes entspringt, sondern auch der eigenartigen Intelligenz des Volkes, seinen intellektuellen Notwendigkeiten, seinen sozialen Bedürfnissen, schließlich dem Geist des Landes selbst. Diese Vorbetrachtungen können diesen kurzen Bericht erhellen, den ich der Klarheit wegen in drei Teile gliedere:

1. Die Stellung der Geometrie — und im besonderen der intuitiven Geometrie — im Unterricht der italienischen Höheren Schule (second degré).
2. Kritik am traditionellen Unterricht der intuitiven Geometrie und Skizzierung einer aktiven Methode, veranlaßt durch die „Elements de Géométrie“ von A.-C. Clairaut.
3. Mehr ins Einzelne gehende Betrachtungen über diese Methode.

### I. Der Unterricht der Geometrie in Italien

Die italienische höhere Schule (scuola media inferiore und liceo classico oder scuola media und liceo scientifico) besteht aus 8 Klassen für Schüler von 11 bis 18 Jahren. Vom Standpunkt des geometrischen Unterrichts aus können wir sie in zwei Abschnitte teilen; einen ersten Kurs von 3 Jahren, in welchem man die intuitive Geometrie (ebene und dreidimensionale) studiert, und einen Abschnitt von 5 Jahren, der der rationalen (ebenen und dreidimensionalen) Geometrie vorbehalten ist.

Sagen wir zuerst ein Wort über diese letztere! Der Unterricht der Euklidischen Geometrie hat, wie man weiß, ein vor allem formales Ziel; er gewöhnt den Schüler

<sup>1</sup> Als Erstdruck in französischer Sprache erschienen in der Zeitschrift „Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré“, 1. Febr. 1950. Das ganze Heft ist Problemen des math. Unterrichts gewidmet. Interessenten mögen sich wenden an die Schriftleitung, 160, Rue Pierre Corneille, Lyon, Frankreich. Eine Veröffentlichung über das gleiche Thema erschien in der italienischen Zeitschrift „Periodico di matematiche“ Nr. 3/1946.

an die Zuordnung der Begriffe, an folgerichtiges Urteilen, an die Logik. Das ist sehr bedeutsam in Italien. Gestatten Sie mir, Ihre Aufmerksamkeit auf einen Mangel — oder, warum nicht? einen Vorzug — unseres Nationalcharakters zu lenken: Der größte Teil der Italiener verbringt Stunden damit, über alles und nichts zu reden, ohne dabei jemals zu einem Ergebnis zu gelangen; sie führen lange Unterredungen, deren Schlüsse die Voraussetzungen selber sind, von denen sie ausgingen: sie leben nicht um zu essen, sondern um zu reden.

Man sieht, welches bei uns die Bedeutung eines guten Kurses der Euklidischen Geometrie ist. — „Aber“, werden Sie sagen, „wenn diese logische Unterweisung so notwendig ist, warum nicht so früh wie möglich damit beginnen?“ — Überlegen wir: wir haben vor uns ein italienisches Kind, das manchmal sehr frühreif ist, das aber keineswegs mit einer rationalen Intelligenz begabt ist. Es hat einen intuitiven Geist, der gegen die Euklidische Beweisführung rebelliert bis zum Alter von 14 bis 15 Jahren hin. Und man kann die Natur nicht vorantreiben! Man könnte versuchen, das Kind sogleich in den Geist der Mathematik eindringen zu lassen, man könnte wollen, daß es sogleich verstehe, was mathematische Gesetzmäßigkeit ist. Man würde dann Gefahr laufen, in ihm einen Widerwillen gegen diese Wissenschaft zu erwecken oder auch — was meiner Ansicht nach noch schlimmer wäre — ihm eine völlig falsche Auffassung davon zu geben. Der Geist des Kindes kann sich nicht von einem Tag zum andern die euklidische Methode zu eigen machen: Es ist für ihn eine fortschreitende Erarbeitung, eine langsame Eroberung. Man muß die Notwendigkeit dieser Gesetzmäßigkeit spüren, um an ihr Geschmack zu bekommen. Legen wir nicht in die Hände der Kinder Werkzeuge, die sie noch nicht zu handhaben verstehen!

Diese Schwierigkeit, die dem Kinde begegnet, erklärt sich aus der Geschichte: Vergessen wir nicht, daß es vor den „Elementen“ von Euklid Jahrhunderte von Arbeiten und Untersuchungen gab; und diese Anstrengung der Menschheit zur Vollendung hin ist meiner Ansicht nach ausdrucksvoller, bezeichnender als die Vollendung selbst.

Um also nun der Intelligenzeigenart des italienischen Jungen Rechnung zu tragen, schalten wir vor den rationalen Kurs einen Kurs intuitiver (oder experimenteller oder praktischer) Geometrie.

Worin besteht dieser Unterricht? Er ist eine langsame Vorbereitung, eine Vorbereitung von drei Jahren auf den rationalen Kurs. Aber der Geist des Kurses ist davon verschieden: man gibt im allgemeinen — und vor allem zum Anfang — keine rationalen Beweisführungen, man begnügt sich damit, an die Erfahrung und Anschauung zu appellieren. Gleichzeitig, wenn wir einen Blick auf den Stoffverteilungsplan irgendeines Lehrbuches werfen, stellen wir fest, daß die Anordnung der Kapitel genau die des rationalen Kurses ist. Das erste Kapitel handelt vom Begriff des Punktes und der geraden Linie, von Definitionen der Strecke und des Winkels, von Operationen mit Strecken und Winkeln, von der Anwendung des Lineals, des Zirkels und des Winkelmessers. Man geht dann über zur Definition der parallelen und senkrechten Geraden, zum Dreieck und zum Vieleck, zum Gleichheitsfalle der Dreiecke, zur Winkelsumme eines Dreiecks, zur Untersuchung bestimmter Vielecke und des Kreises. Der Kurs der ebenen Geometrie, der mit einem Kapitel über Flächeninhalte abschließt, entwickelt sich während der beiden ersten Jahre des höheren Schulbesuches. Das dritte Jahr ist der Durchnahme der dreidimensionalen Geometrie vorbehalten, indem man auch hier mit den verschiedenen Lagen der Geraden und Flächen im Raume beginnt, um zu den Inhalten der einfachsten Körper zu gelangen.

Die eingehaltene Ordnung ist genau die des rationalen Kurses; der Lehrer kennt das Warum dieser Ordnung, der Schüler kennt es nicht, da es ja die Verkettung der Beweisführung ist, die diese Ordnung erklärt, und weil diese Verkettung in ihrer Gesamtheit ihm nicht auseinandergesetzt wird.

## II. Wie soll man die intuitive Geometrie lehren?

Was mir am wenigsten an diesem Aufbau gefällt, das ist die Tatsache, daß man vollständig den Gesichtspunkt des Kindes mißachtet. Man verwendet wohl Sorgfalt darauf, daß die Wandtafel betrachtet wird, aber man hält keine großen Stücke von den Augen des Schülers.

Ich meine im Gegenteil, daß jeder geschlossene Kurs seine Berechtigung hat, wenn man ihn an das psychologische Stadium anpaßt, das der Schüler gerade durchläuft.

Ich habe mich vor einigen Jahren gefragt, wie man diesem Kurs der intuitiven Geometrie einen Sinn geben und wie man das Interesse des Kindes wecken könnte. Die Antwort ist ganz einfach: man muß einer aktiven Methode folgen. Aber wenn auch die Antwort einfach ist, so ist ihre Befolgung doch nicht so einfach. Ist es im Einzelnen möglich, eine aktive Methode an die Unterweisung der intuitiven Geometrie anzupassen, indem man sich genau an die Anordnung der Kapitel des rationalen Kurses hält? Ich habe festgestellt, daß das unmöglich war, und zwar aus Gründen, die aus der Natur der Dinge herrühren.

Ein traditionelles Buch beginnt in der Regel mit Begriffsbestimmungen und allgemeinen Konzeptionen. Denn man kann nicht erwarten, daß ein — selbst gut geleiteter — Schüler von Anfang an damit fertig wird, eine Begriffsbestimmung zu geben. Vergessen wir nicht — ich erlaube mir, es noch einmal zu sagen — daß jede unserer Definitionen das Resultat einer jahrhundertelangen Arbeit ist; auch können sie nicht gleich durch ein Kind sprachlich gemeistert werden. Der Lehrer kann mit Hilfe von Beispielen versuchen, die Begriffsbestimmungen zu erklären, die er geben will; aber er wird doch Übungen auf Definitionen aufbauen müssen, welche der Schüler sich noch nicht zu eigen gemacht hat, zu deren Entdeckung er noch nicht hingeführt worden ist, von denen er sich noch nicht genau Rechnung gegeben hat. Und das ist absurd.

Nehmen wir als Beispiel dieser falschen Didaktik die Begriffsbestimmung des Winkels. Der Lehrer, der die Definition nach Euklid gibt: „Der Winkel ist die Neigung einer Geraden auf eine andere“ und der zur Erleichterung des Verständnisses zwischen den Winkel einen kleinen Kreisbogen zeichnet, der als Mittelpunkt den Scheitelpunkt des Winkels hat, muß sich mit Sicherheit darauf gefaßt machen, daß der Schüler ihm antwortet, zur Konstruktion eines größeren Winkels als des gegebenen sei es nötig, einen Kreisbogen zu ziehen, dessen Radius länger sei. Nun, derselbe Lehrer, dem es weder an Intelligenz, an didaktischer Begabung noch an Vertrauen fehlt, entschließt sich, im folgenden Jahre die Definition zu geben, die zum ersten Male in den Abhandlungen von Arnaud und Bertrand gegen 1660–70 erscheint: „Der Winkel ist der Teil der Fläche, welcher zwischen zwei Strahlen eingeschlossen ist, die den gleichen Ausgangspunkt haben“; aber auch in diesem Jahre wird sein Optimismus enttäuscht! Um einen größeren als den gegebenen Winkel zu konstruieren, will der Schüler die Seiten verlängern. — An wem liegt der Fehler, am Schüler oder am Lehrer? — Weder an dem einen noch am anderen augenscheinlich.

Etwas anderes: Der Lehrer kann in jedem Kapitel das Interesse des Schülers wecken, ihn an die Entdeckung geometrischer Eigentümlichkeiten heranzuführen. Aber

wenn ein Kapitel einmal abgeschlossen ist, erscheint das folgende dem Schüler keineswegs als die Folge des vorhergegangenen. Es gibt zweifellos ein logisches Fortschreiten, aber in diesem Kurse der intuitiven Geometrie erkennt es der Schüler nicht. Man wird also genötigt zu etwas, was man als eine „aktive Methode in Inseln“ bezeichnen könnte, wobei die Kapitel des Kurses die Inseln darstellen würden.

Ich habe mich gefragt, ob es nicht möglich sei, in der intuitiven Geometrie einer zusammenhängenden aktiven Methode zu folgen.

Ich wurde mir darüber klar, daß es die *G e s c h i c h t e* ist, welche die Lösung gibt. Augenscheinlich ist die historische Entwicklung der Geometrie eine aktive Arbeit im Verlaufe von Jahrhunderten. Es würde also genügen, derselben genauen Folge von Untersuchungen und Irrtümern zu folgen, wobei man nur die Übertreibung vermeiden müßte, die darin bestünde, alle Wege und Umwege der historischen Entwicklung nochmals zu beschreiten. Wir würden so die traditionelle beschreibende Methode durch eine aufbauende Methode (constructive) im wahren Sinne des Wortes ersetzen.

Ich bin in diesen Gedanken bestärkt worden durch die „Elements de Geometrie“ von Alexis-Claude Clairaut<sup>1</sup>. Dieses Buch ist wirklich ein Kleinod der pädagogischen Literatur der Mathematik. Geschrieben 1741, um der Marquise du Chatelet die Geometrie verständlich und interessant zu machen (sie wünschte einen „königlichen Weg, um die Mathematik zu verstehen), ist es vor allem eine Kritik an der Gewohnheit, in die Hände der Anfänger die Bücher von Euklid zu legen. Clairaut setzt sich in für einen Gelehrten wahrhaft bewunderungswürdiger Weise in den Geist des Kindes. „Ich habe mir vorgenommen“, sagt er in seinem Vorwort, „bis zu dem zurückzusteigen, was zur Geburt der Geometrie hätte führen können; und ich habe versucht, daraus die Prinzipien zu entwickeln nach einer Methode, die natürlich genug sein sollte, um als die der ersten Erfinder gelten zu können, wobei ich nur darauf achtete, all die falschen Verführungen zu vermeiden, die sie notwendigerweise auf sich nehmen mußten. Die Abmessung von Gelände erschien mir als das, was am ehesten hätte Veranlassung geben können zur Entstehung der ersten Aufgabenstellungen der Geometrie.“

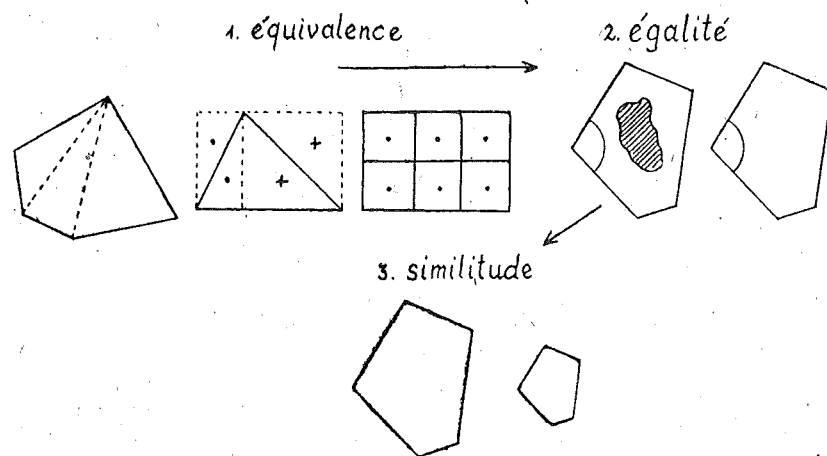
So beginnt sein Buch mit dem Kapitel über Äquivalenz (équivalence)<sup>2</sup>. Zu berechnen den Inhalt eines vieleckigen Feldes, indem man es in Dreiecke zerlegt. Aber das ist in der Praxis nicht immer möglich, es kann sich innerhalb des Feldes ein Hindernis befinden, ein See oder ein Bauwerk, das verhindert, direkte Maße zu nehmen. Es wäre also nötig, in der Nähe des Feldes, z. B. auf einer Ebene ohne Hindernis, ein Vieleck abzugrenzen, das dem in Frage stehenden Vieleck entspricht. So entsteht auf ganz natürliche Weise der Begriff der Deckungsgleichheit (égalité), und mit ihm drängt sich der des Winkels auf. Es ist aber in der Praxis nicht leicht, einen freien Platz zu finden, der dem in Frage stehenden Felde gleich ist. So entsteht spontan der Einfall, den *P l a n* des gegebenen Vielecks in einem bestimmten Maßstab zu konstruieren. Das Kapital der Ähnlichkeit (similitude) folgt so in einer ganz natürlichen Weise.

Man sieht, wie sich die hauptsächlichsten Beweisverfahren der ebenen Geometrie (Äquivalenz, Kongruenz, Ähnlichkeit — équivalence, égalité, similitude) auseinander ergeben, wenn sie nach einer historischen Weise behandelt wird. Man schreitet

<sup>1</sup> Eine neue Ausgabe erschien in der Reihe „Les maitres de la pensée scientifique“ bei Gauthier-Villars, Paris 1920.

<sup>2</sup> Gemeint ist das Messen ebener, vieleckiger Grundflächen im Sinne des Vergleichs mit einer Flächeneinheit. (Anm. d. Schriftl.)





vom Zusammengesetzten (Vieleck) zum Einfachen (Strecke, Winkel), vom Einzelfall zum Allgemeinen, von praktischen Problemen zu theoretischen, indem man versucht, sich Schritt für Schritt der rationalen Beweisführung anzunähern, und zwar derart, — wie Clairaut sagt —, daß „diese ersten Schritte nicht außerhalb der Fassungskraft der Anfänger sein können, da es ja Anfänger waren, die sie zuerst gemacht haben“.

### III. Skizze einer aktiven Methode der intuitiven Geometrie

In meinem Kurse folge ich der grundlegenden Idee der „Elemente“ von Clairaut, indem ich immer gewisse Partien auslasse, andererseits andere Entwicklungen anfüge mit dem Ziel, mein Modell an die moderne Schule anzupassen. Aber da es schwierig ist, in eine Lehrmethode einzudringen ohne sie selbst erprobt zu haben, wird es besser sein, wenn ich Ihnen die Folge der Kapitel und Beweismittel dieses aufbauenden Kurses der Geometrie vorführe. Ich erlaube mir sozusagen, Sie in meine Klasse eintreten zu lassen mit der Hoffnung, Ihrerseits Ratschläge und Anregungen zu empfangen.

Ich beginne den Kurs mit Lektionen über geometrisches Zeichnen mit dem Ziel, das Kind an die Genauigkeit der Konstruktion zu gewöhnen, das heißt an die Genauigkeit des Ausdrucks. Trotzdem — es empfiehlt sich, darauf zu bestehen — gebe ich keine Begriffsbestimmung. Der Schüler muß die Notwendigkeit der Definitionen spüren, er muß selbst die Definitionen formulieren, und das wird sich vollziehen, wenn er erst in dem Kurs weiter fortgeschritten ist. Die wichtigste Rolle dieser Lektionen geometrischen Zeichnens ist, die Aufmerksamkeit des Kindes auf die künstlerischen und dekorativen Werke zu lenken, denen es sehr häufig begegnet, ohne sie zu beachten. Eine aktive Methode kann nicht an dem täglichen Leben vorübergehen, ebensowenig wie an der Geschichte der Zivilisation; so darf auch die Wissenschaft, die wir lehren, nicht ihre ästhetische Anwendung außer acht lassen. Die eigentliche Kunst — ebensowohl als Betrachtung wie als reine Freude — muß in den geometrischen Unterricht Eingang finden.

Man geht dann über zum Problem der Äquivalenz, an das Aufsuchen von Regeln, um den Inhalt eines Vielecks zu bestimmen, das heißt zum bemerkenswertesten Problem der ebenen Geometrie. Nachdem man eine Maßeinheit für die Flächen gegeben hat, berechnet man zunächst den Flächeninhalt des Quadrats und des Rechtecks (indem man natürlich vergleichbare Dimensionen zwischen ihnen in

Betracht zieht). Dann schreitet man weiter, um eine Regel für die Inhaltsberechnung eines Dreiecks zu suchen (als Hälfte eines Rechtecks), eines Parallelogramms, eines Trapezes, eines regelmäßigen Vielecks, eines beliebigen Vielecks, das man in Dreiecke zerlegt. Tausende von Beispielen und Anwendungen zur praktischen Verwendbarkeit dieser Regeln des Messens bieten sich den Schülern, die in der Stadt wohnen, noch mehr denen auf dem Lande. Aber es ist auch zweckmäßig, daß das Kind sich mit kleineren Dingen befaßt, mit handlicheren, zum Beispiel mit Modellen aus Karton; das Auseinandernehmen und Wiederausammeln der Vielecke bietet ihm die Möglichkeit zur Analyse und Synthese, indem es sein Beobachtungsvermögen entwickelt.

Und diese Übung führt in völlig natürlicher Weise zur einfachsten Darstellung des Pythagoräischen Lehrsatzes. Die Wirkung dieses Lehrsatzes, wenn er im Verlaufe des ersten Jahres der Mittelstufe (école secondaire) entdeckt wird, ist psychologisch interessant. Es widerfährt dem Schüler bei der „Enthüllung“ des Pythagoräischen Lehrsatzes das, was jedem von uns begegnet vor einem wundervollen Gemälde oder auch vor einem erhebenden und außerordentlichen Naturschauspiel: Das ist zu schön! Und zuerst flößt diese seltsame Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks nur Bewunderung ein für das Genie, das sie entdeckt hat. Um sie von Grund auf zu würdigen, muß man sehr zahlreiche Anwendungen davon machen. Dabei schreitet der Schüler allmählich von praktischen Problemen (Längenbestimmung der Diagonalen seiner rechteckigen Tafel oder einer Schnur, die zwischen seinem Fenster und dem des gegenüberliegenden Hauses eine Etage tiefer gespannt wird usw.) zu Anwendungen und zu abstrakteren Erweiterungen des gleichen Lehrsatzes fort, z. B. zu der Eigentümlichkeit, daß das gleichseitige Dreieck, konstruiert auf der Hypotenuse, gleich der Summe der auf den Katheten konstruierten gleichseitigen Dreiecke ist. Dieser langsame und fortschreitende Übergang vom Konkreten zum Abstrakten, vom Besonderen zum Allgemeinen bewirkt, daß die Materie nach den natürlichen Gesetzen der psychologischen Entwicklung erobert und studiert wird. Und ich meine, daß der Lehrsatz des Pythagoras wegen seines doppelten — praktischen und abstrakten — Aspektes einzigartig dazu geeignet ist, den Geist des Schülers an die mathematische Beweisführung zu gewöhnen.

Aber nehmen wir unser Problem wieder vom Anfange an auf: Die Bestimmung von Geländeflächen, indem wir dem Wege folgen, den wir bei der Erläuterung Clairauts angezeigt haben. Es handele sich darum, ein vieleckiges Feld abzumessen; das ist leicht, aber es können sich darin Hindernisse befinden; übertragen wir auf eine ebene und freie Fläche ein gleiches Vieleck! Wir haben so das Problem der Deckungsgleichheit (égalité). Wie konstruiert man ein gleiches Vieleck zu einem gegebenen? Es ist dazu unumgänglich, auf den Begriff des Winkels zu kommen; dieser Begriff tritt als eine Notwendigkeit auf; man gibt dem Schüler nicht die Begriffsbestimmung, aber zahlreiche Messungen mit dem Winkelmesser, verschiedene praktische Anwendungen führen Schritt für Schritt den Schüler dahin, daß er selbst eine Definition geben kann. Die praktischen Probleme hinsichtlich der Flächeninhalte haben uns zum Pythagoräischen Lehrsatz geführt, ein Lehrsatz, der nicht evident ist, der das Gefühl einer Entdeckung vermittelt, für den man das Bedürfnis einer Beweisführung empfindet; in gleicher Weise führen uns die Winkelmessungen zu der Eigentümlichkeit der Winkelsumme eines Dreiecks, eine Eigenschaft, die ebensowenig evident ist auf den ersten Blick und die wie die vorhergehende das Gefühl einer Entdeckung vermittelt.

Und nun kann man hinkommen zur Konstruktion eines Dreiecks, das einem gegebenen Dreieck gleich ist, und das mittels der drei Gleichheitsfälle von Dreiecken, die sich hier als eine konstruktionsmäßige Notwendigkeit aufdrängen.

Aber zumeist ist es nicht leicht, einen freien und ebenen Platz zu finden, wo man ein Vieleck konstruieren könnte, das dem gegebenen Felde gleich ist. Was dann? Das Kind nimmt Zuflucht zu einem Gedanken, den die tägliche Beobachtung seiner Umgebung selbst ihm leicht eingibt. Alle Kinder wissen, daß es dort Gegenstände von gleicher Form, aber verschiedener Ausdehnung geben kann. Hat man diese würfelförmigen Schachteln vergessen, von denen die eine in die andere versenkt werden kann, oder auch diese Holzeier, von denen das eine die verkleinerte Form des anderen ist? Welches Kind hat heute nicht den Plan einer Wohnung gesehen oder die Vergrößerung einer Photographie oder auch zwei geographische Karten derselben Gegend mit zwei verschiedenen Maßstäben? Es ist also natürlich, daran zu denken, den Plan des gegebenen Feldes in einem bestimmten Maßstab zu konstruieren, das heißt, seine Zuflucht zu dem Begriff der Ähnlichkeit (similitude) zu nehmen, der — wie mir scheint — der spontanste, der anziehendste geometrische Begriff ist; er ist suggestiver, wenn nicht gar leichter als selbst der der Deckungsgleichheit. Es ist ein Begriff, der sehr früh beim Kinde auftritt, schon seit dem Alter — ich glaube nicht zu übertreiben — von zwei oder drei Jahren. Was ist denn ein Spielzeug in den meisten Fällen anders als ein wirkliches Objekt in Verkleinerung? Die hohe Verwunderung des Kindes, das sich darüber amüsiert, im Kleinen die es umgebende Welt wiedergegeben zu sehen (sein Haus, das Haus gegenüber, die Kirche seines Dorfes) ist nichts anderes als die intuitive Entdeckung des Begriffes der Ähnlichkeit. Es ist also nicht verfrüht, damit ein konkretes und experimentelles Studium während der ersten Jahre der Mittelstufe (*école moyenne*) zu betreiben.

Immer die gleiche Leitlinie verfolgend, stoße ich auf das Problem, den Inhalt eines Feldes zu bestimmen, das nicht die Form eines Vielecks hat, und konsequenterweise auf das Problem der Quadratur des Kreises, das mit dem der Abwicklung der Kreislinie in Verbindung steht. Ich suche den Schüler dahin zu führen, daß er über die Bedeutung nachdenkt, welche die schönste und einfachste Figur der ebenen Geometrie immer in der Kunst gehabt hat.

Ich folge derselben Geisteshaltung des Forschens beim Studium der Geometrie der Körper; auch da geht man vom Zusammengesetzten (die vielflächigen Körper) zu den Elementen (gerade Linien, Flächen usw.), welche die Körper zusammensetzen. Man beginnt mit der Konstruktion von Modellen der einfachsten Körper aus Karton, man sucht die Regeln für die Bestimmung der Oberflächen und Inhalte, man kommt endlich zur Analyse der Körper selbst.

Am Ende dieser drei ersten Jahre des höheren Schulunterrichts (*enseignement secondaire*), die der intuitiven Geometrie gewidmet sind, kommt es immer vor, daß einer meiner Schüler folgende Frage stellt: „Nun, da haben wir die Geometrie beendet? Was wird in den folgenden Jahren getan? Ich habe die Bücher betrachtet, die wir bekommen werden: ich habe dieselben Zeichnungen gesehen, die gleichen Probleme ... Ist das eine einfache Wiederholung?“

Dann nehme ich ein Beispiel zu Hilfe, das, weil es ganz außerhalb der Mathematik liegt, meiner Meinung nach besser den Weg verstehen läßt, der zurückgelegt wurde, und den, der noch zu gehen bleibt: das Beispiel der archäologischen Forschung.

Alle Kinder haben im allgemeinen erzählen hören, wie man durch Ausgrabungen Monumente, Vasen und Fresken alter Kulturen freilegt. Sobald die erste Schicht der fruchtbaren Erde abgetragen ist, kann man die höchsten Teile der Bauwerke sehen, die durch geologische Ursachen, durch Kriege oder andere Begebenheiten zermalmt oder aus der Form gebracht worden sind. Und überdies (das ist z. B. der Fall in Troja, Pompeji und Ostia) findet sich sehr häufig nicht eine einzige Kultur,

sondern mehrere nacheinander, die an der gleichen Stelle zu verschiedenen Epochen geblüht haben: das sind die verschiedenen, übereinander gelagerten Schichten, welche die verschiedenartigen Lebensalter des Organismus dieser Stadt enthüllen. Der Archäologe wendet zuerst die Methode an, die der des Erbauers entgegengesetzt ist: er gräbt von oben nach unten, von den höheren Schichten zu den tieferen, von den jüngeren Epochen zu den älteren; er macht sich an die Entdeckung.

Aber sein Werk bleibt dabei nicht stehen; nach den eigentlichen Ausgrabungen, nach der Begeisterung des Entdeckens, widmet er sich einer abstrakteren und tieferen Phase seiner Arbeit, der Rekonstruktion aus dem Geiste jeder Stadt — ausgehend von den Grundmauern, die er entdeckt hat, der Bestimmung jedes Kulturtypus, dem Studium seiner Beziehungen zu den anderen, der Systematisierung, der historischen Synthese. Der Gelehrte geht nun nicht mehr von den jüngeren Kulturen zu den älteren über, er geht nicht mehr entgegengesetzt zum Zeitablauf vor, er folgt ihm im Gegenteil in seiner Entwicklung, er rekonstruiert, er schreibt die Geschichte der Menschen in derselben Ordnung, wie sie sich abspielt hat.

Die Analogie zwischen den archäologischen Ausgrabungen und dem Studium der voreuklidischen Arbeiten ist einleuchtend; in diesen letzteren kostet das Kind in der Tat das, was es als schönstes in jeder Wissenschaft gibt: die Freude des Entdeckens. Die Parallele zwischen der historischen Rekonstruktion und dem Studium der Elemente von Euklid erscheint mir als ebenso klar; die Elemente gewöhnen das Kind an die Ordnung und an die Logik.

Schließlich halte ich es für sehr bedeutungsvoll vom erzieherischen Standpunkt aus, vom ersten Lehrjahre an die Gestalten der größten Wissenschaftler vorzustellen, nicht um dem Schüler beizubringen, daß sie an diesem oder jenem Ort geboren wurden, sondern um die jungen Geister etwas von der Anstrengung dieser Heroen für den Aufstieg der Menschheit ahnen zu lassen.

Emma Castelnuovo

Literatur: Prof. Emma Castelnuovo: „Geometria intuitiva“.

Casa Editrice La Nuova Italia, Piazza Indipendenza 29 — Firenze (Italia).

## DIE VERWENDUNG VON ZAHLBILDERN

Das Wort „Zahlbild“ gibt in den Kreisen von Methodikern mitunter den Anlaß, die Anwendung der Zahlbilder als eine starre, für sich abgekapselte Methode anzusprechen. Weiter wird die Frage aufgeworfen, welche Methode zeitgemäß ist, die *Zählmethode*, die *Zahlbildmethode* oder die *Systemmethode*.

Eine Antwort, nur nach logischen Überlegungen gegeben, entscheidet voreilig. Ihre Begründungen sind leicht als subjektiv zu erkennen und gerade das „Logische“ deckt Fehlschlüsse auf. So finden wir bei der Systemmethode für die erste Stufe bereits Dinge des praktischen Lebens als Stützen des anschaulichen Rechnens, die es nie sein können, weil dafür das Interesse beim Kinde nicht besteht; das Thermometer, Barometer, Hygrometer, die verschiedenen Maße sind für Schüler höherer Stufen und für uns Erwachsene bei einem systemmäßigen Denken brauchbar, aber nicht, um die Elemente des Rechnens dem Kinde zu veranschaulichen.

Nicht selten bleibt die Tatsache unbeobachtet, daß das Zahlbild über die Darstellung nach *B o r n* und selbst nach *K ü h n e l* eine Weiterentwicklung gefunden