La Sezione di questa Collana destinata alla didattica matematica è diretta dal prof. Luigi Campedelli e dalla prof. Emma Castelnuovo

IL MATERIALE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Scritti di

C. Gattegno - W. Servais - E. Castelnuovo
J. L. Nicolet - T. J. Fletcher - L. Motard
L. Campedelli - A. Biguenet
J. W. Peskett - P. Puig Adam

«LA NUOVA ITALIA» EDITRICE
FIRENZE

III

L'OGGETTO E L'AZIONE NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA INTUITIVA

di E. Castelnuovo

Introduzione

Il lettore non troverà in questo articolo nessun consiglio, nessuna regola per meglio insegnare o per meglio farsi capire, né gli verrà indicata una strada precisa per un primo corso di geometria nella scuola secondaria. Troverà solo qualche cosa che già conosce: le difficoltà che s'incontrano per introdurre questo o quel concetto, questa o quella operazione, gli errori piú frequenti che si verificano da parte degli allievi. Da questi dati — perché ormai sono diventati dei dati — sarà condotto a risalire a una critica del proprio metodo, a un esame dei propri difetti, a una visione serena e obbiettiva del proprio insegnamento.

Si parlerà di materiale, di modelli, di dispositivi: non si aspetti il lettore che si apra davanti a lui la cassetta delle meraviglie! Ci auguriamo soltanto che qualche idea che ci è venuta al contatto degli allievi possa maturarsi al contatto di altri allievi; possa quindi estendersi e dar adito ad altre esperienze, ad altre idee. Si accorgerà il lettore che il problema è appena accennato in questo articolo e proverà certamente l'impressione che in ogni argomento che viene toccato il campo di lavoro è vastissimo. Queste pagine non hanno altro scopo che di condurlo a concludere con noi che:

1) fra il metodo descrittivo e il metodo costruttivo che si può seguire per insegnare la geometria intuitiva, il costruttivo è quello che è formativo nel vero senso della parola;

2) se si vuole seguire un metodo costruttivo si è obbligati a ricorrere a delle basi concrete.

Parte Prima

Il corso di geometria intuitiva secondo il metodo descrittivo

Da anni si va delineando in ogni paese l'opportunità di far precedere l'insegnamento della geometria razionale da un corso preparatorio; a questo si dà spesso il nome di geometria intuitiva e viene indirizzato a degli allievi dagli 11 ai 13-14 anni. Tale corso, in generale, viene svolto secondo un *metodo descrittivo*, qualunque sia la linea di successione degli argomenti. Si tratta di una esposizione in cui vengono presentate delle figure statiche (disegni o modelli fissi) e in cui si premette a volta a volta l'enunciazione delle proprietà che si vogliono dimostrare.

Fisseremo l'attenzione su quattro argomenti di geometria piana e solida sviluppandoli secondo il metodo tradizionale; faremo per ciascuno di essi, subito e poi alla fine della prima parte, la critica di tale maniera di trattazione. Questa critica ci porterà a un ripensamento del significato del corso di geometria intuitiva e nella seconda parte vedremo appunto in qual modo si potrebbe dare una diversa impostazione agli stessi argomenti.

Esame della trattazione di alcuni argomenti di geometria

Ecco gli argomenti su cui vogliamo fissare l'attenzione:

1) i criteri d'uguaglianza dei triangoli;
2) la somma degli angoli di un triangolo;
3) la posizione di due rette nello spazio;
4) una definizione: i triangoli simili.

In generale la trattazione dei *criteri d'uguaglianza dei triangoli* è svolta nel modo seguente: dopo aver dato una qualunque definizione di triangoli uguali, si dice: « accade che l'uguaglianza di certi elementi corrispondenti porta l'uguaglianza di tutti gli altri, di modo che per vedere se due triangoli sono uguali non è necessario misurare tutti i 6 elementi, ma la misura di 3 è sufficiente ». Vengono allora enunciati i criteri d'uguaglianza.

L'insegnante dice, ad esempio: « disegnate due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali, e dimostrate, cioè verificate, che essi sono uguali ».

L'insegnante fa il disegno alla lavagna e ha ben cura di tracciare due triangoli visibilmente uguali. Il bambino misura, facendo uso degli strumenti, gli altri elementi dei triangoli e verifica che sono tutti uguali; ma il bambino non comprende — ed è evidente che non può comprendere — il senso di questa verifica, perché egli è certo — a priori — che quei due triangoli sono uguali dato che li " vede " uguali. Tutto ciò dipende dal fatto che queste proprietà, precedentemente enunciate, sono talmente evidenti agli occhi di un bambino che egli non solo non sente la necessità di una dimostrazione ma gli sembra inutile anche una verifica sperimentale.

I criteri d'uguaglianza, trattati in questo modo, ci sembra non abbiano altro scopo che quello di condurre l'allievo a un vuoto verbalismo.

In maniera un po' diversa è condotta la verifica della proprietà della *somma degli angoli di un triangolo*. Anche qui la proprietà viene enunciata; si domanda di verificarla. Si suggerisce di costruire un triangolo in cartoncino e di eseguire alcune piegature (fig. 1), in modo da riunire i tre vertici nello stesso punto. Si osserva allora che i lati dell' "angolo somma" cosí formato sono in linea retta.

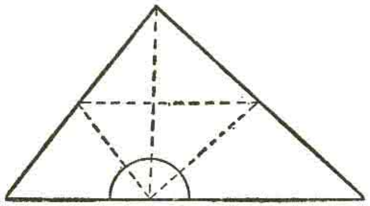

Fig. 1.

In questo caso ci si vale di un materiale (il cartone), ma il procedimento di manipolazione del materiale non è affatto spontaneo, tanto che si rende necessario il suggerimento del maestro. Una grandiosa scoperta si riduce alla verifica di una proprietà che sembra essere stabilita a priori da un essere sovrumano.

Una critica di altro genere può farsi al terzo argomento: *posizione di due rette nello spazio*. Si dice: « due rette nello spazio possono essere complanari o sghembe a seconda che esse appartengano o no allo stesso piano ». E si aggiunge: « per avere un'idea di queste posizioni pensate agli spigoli di una camera e troverete realizzati questi due casi ». A sostegno di tale trattazione si potrà dire anche qui che non si lavora solo sul disegno ma che si ricorre a un modello reale. È vero, ma tutti i ragazzi sono convinti che queste due posizioni sono altrettanto probabili; anzi il caso delle rette sghembe viene considerato come abbastanza strano.

La critica che vogliamo muovere alle definizioni che si danno in generale dei *triangoli simili* è di carattere piú sottile delle precedenti. Dei triangoli simili si dà una o l'altra delle definizioni:

1) due triangoli sono simili se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi in proporzione;

2) due triangoli sono simili se l'uno può considerarsi ottenuto dall'altro operando un'omotetia (e si fissa con una formula la legge di corrispondenza) e uno spostamento.

Ora, la prima definizione, che è analoga a quella che si dà per i triangoli uguali (due triangoli sono uguali se hanno lati ed angoli corrispondenti uguali), non è accompagnata da nessuna esperienza che metta in rilievo il carattere " visivo " della definizione (a differenza di quanto avviene per l'uguaglianza dove si fa vedere come due triangoli che si trovano in quelle tali condizioni sono sovrapponibili col movimento). Bisognerebbe provare come, valendosi anche qui del movimento, tali triangoli possono essere portati in posizione omotetica nel piano o meglio nello spazio. Si eviterebbe in tal modo che gli allievi cadessero nell'errore cosí frequente di scrivere delle proporzioni fra i lati senza guardare le figure.

La seconda definizione (che si potrebbe dire analoga a quella che definisce come uguali due triangoli sovrapponibili col movimento) pone una certa corrispondenza fra due figure (corrispondenza stabilita da una formula) e fa vedere come, operando in tal modo, un triangolo si trasformi in un altro — omotetico — che ha, e ciò risulta chiaro, la stessa forma del primo. Questa definizione è senz'altro di carattere piú generale della prima e presenta il vantaggio di appoggiare la formula a dati visivi, ma è "restrittiva" nel senso che gli allievi si fanno l'idea che l'unica corrispondenza che si può porre fra due figure sia l'omotetia; e, parallelamente, sono convinti che le uniche funzioni esistenti siano realizzate da grandezze direttamente proporzionali. Tale definizione appare perciò ricercata, imposta dall'alto, e quindi artificiosa.

Critiche al metodo descrittivo d'insegnamento

Abbiamo detto all'inizio che in generale il corso di geometria intuitiva ha un carattere descrittivo. Ma, pensando che l'aggettivo "descrittivo" non fosse abbastanza preciso per dare un'idea del corso, abbiamo voluto portare degli esempi di trattazione. A mio parere l'impostazione del corso è errata, è — oserei dire — addirittura poco onesta: si costruiscono delle figure in una data maniera enunciando delle proprietà che sembrano cadute dal cielo, come se i bambini, opportunamente guidati, non fossero in grado di scoprire quelle proprietà; si utilizza un materiale dicendo quale uso se ne deve fare, come se il bambino perdesse tempo a trastullarsi con un materiale; si considerano delle figure fisse come se nella vita il ragazzo non avesse mai occasione di vedere una cascata d'acqua o una ruota che gira o un raggio variabile proveniente da un proiettore oppure un film. Non si vuole che egli guardi perché si potrebbe confondere le idee; gli si vuole invece preparare delle figure ben determinate, semplici, e quindi artificiose, gli si vuole creare un terreno già fatto. Gli si dà cosí un'idea falsa delle basi della ricerca geometrica e della ricerca matematica in generale.

Parte Seconda

L'evoluzione del significato della parola "intuizione". — Il metodo costruttivo d'insegnamento

La geometria, quale la presentiamo nei corsi tradizionali, appare come qualcosa di assoluto, un complesso di verità indipendenti dall'attività umana. Questa concezione, ancora platonica, è certamente in opposizione

con il significato attuale del termine "intuizione". Mentre fino a Kant tale termine designava la capacità di contemplare la verità nel senso platonico, in seguito il significato si evolve e, da statico, diventa dinamico. Già in Rousseau l'intuizione nasce dal lavoro, nel senso di un'operazione, ma in Rousseau il termine "intuizione" non è ancora abbastanza chiaro. In Pestalozzi, invece, questo concetto risente della geniale rivoluzione kantiana: la parola "intuizione" acquista il significato di costruzione.

Abbiamo visto quale impostazione abbia il corso di geometria intuitiva se ci si attiene al significato originario del termine "intuizione" e quali siano le critiche da muovere a questo corso. Vedremo adesso quale senso possa assumere il nostro corso se ci si attiene al significato dell'intuizione dato da Pestalozzi.

Trattazione, da un punto di vista costruttivo, degli argomenti svolti nella prima parte, n. 2.

I criteri d'uguaglianza dei triangoli, sono, evidentemente, imposti da necessità pratiche, necessità di dover costruire un triangolo uguale a uno dato o rispondente a certe condizioni, piuttosto che il dover confrontare due triangoli già disegnati. Dei vari elementi, lati ed angoli, sono i lati che attirano maggiormente l'attenzione degli allievi; cominciamo dunque a far lavorare sui lati. Diamo al bambino un certo numero di aste del meccano dicendogli di costruire un triangolo [1]. La manipolazione di questo materiale lo porterà a fare le seguenti osservazioni:

1) non si possono prendere a caso tre aste perché, alcune volte, il triangolo «non si chiude» (cioè: un lato

[1] A questo proposito, vedi il libro *Mathematics Today*. Introductory Course, Part I, di E. E. Biggs e H. E. Vidal (London, Ginn e Co., 1954).

di un triangolo deve essere minore della somma degli altri due);

2) una volta costruito il triangolo, esso non è articolabile, cioè, pur esercitando una pressione sui vertici o sui lati, il triangolo rimane fisso. Val quanto dire che tutti gli allievi vengono a costruire tanti triangoli se utilizzano le stesse aste.

Si scopre cosí uno dei criteri di uguaglianza dei triangoli.

La manipolazione di due aste articolate a un estremo o di una sola asta tale che a ciascuno dei suoi estremi sia fissata un'asta di lunghezza qualunque (in modo da indicare la direzione degli altri due lati), condurrà facilmente gli allievi alla scoperta degli altri criteri d'uguaglianza e delle diverse possibilità. Il bambino ha veramente l'impressione di scoprire qualcosa: spesso è incapace di prevedere se non manipola un materiale.

E infine, suggerite agli allievi di costruire un triangolo dando loro le ampiezze dei tre angoli. Vi diranno: « da quale base devo partire? » Voi direte, naturalmente, che possono partire da un'asta lunga a piacere. I bambini non hanno bisogno di terminare la costruzione perché riescono ad intuire quasi subito che tutti i triangoli che hanno gli angoli rispettivamente uguali non sono uguali, ma hanno qualche cosa di comune: la forma.

In tutte le considerazioni ora fatte il materiale ha condotto gli allievi a scoprire diverse possibilità.

Ma, sempre riguardo al problema dei criteri di uguaglianza dei triangoli, se non volete far utilizzare le aste di un meccano, create nella classe un ambiente in cui ci si trovi nella necessità di dover costruire un triangolo uguale a uno dato. Dite loro: devo calcolare l'area di un campo triangolare ma non posso eseguire alcune misure perché c'è uno stagno che attraversa uno dei lati (o due lati); occorre tracciare un triangolo uguale a quello in una spianata dove non esistono ostacoli.

Come si fa? Qui non esiste un materiale maneggiabile, ma si deve immaginare una determinata situazione pratica. Anche questo ricorso noi lo consideriamo come una base concreta.

Somma degli angoli di un triangolo. Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sí che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico della parola occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili. Questo si potrebbe, naturalmente, realizzare con un film (cartone animato), ma si può anche ottenere molto semplicemente con un dispositivo che ogni bambino può costruire da sé: prendete una tavoletta di legno (per esempio di forma rettangolare) e piantate due chiodi A e B come nella fig. 2. Fra i chiodi tendete un elastico; legate poi nel punto di mezzo di un ramo di quest'elastico un filo resistente e tirate in

Fig. 2. Dispositivo che conduce all'intuizione della proprietà della somma degli angoli di un triangolo.

direzione perpendicolare alla congiungente dei due chiodi. Otterrete un triangolo isoscele, anzi tanti triangoli isosceli [1]. Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. Essi saranno colpiti da due fatti : 1) solo la base rimane sempre la stessa ; 2) tutti questi triangoli sono isosceli. Vi diranno : cambia l'altezza relativa alla base, cambia l'area e anche il perimetro ; ma tutti scriveranno anche che cambia l'ampiezza degli angoli e che se si immagina di partire dal triangolo piú alto (il massimo che si può realizzare sulla tavoletta) e di allentare lo spago a poco a poco, l'angolo al vertice diventa piú grande e gli angoli alla base diventano a mano a mano piú piccoli. Tutti osserveranno che a un certo punto si ha un triangolo equilatero (e in questo caso guardano i lati) e qualcuno vi dirà che a un dato istante l'angolo al vertice diventa retto ($A\hat{C}B$). Ma non c'è allievo a cui sfuggirà il caso limite ; diranno : « alla fine gli angoli alla base diventano piccolissimi e quello al vertice molto ottuso e poi... il triangolo sparisce, diventa un segmento, la base. Allora gli angoli alla base non esistono piú, ma quello al vertice è diventato un angolo piatto ». Ricominciate la variazione in senso opposto e dite di osservare ancora gli angoli. Ecco : gli angoli alla base aumentano, quello al vertice diminuisce. Dite poi loro di pensare a una tavoletta molto piú alta di quella che avete in mano, talmente alta da non potersi nemmeno realizzare. Vi diranno che l'angolo al vertice diventa sempre piú acuto e che quelli alla base diventano quasi retti.

Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che — si è sempre portati, anche con

[1] Se richiamo l'attenzione degli allievi soltanto sul triangolo isoscele è perché nel caso generale l'attenzione del bambino sarebbe dispersa da una quantità di circostanze e non arriverebbe mai a fissarsi su questa o quella proprietà. È evidente che in seguito si passerà al caso generale.

una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante — quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante ; ma, quale è questo valore costante? I casi limiti conducono a intuire questo valore.

Chiediamoci quale è la funzione del materiale in questo caso. Abbiamo fatto variare una figura per gradi insensibili, esperienza irrealizzabile col solo disegno. Questa esperienza si può idealizzare, cioè si può estrapolare immaginando che il vertice si allontani all'infinito o che si avvicini sempre piú alla base. Ma, voglio insistere sul fatto che è proprio la variazione degli angoli che attira l'attenzione sugli angoli, cosa che non si può ottenere da una figura statica, e che sono proprio i casi limiti che, " smaterializzando " il materiale, lo fanno idealizzare e conducono all'intuizione della verità. È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore ! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.

L'osservazione di questo semplice dispositivo ha condotto i ragazzi a scoprire una delle proprietà fondamentali della geometria piana ; ma conduce anche alla considerazione di una classe infinita di triangoli isosceli, una classe che è formata da due sottoclassi (come hanno scritto alcuni bambini) : quella dei triangoli ottusangoli e quella dei triangoli acutangoli. A un certo istante — hanno scritto — c'è il triangolo rettangolo; si trova fra quelle due classi. Qualcuno ha scritto: « per questo triangolo vale il teorema di Pitagora; per gli altri no ».

Non credo che nello scrivere questa frase, come una osservazione del tutto naturale, quel bimbo abbia realizzato la grandiosità della sua scoperta. Tocca a noi far fermare l'attenzione su questa proprietà che viene ad occupare cosí il suo vero posto: un caso particolare e particolarmente interessante fra infiniti casi.

I due "fuochi" della geometria piana — la somma degli angoli di un triangolo e il teorema di Pitagora — vengono cosí ad essere legati da questo semplice dispositivo [1].

Posizione di rette nello spazio. Nelle considerazioni seguenti il materiale è veramente essenziale; il disegno non dice niente. E nemmeno l'osservazione di due rette materializzate (due spigoli di una camera, per esempio) basta a dare un'idea chiara della situazione, per il fatto che si fissa l'attenzione su un numero finito di rette. Invece, la situazione è espressiva se si considera un numero infinito di rette. L'esperienza si può realizzare cosí: come immagine della retta prendiamo un sottile ferro da calza e conficchiamolo in A su un supporto orizzontale nella posizione verticale Ar. Prendiamo poi un altro ferro e ficchiamolo nello stesso supporto in B, ma in modo tale che possa ruotare attorno a B. Dite agli allievi di osservare le posizioni di queste rette di centro B rispetto alla retta r e fate sí che essi idealizzino questa

[1] Per mettere in evidenza con un materiale il teorema di Pitagora bisognerebbe completare quel dispositivo, costruendo un quadrato fisso sulla base AB e dei quadrati variabili (realizzati con elastici) aventi per lati i lati del triangolo isoscele, tenendo presente che i vertici liberi di questi quadrati scorrono su tre rette AC, BC e la parallela ad AB per C (che forma dunque con ciascuna delle altre un angolo di 45°). Cfr. cap. X, p. 204.

esperienza pensando a dei ferri infinitamente lunghi. Qui i ragazzi hanno bisogno di toccare e di muovere la retta per B per rendersi conto che è difficile che questa retta incontri la r; incontrare la r significa che si deve appoggiare ad r. Si può appoggiare in infiniti punti ad r: sono dunque infinite le rette per B che incontrano la retta r. Queste rette si trovano sul piano Br; fra queste rette, giacenti su quel piano, ce ne sarà una che è parallela ad r. Ma i ragazzi vi diranno: « è vero che ci sono infinite rette per B che incontrano r, ma ce ne sono molte, molte di piú che non l'incontrano ». Il caso di due rette incidenti nello spazio sarà dunque un caso particolarissimo; in generale due rette nello spazio sono sghembe. Il bambino è colpito dai due ordini di infinità; perché non fargli prendere piena coscienza di questa nozione che gli è intuitivamente familiare?

Si tratta di definire due triangoli simili. Teniamo presente che a una definizione si arriva dopo un'osservazione e che non si è condotti ad osservare se prima non si sperimenta.

Disponiamo una qualunque sorgente luminosa puntiforme S a una certa distanza da uno schermo e; fra S ed e poniamo un triangolo in cartone, T, sostenuto da un sottile ferro contenuto nel piano del triangolo e conficcato in A su un supporto orizzontale in modo da poter assumere una qualunque posizione della stella di centro A. In particolare, si potrà far ruotare il ferro nel piano perpendicolare allo schermo; il triangolo sarà poi fissato al ferro in modo che in una delle sue posizioni possa risultare parallelo allo schermo.

Nella fig. 3 i triangoli T e T' sono simili (T essendo parallelo allo schermo), mentre i triangoli $\overline{T}$ e $\overline{T}'$ non lo sono.

Non si può immaginare come riesca suggestiva l'osservazione delle ombre T' del triangolo che si formano sullo schermo: queste ombre si spostano e variano in grandezza e forma al variare della posizione del ferro. Fra le infinite ombre ce ne è solamente una che presenta la stessa forma del triangolo dato: vi è, sullo schermo, un solo triangolo simile al triangolo dato.

Dopo, passeremo da questa esperienza qualitativa a un'esperienza quantitativa, facendo prendere delle misure. Si verificherà che, se T' appare della stessa forma

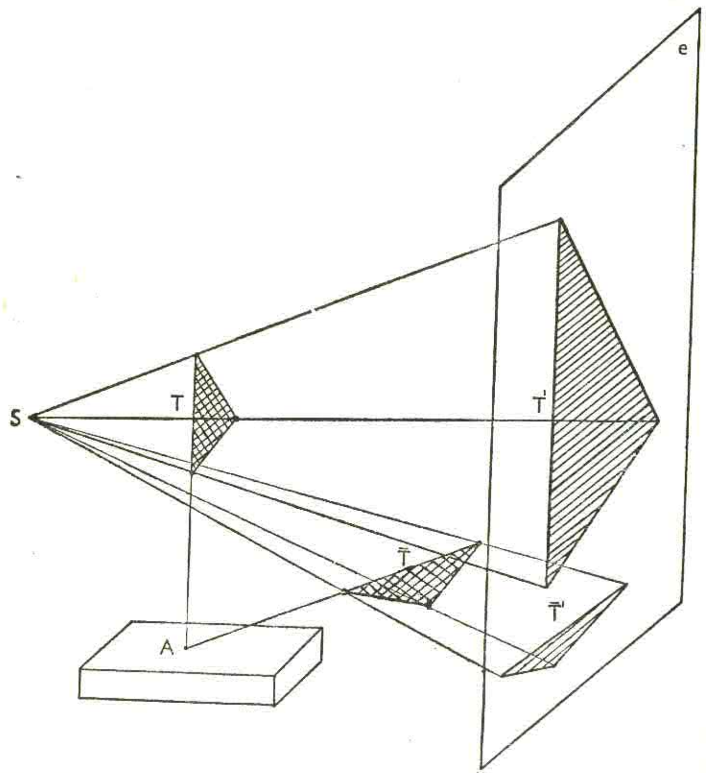

Fig. 3. La similitudine, come un caso particolare tra le corrispondenze prospettive è messa in evidenza dall'osservazione dell'ombra di un triangolo.

di T, ad ogni punto P di T corrisponde un punto P' di T' che si trova sulla retta SP e tale che $SP' = k\ SP$.

Numerosissime sono le scoperte matematiche e le indagini psicologiche cui si è condotti da questa semplice esperienza [1].

Noi vogliamo insistere solo sul fatto che la similitudine cosí introdotta viene ad occupare il posto che le compete: viene a presentarsi, cioè, come un caso particolare e particolarmente interessante fra le corrispondenze prospettive.

Un altro modo, veramente suggestivo, di presentare delle figure simili può aversi con una originale esperienza ideata dal belga Paul Libois. Si faccia uscire la luce di un proiettore da una sottile fenditura rettilinea in modo da ottenere un piano luminoso. Se un solido, la cui superficie sia realizzata con una fitta rete di fili (metallici o di altro materiale) viene tagliato da questo piano di luce, su di esso si disegnerà nettamente una sezione. Se, per fissare le idee, si tratta di una piramide retta a base rettangolare disposta in modo che il piano luminoso la tagli parallelamente alla base, ad un qualunque livello, si otterranno come sezioni tanti rettangoli simili.

Una quantità di problemi sorgono osservando la variazione in modo continuo delle sezioni di un solido, rese in tal modo veramente visibili; e le figure simili appaiono anche qui come casi particolari di altre configurazioni. Per esempio, sezionando un cubo con un piano perpendicolare a una diagonale e spostando il piano parallelamente a se stesso si ottiene una serie di triangoli equilateri, poi una serie di esagoni (per una posizione particolare si ha l'esagono regolare) e poi ancora dei triangoli equilateri. Per riconoscere il processo

[1] Vedi J. Piaget e B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, Presses Universitaires de France, 1948; e *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955.

di continuità nel passaggio dall'una all'altra sezione piana basta ricorrere al confronto fra due figure: quella segata sul piano dalle facce (in senso stretto) del cubo, e quella che sul piano stesso è tagliata dai piani a cui appartengono quelle facce ("esalatero semplice", secondo il linguaggio della geometria proiettiva).

Parte Terza

Necessità del ricorso a basi concrete se si vuole seguire un metodo costruttivo

Dall'esame degli argomenti ora trattati possiamo concludere che *il disegno è insufficiente per dare al corso di geometria intuitiva un carattere costruttivo*, e ciò per le seguenti ragioni:

1) il disegno non suggerisce dei problemi perché offre un numero finito di casi, e vincola cosí la libertà di pensiero del bambino;

2) non conduce all'osservazione, e quindi non può portare poi all'intuizione della verità, per il fatto che è statico;

3) non può inoltre, e ciò è evidente, fornire una immagine reale di una situazione spaziale.

Ma vi è un'altra ragione per cui il disegno è insufficiente; si tratta di questo: se io traccio una figura alla lavagna o se il bambino fa egli stesso il disegno, la sua attenzione si ferma sul tratto disegnato, cioè sul contorno della figura, non sull'interno. Per lui il triangolo è il contorno del triangolo, per lui l'angolo è l'insieme di quelle due semirette: l'interno della figura è vuoto, perché il bambino non ha l'educazione necessaria per un'interpretazione piú generale.

Vedremo in seguito, su un esempio particolare, come questa osservazione spieghi degli errori divenuti ormai

classici. Ma quest'osservazione conduce — mi permetto di allontanarmi un momento dal campo della stretta didattica — a dei raffronti sia con la storia dell'arte che con la psicologia della prima infanzia. È interessante osservare che i disegni dell'epoca paleolitica ritraggono l'interno della figura, mettendo in rilievo gli organi, mentre nell'epoca successiva — la neolitica — il disegno è astratto, schematico: con un tratto rappresentante il contorno si vuole indicare anche l'interno, si vuole dare l'idea dell'oggetto. È uno stadio piú avanzato del precedente: ci si allontana dal concreto, si va verso l'astrazione.

Ritroviamo questi due stadi se si confrontano i disegni dei bambini piccolissimi, di 3-4 anni (cioè fin che il disegno è spontaneo), con i disegni di un bambino di 7-8 anni (che lavora ormai per imitazione); per i piccoli il fiore sarà qualcosa di pieno, di concreto, per i piú grandi invece il fiore sarà disegnato schematicamente tracciandone solo il contorno, il fiore sarà stilizzato.

Evidentemente, nei riguardi della geometria, i bambini non sono ancora arrivati a una concezione astratta.

Per tutte queste ragioni il disegno è insufficiente ed è dunque necessario ricorrere a delle basi concrete. Ma, cosa intendere per base concreta? Non vogliamo certo dare un elenco di modelli o materiali o dispositivi atti a chiarire questa o quella nozione perché verrebbero in tal modo vincolate le attività del maestro e dell'allievo; e l'esempio o l'idea concreta possono venire in un determinato ambiente piuttosto che in un altro, possono sorgere per una occasione fortuita, possono adattarsi a questa e non a quella classe. Ma, dagli esempi che abbiamo portato e da quelli che porteremo, risulterà che si può lavorare con un materiale di due tipi: un materiale che deve essere manipolato dal ragazzo stesso (per esempio il meccano o i ferri coi quali abbiamo rappresentato le rette nello spazio) e un materiale che basta sia maneggiato solamente dal maestro (per esempio il dispositivo col quale si attirava l'attenzione sulla somma degli angoli di un triangolo, ovvero l'apparecchiatura per formare figure simili). Nel primo caso *il materiale ha per scopo di far manipolare e costruire* e di far sí che, attraverso all'effettiva costruzione, l'allievo arrivi alla scoperta di un certo numero di casi di possibilità; nel secondo, invece, *il materiale ha per scopo di attirare l'attenzione*, di far osservare, e, osservando, di condurre alla scoperta. Nel secondo caso dunque il materiale sostituisce la parola del maestro, ma — elemento fondamentale — non costringe entro dati limiti l'osservazione del ragazzo.

Ma, vogliamo sottolineare che in ogni caso il materiale deve essere mobile: è infatti la mobilità che attira l'attenzione del bambino e che lo conduce dal concreto all'astratto; perché, non è il materiale in sé che è l'oggetto della sua attenzione, ma piuttosto la trasformazione del materiale, un'operazione dunque che, essendo indipendente dal materiale stesso, è astratta. A nostro parere il materiale dà lo spunto — e si tratta di uno spunto provocato proprio da questo — per la formazione operatoria.

Sulla base di queste idee ci proponiamo di sviluppare nella parte quarta la nozione di superficie-area.

Parte Quarta

La nozione di superficie-area in un insegnamento a carattere costruttivo

La nozione di superficie-area [1], correntemente usata nella vita d'ogni giorno, presenta delle notevoli difficoltà

[1] Un rigido rispetto della tradizione del linguaggio formale porta a distinguere il significato delle parole " superficie " ed " area ". Si avverte però nell'uso moderno una tendenza a identificare i due vocaboli quando la cosa non determini equivoco Qui ci verrà fatto di attenerci talvolta a questa semplificazione.

a chi ci si avvicina per la prima volta e viene spesso male assimilata tanto che molto frequentemente non risulta chiara nemmeno agli adulti. Dice Galileo [1]: « veramente non credo che fra quelli che mancano in qualche cognizione di geometria se ne trovassero 4 per 100 che non restassero a prima giunta ingannati che quei corpi cha da superficie uguali sono contenuti non fossero ancora in tutto uguali; sí come nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie... ignorando che può essere un recinto uguale a un altro e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello ».

Questa tendenza naturale a confondere volume e superficie dei solidi ed area e perimetro delle figure piane si ritrova appunto — come vedremo — in tutto il corso del nostro insegnamento: lo studio delle cause di questi errori ci condurrà a qualche riflessione di carattere didattico.

La nozione di superficie-area

Le esperienze e le discussioni di cui parleremo in questo paragrafo sono state sviluppate in classe con dei bambini di 11-12 anni. Si tratta di ragazzi che conoscono già le regole per il calcolo delle aree dei poligoni piú semplici: è appunto sui poligoni piú semplici che fisseremo l'attenzione.

Si pone la domanda: « di un quadrato conosco l'area; come posso determinare la lunghezza del lato? »

Tutti i bambini rispondono: « bisogna dividere l'area per 4 », risposta che rivela una confusione fra area e perimetro.

[1] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leiden 1638.

Si chiede allora : « come si trova l'area del quadrato ? » Rispondono enunciando la regola con esattezza ; qualcuno dice : « il quadrato è un rettangolo particolare e l'area del rettangolo si trova moltiplicando la lunghezza della base per l'altezza ».

Si chiede : « perché l'area del rettangolo si trova cosí ? »

Gli allievi rimangono sorpresi dalla domanda ; perché " si sa " che l'area del rettangolo si trova in quel certo modo. Poi qualcuno dice : « sí, l'area del rettangolo si trova moltiplicando la base per l'altezza perché si può immaginare che la base si muova parallelamente a se stessa per tutta la lunghezza, " spazzando " cosí la superficie ».

Devo dire che le prime volte questa spiegazione mi pareva strana e mi sembrava che dovesse venire molto piú spontanea a un bambino la spiegazione che diamo di solito, dividendo il rettangolo in tanti quadratini unitari uguali. Poi mi sono persuasa che quest'ultima spiegazione è piú difficile per un bambino perché presuppone una convenzione : quella dell'unità di misura ; e una convenzione è sempre qualcosa di artificiale.

È certo che fa impressione ritrovare nei bambini le idee di Bonaventura Cavalieri ; anzi non si tratta proprio degli "indivisibili" di Cavalieri, ma piuttosto della concezione di Newton che nel *Tractatus de quadratura curvarum* cosí si esprime : « considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere, ma come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte non mediante addizione di parti, ma per moto continuo di punti ; le superficie per moto di linee ; i solidi per moto di superficie... Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli antichi indicarono la generazione del rettangolo

come descritto da un segmento mobile perpendicolare a un segmento fisso » [1].

Il bambino " sente " la nozione di area in senso dinamico ; " sente " l'area nel suo " divenire " per usare l'espressione di Jacques Hadamard [2] ; egli vuole costruirsela questa area, non vuole averla come somma di quantità note a priori.

Se si vuole rendere ancor piú viva quest'idea, si può suggerire ai bambini di pensare ai solchi fatti dall'aratro in un campo rettangolare. E questa esperienza, che consiste nella rappresentazione visiva di un lavoro manuale a cui si è assistito o di cui si è sentito parlare, presenta anche il vantaggio di condurre gli allievi in modo del tutto naturale a dar vita all'altra nozione di area : la statica.

Si dirà ai bambini : « immaginate ora che il campo rettangolare sia una prateria ; da questo campo possiamo ricavare una certa quantità di fieno ». Ma voi non avete bisogno di terminare la frase perché ci sarà qualche allievo pronto a dirvi : « per vedere se un campo ha una superficie piú grande o piú piccola di un altro si contano i mucchi di fieno ». Ecco il concetto statico di area : il numero dei mucchi di fieno dà l'area del rettangolo ; il mucchio è l'unità di misura, perché un mucchio è il rendimento di un quadrato di prateria, che si può scegliere come unità. In tal modo la convenzione dell'unità di superficie non viene imposta ma nasce spontaneamente.

In questi due esempi la base concreta consiste nel ripensamento di un'esperienza vissuta o di cui si è sentito parlare.

[1] I. Newton, *Introductio-Tractatus de quadratura curvarum*, 1704. La traduzione italiana che abbiamo riportato qui è di E. Carruccio e si trova nel volumetto di G. Castelnuovo, *Le origini e il calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna, Zanichelli, 1938 [nuova ed., Milano, Feltrinelli, 1962].

[2] J. Hadamard, *Newton and the Infinitesimal Calculus*, The Royal Society, 1946.

Vi sono dunque due tipi di esperienze che si possono sviluppare per chiarire la nozione di area: l'una deve condurre alla concezione statica, l'altra alla concezione dinamica.

Per esercitarsi sulla prima — la statica — trovo molto utile un materiale semplicissimo ideato dal matematico inglese C. Gattegno: il geopiano [1]. Si tratta di una tavoletta (di qualunque misura) dove a distanze fisse (per esempio di 5 cm) sono piantati dei chiodi a mo' di scacchiera (si può formare ad esempio un reticolato quadrato di 25 chiodi). Fra chiodo e chiodo si possono tendere degli elasticini di vario colore in modo da formare dei poligoni; le figure si fanno e si disfanno, si completano dando luogo a dei poligoni piú complessi, a dei poligoni concavi e stellati, a tutte quelle figure, insomma, che non si ha l'abitudine di considerare nei nostri corsi ma che sono molto piú generali di quelle che si disegnano.

Col geopiano il bambino si esercita alla costruzione di un poligono soddisfacente a determinate condizioni, al confronto di poligoni come somma o differenza, alla valutazione quasi " ad occhio " dell'area di una superficie poligonale. Ma il geopiano riguarda solo l'aspetto statico del concetto di area.

Per acquisire un concetto piú dinamico dell'area occorrerebbe " spazzare " la superficie del rettangolo, ma un tratteggiamento eseguito nell'interno della figura non dice nulla perché è statico. Si potrebbe facilmente realizzare un film (cartone animato) su questo argomento e ne verrebbero dei problemi ben piú complicati passando dalla considerazione del rettangolo a quella di altre figure.

[1] Per una spiegazione piú dettagliata del geopiano vedi il capitolo di C. Gattegno nel libro *L'enseignement des mathématiques* di Piaget, Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet, Gattegno, Neuchâtel et Paris, Delachaux et Niestlé, 1955. Trad. it. a cura di M. G. Campedelli, Firenze, La Nuova Italia, 1960. Cfr. anche il cap. XII del presente volume.

Mi sembra che sul concetto dinamico di area si possa attirare l'attenzione di una classe con un'esperienza che mette in relazione area e perimetro. Si tratta di un'esperienza molto semplice ma ricca di conseguenze: si tenda uno spago legato fra l'indice e il pollice di ciascuna mano a mo' di rettangolo avente per base la distanza fra le due mani e per altezza la distanza fra le dita della stessa mano. Si mostri alla classe questo rettangolo: si avvicinino poi le dita e quindi, conseguentemente, si allontanino le mani. Il rettangolo cambia di forma: l'altezza è diminuita e la base è aumentata. Si dice: «che cosa accade dell'area?» Tutti rispondono: «l'area è sempre la stessa perché il contorno è sempre lo stesso». Qualcuno aggiunge: «l'area è sempre la stessa perché quello che si è perso in altezza si è guadagnato in base». Continuate allora ad avvicinare o allontanare le dita: si ha una serie di rettangoli. «Se si continua ad avvicinare le dita — qualcuno vi dirà — il rettangolo diventa sempre piú basso e a un certo momento sparisce; in quell'istante l'area non esiste piú, l'area è zero». Molti sono d'accordo sul fatto che le aree di quei rettangoli rimangono sempre uguali fino all'ultimo caso, in cui si ha il " crollo finale ", secondo la loro espressione. Ma, la teoria del " crollo finale " non persuade tutti; qualcuno dice che se alla fine l'area è zero, ciò significa che l'area deve decrescere a poco a poco; nasce in lui l'idea di una funzione continua. Qualcuno, dalla mente piú positiva, disegna nel suo quaderno a quadretti due rettangoli con ugual perimetro; altri poi assegnano al perimetro un certo valore in cm e calcolano l'area in vari casi. Altri, infine, invertono il problema e, valendosi del geopiano, costruiscono due rettangoli aventi la stessa area; si accorgono allora che il perimetro non risulta uguale.

Alla fine la teoria del "crollo finale" è abbandonata da tutti, ma certamente a malincuore; il fatto che l'area cambi di volta in volta è per i bambini una cosa assai strana. Tutti lasciano intravedere, nelle loro relazioni scritte su « un'esperienza con uno spago », un disorientamento, come per essersi trovati di fronte a qualche cosa di non naturale.

Ecco come si esprime una bambina: « Io ho preso uno spago lungo cm 54 e ho formato con questo tanti rettangoli; ho calcolato l'area di tutti questi rettangoli e mi sono accorta che ogni volta viene un valore diverso. Ho trovato anche che se con lo spago formo un quadrato l'area risulta piú grande di quella di ogni rettangolo. A poco a poco posso ridurre il rettangolo alla sola base (lo spago doppio); in questo caso l'area diventa zero. Ma, allora, mi chiedo: l'area di tutti quei rettangoli, che ho visto un momento fa, dove se ne è andata? come ha fatto a sfuggire? per me è un mistero! »

Non c'è chi non avverta in queste righe, come del resto in quelle scritte da quasi tutti i compagni, che quella semplice esperienza su uno spago ha dato luogo a un problema che esce dallo stretto campo matematico e sconfina in quello metafisico: l'area non è un oggetto, un qualche cosa di immutabile, un ente; l'area va considerata nel suo divenire, cioè come una funzione e non come una cosa.

Un'esperienza dello stesso tipo può farsi utilizzando un metro articolato; un quadrato realizzato con quattro aste si deforma in modo da dar luogo a dei rombi; si propone di confrontare le aree di questi quadrilateri.

È interessante notare come queste esperienze eseguite su persone adulte, anche colte, portano agli stessi risultati che sui bambini; ci saranno forse 4 persone su 100, come dice Galileo, che vedono chiaramente il problema, cioè che non fanno confusione fra area e perimetro.

A mio parere, la confusione che nasce fra area e perimetro è dovuta soprattutto al fatto che l'attenzione di un bambino davanti a una figura si porta su quello che è disegnato — il contorno — e non sull'interno. Si ritorna dunque alle considerazioni fatte nella parte terza, n. 1. Ecco ancora un esempio tipico che mostra la vera insufficienza del disegno.

Qui il materiale è proprio essenziale. Riflettiamo sulla sua funzione nelle esperienze fatte: è vero che lo spago indica solamente il contorno della figura come un tratto disegnato, ma, a differenza del disegno, qui c'è il movimento, ed è appunto il cambiamento di superficie, la sua trasformazione, che attira lo sguardo e che conduce ad intuire il concetto di estensione.

Conclusione

È necessario ricorrere all'oggetto e all'azione se si vuole che l'insegnamento della geometria intuitiva abbia un carattere costruttivo e che sia quindi formativo: ecco la conclusione a cui vorremmo aver condotto il lettore.

Oggetto e azione che non devono seguire uno schema prestabilito, ma lasciarsi ispirare ogni volta dalle esigenze della classe che l'insegnante avrà la sensibilità di saper cogliere: è proprio da queste esigenze che sono sorti gli esempi che abbiamo dato.

I mezzi pratici per la realizzazione delle esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale o solamente immaginata, delle variazioni di una luce o del mutarsi di un'ombra.

Ed è proprio forse questa libertà di ideare e di interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo, che costituisce una delle caratteristiche del metodo costruttivo.