1958

LE MATÉRIEL POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

TIRAGE A PART

da "Le matériel pour l'enseignement des math." (tradotto in italiano da 'La Nuova Italia').

E. CASTELNUOVO

L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive

DELACHAUX ET NIESTLÉ

Chapitre III

L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive

par

EMMA CASTELNUOVO

Introduction

Que le lecteur ne cherche pas dans ce chapitre une suggestion ou une règle pour mieux enseigner ou mieux se faire comprendre, ni l'indication d'un schéma précis pour un premier cours de géométrie dans l'enseignement de second degré. Il trouvera tout simplement quelque chose qu'il connaît déjà : les difficultés que l'on rencontre lorsqu'on tente d'introduire telle ou telle notion, telle ou telle opération; les erreurs les plus fréquentes faites par les élèves. De ces données — car désormais il s'agit de données — il sera amené à critiquer sa méthode, à en examiner les défauts, et il tirera une vision plus objective de son propre enseignement.

On parlera de matériel, de modèles, de dispositifs : que le lecteur n'imagine pas que l'on ouvre devant lui la boîte aux merveilles ! Nous souhaitons seulement que les quelques idées qui nous sont venues en observant des élèves puissent mûrir au contact d'autres élèves, puissent donc s'élargir et donner occasion à d'autres expériences, à d'autres idées. Le lecteur se rendra compte que le problème est seulement ébauché dans ce chapitre et il aura certainement l'impression que, pour chaque question que l'on soulève, le champ du travail qui reste à faire est très étendu.

Ces quelques pages n'ont d'autre but que de l'amener à conclure avec nous que :

I. Entre la méthode descriptive et la méthode constructive que l'on peut suivre pour enseigner la géométrie intuitive, la constructive est celle qui est formatrice dans le vrai sens du mot;

II. Si l'on veut suivre une méthode constructive on est obligé d'avoir recours à des bases concrètes.

I

1. Le cours de géométrie intuitive selon la méthode descriptive

Depuis quelques années, dans chaque pays, on prend conscience, petit à petit, de l'opportunité de faire précéder l'enseignement de la géométrie rationnelle d'un cours préparatoire : à celui-ci on donne souvent le nom de géométrie intuitive et il est ordinairement destiné à des élèves de 11 à 13 ou 14 ans. Ce cours est en général développé selon une *méthode descriptive*, quelle que soit la ligne de succession des questions traitées. Il s'agit d'une exposition dans laquelle on présente des figures statiques (dessins ou modèles fixes) et où l'on énonce d'avance, chaque fois, les propriétés que l'on veut démontrer.

Nous fixerons ici notre attention sur quatre sujets de géométrie plane et de l'espace et nous développerons ces sujets selon la méthode traditionnelle, en faisant pour chacun d'eux, immédiatement et puis à la fin de la première partie, la critique de cette manière de le traiter. Cette critique nous conduira à un nouvel examen de la signification du cours de géométrie intuitive, et dans la seconde partie nous verrons de quelle façon l'on pourrait donner un sens tout à fait différent aux mêmes questions.

2. Examen de la façon de traiter quelques questions de géométrie

Voici les questions sur lesquelles nous voulons fixer notre attention :
1) les cas d'égalité des triangles;
2) la somme des angles d'un triangle;
3) la position de deux droites dans l'espace;
4) une définition : triangles semblables.

En général *les cas d'égalité des triangles* sont traités de la façon suivante : après avoir donné n'importe quelle définition des triangles égaux, on dit : « Il arrive que l'égalité de certains éléments correspondants entraîne l'égalité de tous les autres, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de mesurer les six éléments, mais la mesure de trois suffit. » On énonce alors les cas d'égalité.

Le maître dit, par exemple : « Dessinez deux triangles ayant deux côtés et l'angle compris respectivement égaux et démontrez, c'est-à-dire vérifiez, qu'ils sont égaux. »

Le maître fait le dessin au tableau et il a bien soin de dessiner deux triangles visiblement égaux. L'enfant prend les mesures (en faisant usage des instruments) des autres éléments des triangles et il vérifie qu'ils sont égaux deux à deux. Mais l'enfant ne comprend pas — et il est évident qu'il ne peut comprendre — le sens de cette vérification, car il est sûr — à priori — que ces deux triangles sont égaux, puisqu'il les « voit » égaux. Cela tient au fait que ces propriétés, précédemment énoncées, paraissent tellement évidentes aux yeux d'un enfant que non seulement il ne voit pas la nécessité d'une démonstration, mais il croit même inutile une vérification expérimentale.

Les cas d'égalité traités de cette façon nous paraissent conduire l'élève à un verbalisme sans contenu.

La vérification de la propriété de *la somme des angles d'un triangle* est conduite d'une façon un peu différente. Mais ici aussi, on énonce la propriété; on demande seulement de la vérifier. On suggère de construire un triangle en carton et d'exécuter quelques pliages (fig. 1) afin de réunir les trois sommets en un même point. On observe alors que les côtés de « l'angle total » ainsi formé sont en ligne droite.

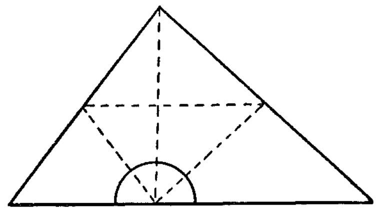

Fig. 1. La propriété de la somme des angles d'un triangle vérifiée par l'expérience classique.

Dans ce cas on se sert d'un matériel (le carton), mais le procédé de manipulation du matériel n'est pas du tout spontané, de sorte que les suggestions du maître sont nécessaires. Une formidable découverte se réduit à une vérification d'une propriété qui semble être établie par un être surhumain.

Une critique d'un tout autre genre peut être faite au sujet de la troisième question : *position de deux droites dans l'espace.* On dit : « Deux droites dans l'espace peuvent être coplanaires ou gauches suivant qu'elles sont ou ne sont pas dans un même plan. » Et l'on ajoute : « Pour avoir une idée de ces positions, songez aux arêtes d'une chambre et vous trouverez réalisés ces deux cas ». A l'appui de cette façon d'introduire la question on pourrait dire ici qu'on ne travaille pas seulement dans l'abstrait ni seulement sur le dessin, mais qu'on a recours à un modèle réel. C'est vrai : mais les enfants sont convaincus que ces deux positions sont également probables; même ils envisagent le cas de deux droites gauches comme une situation assez étrange.

La critique que nous voulons faire aux définitions que l'on donne en général des *triangles semblables* a un caractère plus subtil. Des triangles semblables, on donne l'une ou l'autre des définitions suivantes :

1) deux triangles sont semblables s'ils ont les angles correspondants égaux et les côtés homologues proportionnels;

2) deux triangles sont semblables si l'un peut s'obtenir à partir de l'autre par une homothétie (et l'on fixe la loi de correspondance par une formule) et un déplacement.

Or, la première définition qui est analogue à celle que l'on donne pour les triangles égaux (deux triangles sont égaux s'ils ont les côtés et les angles correspondants égaux) n'est suivie par aucune expérience qui traduise le caractère immédiatement visible de la définition (contrairement à ce qui arrive pour l'égalité où l'on montre que deux triangles qui se trouvent dans de telles conditions sont superposables par un déplacement). Il faudrait montrer comment, en profitant d'un déplacement, on pourrait amener ces triangles dans une position homothétique dans le plan ou mieux dans l'espace. On éviterait de cette façon que les élèves tombent dans l'erreur si fréquente d'écrire des proportions entre les côtés sans regarder les figures.

La seconde définition (qu'on pourrait dire analogue à celle qui définit comme égaux deux triangles superposables par un déplacement) pose une certaine correspondance entre deux figures (correspondance établie par une formule) et montre comment, en opérant de cette façon, un triangle se transforme dans un autre — homothétique — qui a, et la chose est bien évidente, la même forme que le premier. Cette définition a sans doute un caractère plus général que la première et offre l'avantage d'appuyer la formule sur des données visibles, mais elle est « restrictive » dans le sens que les élèves se font l'idée que l'unique correspondance qu'on peut établir entre deux figures soit l'homothétie; et, par analogie avec l'homothétie, ils sont convaincus que la seule fonction existante est réalisée par des grandeurs directement proportionnelles. Cette définition semble pourtant recherchée, imposée d'en haut, et donc artificielle.

3. Critiques de la méthode descriptive d'enseignement

Nous avons dit tout au début que le cours de géométrie intuitive a en général un caractère descriptif. Mais je pense que l'adjectif « descriptif » n'est pas assez précis pour donner une idée du cours. C'est

justement pour cette raison que nous avons dû prendre quelques exemples. A mon avis le cadre du cours n'est pas correct, il est — oserais-je dire — peu honnête : l'on construit des figures d'une façon déterminée, énonçant des propriétés qui semblent tombées du ciel, comme si les élèves, conduits convenablement, n'étaient pas à même de découvrir ces propriétés; on utilise un matériel en indiquant d'avance l'usage qu'on doit en faire, comme si l'enfant perdait son temps à s'attarder sur le matériel; on considère des figures fixes comme si dans la vie l'enfant n'avait jamais l'occasion de voir une chute d'eau ou une roue qui tourne ou bien un faisceau variable d'un projecteur ou enfin un film. On ne veut pas qu'il regarde car il pourrait se troubler; au contraire on lui présente des figures bien déterminées, simples et donc artificielles, on lui crée un terrain tout préparé. On lui donne ainsi une idée fausse des bases de la recherche géométrique et de la recherche mathématique en général.

II

1. L'évolution du sens du mot « intuition ». La méthode constructive d'enseignement

La géométrie, telle que nous la présentons dans les cours traditionnels, apparaît comme quelque chose d'absolu, un assemblage de vérités indépendantes de l'activité humaine. Cette conception, encore platonique, est certainement en opposition avec la signification actuelle du terme « intuition ». Tandis que jusqu'à Kant ce terme désignait la capacité de contempler la vérité dans le sens platonique, ensuite la signification a évolué et, de statique, elle est devenue dynamique. Déjà chez Rousseau l'intuition naît du travail, dans le sens d'une opération, mais chez Rousseau le terme « intuition » n'est pas encore très clair. Chez Pestalozzi, au contraire, cette conception se ressent de la géniale révolution kantienne : le mot « intuition » acquiert la signification de construction.

Nous avons vu quel cadre a le cours de géométrie intuitive si l'on a recours à la signification première du terme « intuition » et quelles sont les critiques que l'on peut faire à ce genre de cours. On verra maintenant le sens que notre cours peut prendre si l'on s'appuie sur la signification de l'intuition donnée par Pestalozzi.

2. Façon de traiter les sujets développés dans la partie I, 2, d'un point de vue constructif

Les cas d'égalité des triangles sont, évidemment, imposés par des nécessités pratiques, nécessités de construction d'un triangle égal à un triangle donné ou répondant à certaines conditions, plutôt que par des nécessités de comparaisons de triangles déjà dessinés.

Parmi les éléments d'un triangle, côtés et angles, ce sont les côtés qui frappent sans doute le plus l'attention des élèves. Donnez à l'enfant un certain nombre de barres du mécano et dites-lui de construire un triangle [1]. La manipulation de ce matériel le conduira à faire les observations suivantes :

1) on ne peut pas prendre au hasard trois barres, car, quelquefois, le triangle « ne se ferme pas » (c'est-à-dire : un côté d'un triangle doit être plus petit que la somme des deux autres);

2) une fois construit un triangle, on ne peut pas l'articuler, c'est-à-dire que le triangle reste fixe même si l'on exerce une pression sur les sommets ou sur les côtés. Cela signifie que tous les enfants finissent par construire des triangles égaux s'ils utilisent les mêmes barres.

On découvre ainsi un des cas d'égalité des triangles.

La manipulation de deux barres articulées à une extrémité, ou d'une seule barre à chaque extrémité de laquelle est fixée une barre d'une longueur quelconque (afin d'indiquer la direction des autres côtés) conduira aisément l'élève à la découverte des autres cas d'égalité et des différentes possibilités. L'enfant a vraiment l'impression de découvrir quelque chose : souvent il n'est pas capable de prévoir sans manipuler du matériel.

Suggérez enfin aux élèves de construire un triangle en leur donnant la grandeur des trois angles. Ils vous diront : « De quelle base dois-je partir ? » Vous répondrez, évidemment, qu'ils sont libres de partir d'une base quelconque. Les enfants n'ont pas besoin de terminer la construction pour se rendre compte que tous ces triangles ne sont pas égaux mais qu'ils ont quelque chose d'égal : « la forme ».

Dans toutes ces considérations le matériel a amené les élèves à découvrir diverses possibilités.

Mais, pour ce même problème, si vous ne voulez pas faire utiliser les barres d'un mécano, créez dans la classe un milieu où l'on se trouve

[1] A ce propos voir le livre : *Mathematics Today*. — Introductory Course, Part I, by E. E. Biggs and H. E. Vidal (Ginn and C., Londres 1954).

dans la nécessité de construire un triangle égal à un triangle donné. Dites aux enfants : « Je dois calculer l'aire d'un champ qui a la forme d'un triangle mais je ne peux pas prendre certaines mesures car un étang passe à travers un des deux côtés (ou deux côtés). Il faut alors construire un triangle égal à celui-là sur une esplanade où il n'y a pas d'obstacles. Comment faire ? Il n'y a pas ici de matériel maniable, mais l'on doit imaginer une expérience à faire. Nous considérons que même ce recours est une base concrète.

Somme des angles d'un triangle. On veut que les élèves fixent leur attention sur les angles d'un triangle, observent ces trois angles et que cette observation naisse spontanément. Or, les angles, comme les côtés, comme un élément quelconque d'une figure, ne sont pas observés tant que la figure est statique; l'observation naît dès qu'il y a une variation. La comparaison de deux triangles ou de quelques triangles pourra faire conclure que tel angle est plus grand que tel autre ou que quelques angles sont égaux, mais il s'agit d'une observation qui ne dit rien, qui ne conduit à rien. Afin que l'observation soit constructive dans le sens mathématique du mot, il faut envisager un nombre infini de cas, il faut pouvoir comparer chaque cas aux précédents et aux suivants : bref, il faut déplacer la figure par degrés insensibles. On peut réaliser tout cela par un film (dessin animé), mais, plus simplement, on peut l'obtenir à l'aide d'un dispositif que chaque enfant est à même de construire par lui-même : prenez une planchette en bois (par exemple de forme rectangulaire) et enfoncez deux clous dans la position A et B comme dans la figure 2. Tendez une bande élastique de l'un à l'autre, fixez une ficelle au milieu d'une branche de l'élastique et tirez dans la direction perpendiculaire à la droite $A\,B$. Vous aurez un triangle isocèle, et même un nombre quelconque de triangles isocèles [1]. Dites aux enfants d'observer tous

[1] Si je n'attire l'attention des élèves que sur le triangle isocèle, c'est que l'enfant dans le cas général serait dérangé par une quantité de circonstances et il n'arriverait jamais à fixer son observation sur telle ou telle propriété. C'est évident qu'on passera au cas général plus tard.

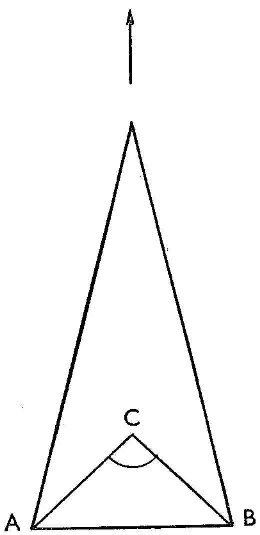

Fig. 2. Dispositif qui conduit à l'intuition de la propriété de la somme des angles d'un triangle.

ces triangles et d'écrire leurs observations. Ils seront frappés par deux faits : 1) seule la base reste toujours de même longueur; 2) tous ces triangles sont isocèles. Ils vous diront : la hauteur relative à la base change, l'aire change, de même que le périmètre; mais tous remarqueront aussi que la grandeur des angles change et que si l'on imagine de partir du plus grand triangle qu'on peut réaliser sur la planchette et de lâcher peu à peu la ficelle, l'angle au sommet devient de plus en plus grand et les angles à la base deviennent de plus en plus petits. Tous les élèves observeront aussi qu'à un moment donné on obtient un triangle équilatéral (et à ce moment ils se concentreront sur les côtés) et quelques-uns vous diront que, à un moment donné, l'angle au sommet devient droit (angle $A\widehat{C}B$). Mais il n'y aura personne auquel échappera le cas limite; on dira : « A la fin, les angles à la base deviennent très petits tandis que l'angle au sommet devient très obtus, et ensuite... le triangle disparaît, devient un segment, la base. Alors, les angles à la base n'existent plus mais celui au sommet est devenu un angle plat. » Recommencez la variation en sens inverse et dites aux élèves d'observer les angles encore une fois. Voilà : les angles à la base augmentent, l'angle au sommet diminue. Dites-leur encore de penser à une planchette beaucoup plus grande que celle que vous avez, si grande qu'on ne peut plus la réaliser. On vous dira que l'angle au sommet devient toujours plus aigu tandis que les angles à la base deviennent presque droits.

On vous dira que lorsqu'un angle diminue les autres augmentent et que — on est toujours conduit, même avec une certaine légèreté, à voir quelque chose de constant — ce que l'on perd dans un angle est compensé par ce que l'on gagne dans les autres. Cette intuition n'est-elle pas précisément celle de la propriété concernant la somme des angles d'un triangle ? La somme des angles est donc constante; mais, quelle est la valeur de cette constante ? Les cas limites permettent de prévoir cette valeur.

Demandons-nous quelle fonction a le matériel dans ce cas. Nous avons fait varier une figure par degrés insensibles, expérience qu'on ne peut pas réaliser par le dessin seul. On peut idéaliser cette expérience, c'est-à-dire qu'on peut extrapoler, en imaginant que le sommet s'éloigne à l'infini ou bien s'approche de plus en plus de la base. Mais je veux insister sur le fait que c'est justement la variation des angles qui attire l'attention sur les angles, ce qu'on ne peut pas obtenir d'une figure statique, et ce sont justement les cas limites qui, « dématérialisant » le matériel, le font idéaliser et conduisent à l'intuition de la découverte. Il est certain que cette expérience, comme d'ailleurs toutes

celles réalisées par des procédés continus, présente un danger, le danger du cas limite, c'est-à-dire celui de généraliser la propriété qu'on lit dans le cas limite. Sera-t-il toujours vrai que la somme des angles est un angle plat, étant donné que dans les cas limites elle vaut un angle plat ? Mais, pourquoi doit-on dire que cette intuition du cas limite est dangereuse ? Si elle conduit à une erreur (et il ne manque pas d'exemples même élémentaires où l'on met en évidence que la continuité conduit à une erreur), qu'elle soit la bienvenue ! Elle sera source d'observations, de problèmes nouveaux, de prises de conscience nouvelles.

L'observation de ce simple dispositif a conduit les enfants à découvrir une des propriétés fondamentales de la géométrie plane; mais elle conduit aussi à envisager une classe infinie de triangles isocèles, une classe qui est formée par deux sous-classes (comme certains élèves l'ont écrit) : celle des triangles obtusangles et celle des triangles acutangles. « A un moment donné — a-t-on écrit — apparaît le triangle rectangle; il se trouve entre ces deux classes. » Un élève a même écrit : « Pour ce triangle le théorème de Pythagore est valable, pour les autres pas. »

Je ne crois pas qu'en écrivant cette phrase, comme une observation tout à fait naturelle, cet enfant ait réalisé la valeur de sa découverte. C'est à nous de faire fixer l'attention sur cette propriété qui occupera, ainsi, sa véritable place : un cas particulier et particulièrement intéressant parmi un nombre infini de cas [1].

Les deux points focaux de la géométrie euclidienne plane — la somme des angles d'un triangle et le théorème de Pythagore — sont ainsi liés par ce simple dispositif [2].

Position de droites dans l'espace. Dans les considérations qui suivent, le matériel est vraiment essentiel : le dessin ne dit rien. Même l'observation de deux droites matérialisées (deux arêtes d'une chambre, par exemple) ne suffit pas à donner une idée claire de la situation car l'on fixe l'attention sur un nombre fini de droites. Au contraire, la situation correspond au réel si l'on envisage un nombre infini de droites. L'expé-

[1] Sur l'idée de C. Gattegno, J. L. Nicolet est en train de réaliser un dessin animé se rapportant à cette question.

[2] Pour représenter avec du matériel le théorème de Pythagore, il faudrait compléter ce dispositif par la construction d'un carré fixe sur la base AB et de deux carrés variables (réalisés par des élastiques) ayant comme côtés les côtés du triangle isocèle, en observant que les sommets libres de ces carrés glissent sur trois droites, AC, BC et la parallèle à AB par C (qui forme donc avec chacune des autres un angle de 45°). Cf. plus loin, p. 168, article de M. Peskett.

rience est réalisable aisément : une mince aiguille à tricoter, image d'une droite, sera enfoncée en A sur un support horizontal dans la position verticale Ar [1]. Une autre aiguille sera enfoncée en B sur le même support de façon qu'elle puisse pivoter autour de B. Dites aux enfants d'observer les positions de ces droites passant par B relativement à la droite r et faites qu'ils conçoivent cette expérience comme réalisée à l'aide d'aiguilles infiniment longues. Ici les enfants ont vraiment besoin de toucher et de déplacer la droite autour de B pour se rendre compte qu'il est difficile de faire en sorte que cette droite rencontre la droite r. En effet rencontrer r signifie s'appuyer sur r; or, elle peut s'appuyer sur r en tout point de r. Les droites issues de B qui rencontrent r sont donc en nombre infini. Ces droites se trouvent dans le plan Br; parmi ces droites il y en a une qui est parallèle à r. Mais les enfants vous diront : « Il est vrai que les droites passant par B qui rencontrent r sont en nombre infini, mais il y en a beaucoup plus qui ne rencontrent pas r. » Le cas de deux droites coplanaires dans l'espace sera donc un cas très particulier; en général deux droites dans l'espace sont gauches. L'enfant est frappé par les deux ordres d'infinité; pourquoi ne pas lui faire prendre conscience de cette notion qui est pour lui intuitivement familière ?

Il s'agit de définir deux triangles semblables. On ne peut arriver à une définition qu'après une observation et l'on ne peut observer que si l'on commence par une expérience.

Disposons une lampe punctiforme S à une certaine distance d'un écran e; entre S et e disposons un triangle de carton, T, soutenu par une aiguille contenue dans le plan du triangle, et enfoncée en A sur un support horizontal de façon à pouvoir prendre une position quelconque autour de A. En particulier, on pourra faire tourner l'aiguille dans le plan perpendiculaire à l'écran. Le triangle est fixé à l'aiguille de telle sorte que dans une de ses positions il puisse être parallèle à l'écran.

Dans la figure 3 les triangles T et T' sont semblables (T étant parallèle à l'écran), tandis que les triangles $\overline{T}$ et $\overline{T}'$ ne le sont pas.

On ne peut pas imaginer à quel point l'observation des ombres, T', du triangle sur l'écran est suggestive : ces ombres se déplacent et changent de grandeur et de forme selon la position de l'aiguille. Parmi toutes ces ombres il y en a une seule qui présente la même forme que le triangle donné : il y a sur l'écran un seul triangle semblable au triangle donné.

[1] Un appareil très utile pour réaliser des figures mobiles dans l'espace, et donc même cette simple expérience, est le « Stéréographe universel », construit par le mathématicien français B. Delugas.

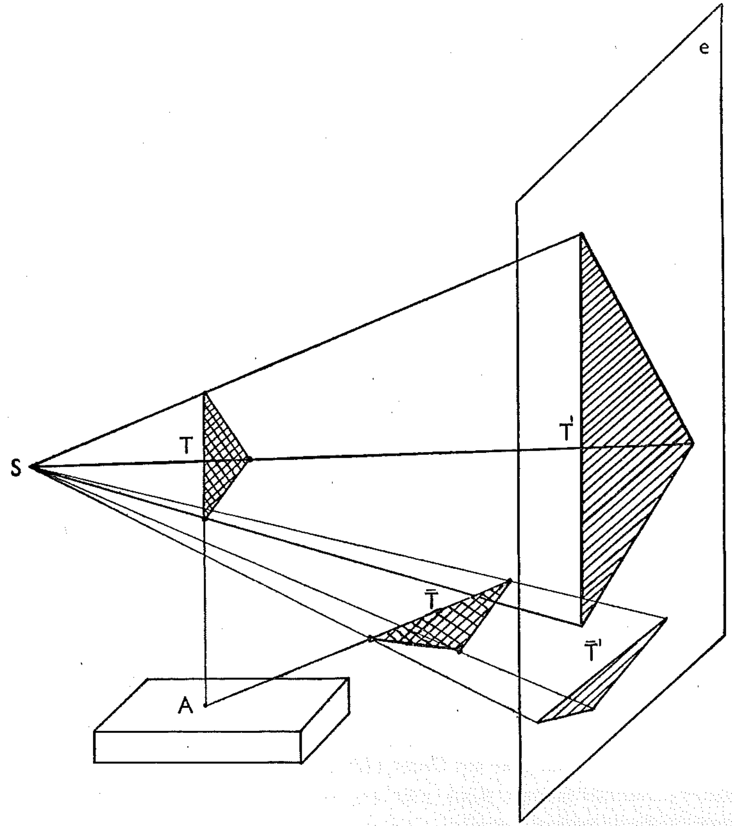

Fig. 3. La similitude comme un cas particulier parmi les correspondances perspectives, mise en évidence par l'observation de l'ombre d'un triangle.

Ensuite, nous passerons de cette expérience qualitative à une expérience quantitative en faisant prendre des mesures. On pourra vérifier que, si T' a la même forme que T, à chaque point P de T correspond un P' de T' qui se trouve sur la droite SP et tel que $SP' = k\ SP$.

Partant de cette simple expérience on est conduit à faire un très grand nombre de découvertes mathématiques et de remarques psychologiques [1].

[1] Voir J. Piaget et B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant* et *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, Presses universitaires de France.

Nous voulons insister seulement sur le fait que la similitude introduite de cette façon occupe la place qui lui revient : elle est présentée comme un cas particulier et particulièrement intéressant parmi les correspondances perspectives.

Une autre façon, fort suggestive, de présenter des figures semblables peut se réaliser par une expérience originale imaginée par le mathématicien belge Paul Libois. On fait sortir la lumière d'un projecteur par une mince fente rectiligne : on aura alors un plan lumineux. Si un solide, dont la surface est réalisée par un réseau touffu de fils (de métal ou autre matière), est coupé par ce plan lumineux, on verra clairement une section se dessiner sur cette surface. Si, pour fixer les idées, il s'agit d'une pyramide droite à base rectangulaire disposée de façon que le plan lumineux la coupe parallèlement à la base, à un niveau quelconque, les sections seront des rectangles semblables.

Un grand nombre de problèmes résultent de l'observation de la variation continue des sections d'un solide, maintenant rendues visibles; et les figures semblables apparaissent ici aussi comme des cas particuliers d'autres configurations. Par exemple, si l'on fait la section d'un cube par un plan perpendiculaire à une diagonale on obtient, en déplaçant le plan parallèlement à lui-même, une série de triangles équilatéraux, puis une série d'hexagones (pour une position particulière on a l'hexagone régulier) et puis une série de triangles équilatéraux. Pour reconnaître la continuité dans le passage de l'une à l'autre section plane, il faut se reporter à la comparaison entre deux figures : la figure découpée dans le plan par les faces (au sens étroit) du cube, et celle qui est coupée sur le même plan par les plans auxquels ces faces appartiennent (« hexalatère simple », selon le langage de la géométrie projective).

III

1. Nécessité du recours a des bases concrètes si l'on veut suivre une méthode constructive

De l'examen des questions que nous avons développées on peut conclure que *le dessin est insuffisant à donner un caractère constructif au cours de géométrie intuitive*, et cela pour les raisons suivantes :

1) le dessin ne suggère pas des problèmes parce qu'il offre un nombre fini de cas, et empêche, donc, la pensée de l'enfant d'être libre;

2) du fait qu'il est statique il ne conduit pas à l'observation, et par conséquent il ne peut pas conduire à l'intuition de la vérité;

3) il ne permet pas, et cela est évident, d'avoir une image réelle d'une situation de l'espace.

Mais le dessin se montre insuffisant pour une autre raison. Il s'agit de ceci : si je trace une figure au tableau ou si l'enfant fait le dessin lui-même, son attention se fixe sur le trait dessiné, c'est-à-dire sur le contour de la figure et non pas sur l'intérieur. Pour lui le triangle est le contour du triangle, pour lui l'angle est l'ensemble de ces deux demi-droites; l'intérieur de la figure est vide, car l'enfant n'a pas l'éducation nécessaire pour une interprétation plus générale.

Nous verrons ensuite, sur un exemple particulier, que cette observation explique des erreurs classiques. Mais cette observation nous conduit — je me permets de m'éloigner pendant quelques instants du champ de la didactique — à des comparaisons soit avec l'histoire de l'art soit avec la psychologie de la première enfance.

Il est intéressant d'observer que les dessins de la période paléolithique représentent l'intérieur de la figure en en mettant en relief les organes, tandis que dans la période suivante — la néolithique — le dessin est abstrait, schématique : par un trait représentant le contour on veut indiquer aussi l'intérieur, on veut donner l'idée de l'objet. Il s'agit d'un stade plus avancé que le précédent : on s'éloigne du concret, on va vers l'abstrait.

Nous retrouvons ces deux stades en comparant les dessins des tout petits enfants, âgés de 3-4 ans (c'est-à-dire l'époque où le dessin est spontané), avec les dessins d'un enfant âgé de 7-8 ans (qui travaille désormais par imitation). Pour les tout petits, la fleur sera quelque chose de plein, de concret, pour les plus âgés au contraire la fleur sera dessinée schématiquement en traçant le seul contour, la fleur sera stylisée.

Evidemment, au sujet de la géométrie, les enfants ne sont pas encore arrivés à une conception abstraite.

Pour toutes ces raisons le dessin est insuffisant et il est donc nécessaire de recourir à des bases concrètes. Mais, qu'est-ce qu'on entend par base concrète ? Nous ne songeons pas ici à suggérer une liste de modèles ou de matériaux ou de dispositifs pour mettre en lumière telle ou telle notion, car la pensée du maître comme celle de l'élève ne seraient pas libres; et l'exemple ou l'idée concrète peut naître dans un milieu particulier plutôt que dans un autre, peut surgir d'une occasion fortuite, peut s'adapter à telle classe et non à telle autre. Mais, des exemples que nous avons donnés et de ceux que nous donnerons, il résulte qu'on peut travailler avec un matériel de deux types : un matériel qui doit être manipulé par l'enfant lui-même (par exemple le mécano ou les aiguilles représentant des droites dans l'espace) et un matériel qui peut être manipulé par le maître seul (par exemple le dispositif par lequel on attirait l'attention sur la somme des angles d'un triangle, ou bien celui qui servait à former des figures semblables). Dans le premier cas *le but du matériel est de faire manipuler et construire* et de faire en sorte que, à travers la construction effective, l'élève arrive à la découverte d'un certain nombre de possibilités; dans le second, au contraire, *le but du matériel est d'attirer l'attention*, de faire observer, et par l'observation, de conduire à la découverte. Donc, dans le second cas le matériel se substitue à la parole du maître, mais — élément fondamental — ne restreint pas l'observation de l'enfant entre des limites fixées d'avance. En tout cas nous tenons à remarquer que le matériel doit être mobile : c'est en effet la mobilité qui attire l'attention de l'enfant et qui le conduit du concret à l'abstrait, car ce n'est pas le matériel qui est l'objet de son attention, mais plutôt sa transformation, une opération donc qui, étant indépendante du matériel même, est abstraite. A notre avis le matériel provoque l'inspiration — et il s'agit d'une inspiration créée justement par celui-ci — pour la formation opératoire.

Sur la base de ces idées nous allons développer dans la quatrième partie la notion de surface-aire.

IV

1. La notion de surface-aire dans un enseignement à caractère constructif

La notion de surface-aire [1], d'usage courant dans le vie de chaque jour, présente de grandes difficultés à tous ceux qui la considèrent pour la première fois; elle est souvent mal comprise de sorte que, très fréquemment, elle n'est même pas claire pour les adultes. C'est Galileo Galilei qui écrit [2] : « *Veramente non credo che fra quelli che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero 4 per 100 che non restassero a prima giunta ingannati che quei corpi che da superficie uguali sono contenuti non fossero ancora in tutto uguali; sì come nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie... ignorando che può essere un recinto uguale a un altro e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello.* »

Cette tendance naturelle à confondre volume et surface des solides ainsi que aire et périmètre des figures planes, se retrouve justement — comme on verra — tout au long de notre enseignement; l'étude des raisons de ces erreurs nous conduira à quelques remarques didactiques.

2. La notion de surface-aire

Les expériences et les discussions que nous allons relater dans ce paragraphe ont été développées en classe avec des enfants âgés de 11-12 ans. Il s'agit d'enfants qui connaissent déjà les règles pour le calcul des aires des polygones les plus simples : c'est justement sur les polygones les plus simples que nous fixerons notre attention.

On pose la question : « Je connais l'aire d'un carré; comment déterminez-vous la longueur du côté ? »

Tous les enfants répondent : « Il faut diviser l'aire par 4 », réponse qui tient à la confusion entre aire et périmètre.

On demande alors : « Comment fait-on pour calculer l'aire d'un carré ? » Ils répondent en énonçant correctement la règle. L'un dit : « Le carré est un rectangle particulier et l'aire d'un rectangle est le produit des longueurs des côtés. »

On demande : « Pourquoi trouve-t-on l'aire d'un rectangle de cette façon ? »

Les élèves sont surpris de la question : car « on sait » que l'aire d'un rectangle se trouve au moyen de cette règle. Ensuite l'un dit : « Oui, l'aire du rectangle se trouve en multipliant la longueur de la base par la longueur de la hauteur parce que l'on peut imaginer que la base se déplace parallèlement à elle-même sur toute la longueur de la hauteur, en « balayant » ainsi la surface. »

Je dois dire que les premières fois cette explication me paraissait étrange et je pensais que pour un enfant l'explication qu'on donne en général en partageant le rectangle en un certain nombre de petits carrés unitaires égaux devait être beaucoup plus spontanée. Ensuite,

[1] Un rigide respect de la tradition du langage formel conduit à distinguer la signification des mots « surface » et « aire ». On remarque tout de même dans l'usage moderne une tendance à identifier les deux vocables lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ici, nous serons conduits quelquefois à cette simplification.

[2] G. Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* Leida 1638.

« En vérité je ne crois pas que parmi ceux qui manquent de quelque notion de géométrie il s'en trouverait 4 sur 100 qui, de prime abord, ne croiraient que les corps enfermés en des surfaces égales ne sont aussi égaux en tous points. Ainsi ils encourent la même erreur en parlant de surfaces..., ne sachant pas qu'on peut avoir une enceinte égale à une autre et la place enfermée en celle-ci bien plus grande que la place de celle-là. »

je me suis persuadée que cette dernière explication est beaucoup plus difficile car elle s'appuie sur une convention : l'unité de mesure. Et une convention imposée est toujours quelque chose d'artificiel.

Certes, il est impressionnant de retrouver chez les petits les idées de Bonaventura Cavalieri; mais il ne s'agit pas tout juste des « indivisibles » de Cavalieri mais plutôt de la conception de Newton qui dans son « Tractatus de quadratura curvarum »[1] s'exprime par les paroles suivantes : « *Quantitates mathematicas, not ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas, hic considero. Lineae describuntur, ac describendo generantur, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum; superficias per motum linearum; solida per motum superficierum... Hae geneses in rerum natura locum vere habent, et in motu corporum quotidie cernentur. Et ad hunc modum veteres, ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium, genesim docuerunt rectangolorum.* »

L'enfant « sent » la notion d'aire comme dynamique; il « sent » l'aire dans son « devenir », pour employer l'expression de Jacques Hadamard [2]. Il veut construire cette aire, il ne veut pas l'avoir comme une somme de quantités connues à priori.

Si l'on veut rendre plus vivante cette idée pour les enfants, on peut leur suggérer de penser aux sillons faits par la charrue dans un champ rectangulaire. Et cette expérience, qui conduit au souvenir d'un travail manuel, présente aussi l'avantage d'amener les élèves, d'une façon tout à fait naturelle, à donner de la vie à l'autre notion d'aire : la statique. On dira aux enfants : « Imaginez maintenant que le champ rectangulaire soit une prairie; de ce champ on peut tirer une certaine quantité de foin. » Mais, avant que la phrase soit terminée, il se trouvera certainement plus d'un élève prêt à ajouter : « Pour reconnaître si un champ a une surface plus grande ou plus petite qu'un autre on compte les tas de foin. » Voici la notion statique d'aire : le nombre des tas de foin

[1] J. NEWTON, « Introductio — Tractatus de quadratura curvarum », 1704; *Opuscula Mathematica, philosophica et philologica*. Lausannae et Genevae, 1744.

« Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes seront décrites et par là générées non pas par addition de parties mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces... Ces générations se réalisent vraiment dans la nature et on peut les observer tous les jours dans le mouvement des corps. De cette manière, nos ancêtres ont indiqué la génération du rectangle comme s'il était décrit par un segment mobile perpendiculaire à un segment fixe. »

[2] J. HADAMARD, *Newton and the infinitesimal calculus*. The Royal Society, 1946.

donne l'aire du rectangle; le tas de foin est l'unité de mesure, car un tas vient d'un carré qu'on peut choisir comme unité, et dans ce cas la convention de l'unité surgit d'une façon naturelle.

Dans ces deux exemples la base concrète est le souvenir d'une expérience vécue ou dont on a entendu parler.

Il y a donc deux types d'expériences à développer pour conquérir la notion d'aire : l'une qui doit conduire à la conception statique, l'autre à la conception dynamique.

Pour s'exercer à la première — la statique — je trouve fort utile un matériel tout simple imaginé par C. Gattegno : le géo-plan [1]. Il s'agit en particulier d'une planchette sur laquelle sont plantés des clous formant un réseau (par exemple un réseau carré de 25 clous disposés à la même distance l'un de l'autre). Des élastiques de couleurs sont tendus de l'un à l'autre de façon à former des polygones. Les figures se font et se défont, se complètent, donnant lieu à des polygones plus complexes, à des polygones concaves et étoilés, à toutes ces figures, enfin, qu'on n'a pas l'habitude de considérer dans nos cours mais qui sont bien plus générales que celles que l'on dessine.

Par le géo-plan, l'enfant s'exerce à la construction d'un polygone satisfaisant à certaines conditions, à la comparaison de polygones par somme ou différence, à l'évaluation « à l'œil » de l'aire d'une surface polygonale. Mais le géo-plan concerne seulement l'aspect statique de la notion d'aire, et, en outre, il ne permet pas de passer par un procédé continu d'une figure à l'autre.

Pour saisir une conception plus dynamique de l'aire, il faudrait « balayer » la surface du rectangle, mais les hachures dessinées à l'intérieur ne disent rien car elles sont statiques. On pourrait facilement réaliser un film (dessin animé) sur ce sujet et des problèmes, souvent même fort compliqués, apparaissent au moment où l'on passe de la considération du rectangle à celle d'autres figures.

Il me semble que sur la notion dynamique d'aire on peut très bien attirer l'attention d'une classe par une expérience qui met en relation aire et périmètre. Il s'agit d'une expérience tout à fait simple mais riche de conséquences : prenez une boucle de ficelle et tendez-la entre le pouce et l'index de chaque main à la façon d'un rectangle ayant pour base la distance entre les deux mains et pour hauteur la distance entre

[1] Pour une explication plus détaillée du géo-plan, voir le chapitre de C. GATTEGNO dans le livre *L'enseignement des mathématiques*, par PIAGET, BETH, DIEUDONNÉ, LICHNEROWICZ, CHOQUET, GATTEGNO. Neuchâtel et Paris, Delachaux et Niestlé, 1955. Voir aussi le chapitre « Matériels multivalents », plus loin.

les doigts de la même main. Montrez aux élèves ce rectangle. Ensuite, rapprochez les doigts et, par conséquent, éloignez les mains. Le rectangle change de forme : la hauteur diminue et la base augmente. On pose la question : « Qu'est-ce qui arrive à l'aire ? » Tous les élèves répondent : « L'aire est toujours la même car le contour est toujours le même. » Quelques-uns ajoutent : « L'aire ne change pas car ce que l'on perd en hauteur, on le gagne en base. » Alors, on continue à rapprocher ou bien à éloigner les doigts : on a une série de rectangles. « Si l'on continue à rapprocher les doigts — l'un ou l'autre vous dira — le rectangle devient de plus en plus bas et à un moment donné il disparaît. A cet instant l'aire n'existe plus, l'aire vaut zéro. » Plusieurs élèves se trouvent d'accord sur le fait que l'aire de ces rectangles reste toujours la même jusqu'au dernier cas, où l'on a « l'écroulement final » — selon leur expression. Mais la théorie de « l'écroulement final » ne satisfait pas tout le monde. L'un des élèves dit que si à la fin l'aire est nulle, cela signifie que l'aire doit diminuer petit à petit; en lui jaillit l'idée d'une fonction continue. D'autres, dont l'esprit est plus positif, vont aborder le problème avec une figure, en dessinant sur leur cahier quadrillé deux rectangles de même périmètre. D'autres encore donnent au périmètre une certaine valeur en centimètres et font le calcul de l'aire dans chaque cas. D'autres enfin renversent le problème et, en utilisant le géo-plan, construisent deux rectangles ayant la même aire; ils s'aperçoivent alors que le périmètre n'est pas le même.

A la fin la théorie de « l'écroulement final » est abandonnée par tout le monde, mais certainement à contre-cœur : le fait que l'aire change chaque fois est pour les enfants une chose assez étrange. Tous remarquent dans leurs impressions écrites sur « une expérience avec une ficelle » que quelque chose n'est pas naturel. Voici la composition d'une fillette : « J'ai pris une ficelle longue de 54 cm et j'ai formé beaucoup de rectangles; j'ai calculé l'aire de tous ces rectangles et je me suis aperçue que l'aire changeait toutes les fois. J'ai trouvé aussi que dans cette série de rectangles l'aire la plus grande est celle d'un carré. Mais, petit à petit je peux réduire le rectangle à la seule base (la ficelle double); dans ce cas l'aire est zéro. Alors je me demande : la surface de tous ces rectangles que je voyais tout à l'heure, où est-elle allée ? Comment a-t-elle fait pour échapper ? Pour moi, c'est un mystère ! »

On doit remarquer dans ces quelques lignes, comme d'ailleurs dans les lignes écrites par tous ses camarades, que cette simple expérience sur une ficelle a conduit à un problème qui sort du champ étroit des mathématiques pour entrer dans un champ métaphysique : l'aire n'est

pas un objet, un quelque chose d'immuable, un être; l'aire doit être envisagée dans son devenir, c'est-à-dire comme une fonction et non pas comme une chose.

Une expérience du même type peut se faire à l'aide d'un mètre pliant : un carré réalisé par quatre barres est déformé de façon à produire des losanges; on propose de comparer les surfaces de ces quadrilatères.

Il est intéressant de remarquer que ces expériences destinées à des adultes, même doués d'une certaine culture, donnent les mêmes résultats qu'avec les enfants; « il y a seulement quatre personnes sur cent » — selon les paroles de Galileo — qui voient clairement le problème, c'est-à-dire qui ne font pas de confusion entre aire et périmètre.

A mon avis, la confusion qui naît entre aire et périmètre tient surtout au fait que l'attention d'un enfant devant une figure se porte sur ce qui est dessiné — le contour — et non pas sur l'intérieur. On revient donc aux considérations faites dans la troisième partie, 1. Voilà encore un exemple typique qui montre la véritable insuffisance du dessin.

Ici le matériel est vraiment essentiel. Réfléchissons à sa fonction dans les expériences faites : il est vrai que, soit la ficelle, soit le mètre pliant, indiquent seulement le contour de la figure, tout comme le dessin, mais contrairement au dessin, il y a ici mouvement, et c'est justement le changement d'aire, sa transformation, qui attire le regard et qui conduit à la notion d'aire.

Conclusion

Il est nécessaire de recourir à l'objet et à l'action si l'on veut que l'enseignement de la géométrie intuitive ait un caractère constructif et qu'il soit donc formatif : voilà la conclusion à laquelle nous voudrions avoir amené le lecteur.

Objet et action qui ne doivent pas suivre un schéma préétabli mais se laisser inspirer chaque fois par les exigences de la classe que le maître aura la sensibilité de savoir saisir : c'est justement de ces exigences qu'ont jailli les exemples que nous avons donnés.

Les moyens pratiques pour la réalisation des expériences n'ont aucune importance : il s'agira d'un modèle, d'un dispositif, d'une expérience réalisée à l'aide d'un matériel ou seulement imaginée, des variations d'une lumière ou d'une ombre.

Et c'est peut-être précisément cette liberté d'imagination et d'interprétation — pour le maître comme pour l'élève — qui constitue une des caractéristiques de la méthode constructive.