EMMA CASTELNUOVO

La logica delle proposizioni nella scuola media. Esperimenti didattici

Relazione presentata al Convegno su

Matematica nuova nell'educazione dei giovani

Torino, 28 settembre 1970

Estratto dal volume:

Nuova didattica della matematica

edito a cura dell'Associazione Piemonte Italia

TORINO 1971

La logica delle proposizioni nella scuola media. Esperimenti didattici

Insegno in una scuola media di Roma, del centro di Roma, e tengo a fare questa precisazione perché ciò significa che la scuola raccoglie gli ambienti più disparati: ci sono figli di professionisti, figli di ministri, e, a lato, ci sono figli non dico di analfabeti, ma quasi, di persone che dicono: « sa, io ho fatto solamente le tre classi elementari, il mio bambino, la mia bambina, sono i primi della nostra famiglia che vanno alla scuola media ». Questo ambiente così vario fa sì che l'insegnamento non è certo facile, ma è fuori dubbio molto interessante. Mi domandava il Provveditore, se riusciamo ad « amalgamare » questi ambienti così diversi, questi bambini che vengono da famiglie tanto lontane. In verità dobbiamo dire che ci riusciamo veramente, nel giro di tre anni, e non solo ad « amalgamarli », ma a farli amici; e questa è, fuori dubbio, la cosa più bella che esiste nella nostra scuola. E come facciamo? Abbiamo un doposcuola? No, non abbiamo niente. Abbiamo classi piccole? No, io ho sei classi e *sempre* di trenta bambini. Ora io credo che questo successo sia dovuto in grande parte all'insegnamento della matematica; non è infatti un insegnamento dell'italiano, della storia o della geografia che permette di « unificare » gli allievi, anzi queste materie fanno risaltare chi ha libri nella propria casa e chi non li ha, chi ha viaggiato e chi non viaggia, chi parla l'italiano e chi parla il romanesco; ma *è* invece la matematica che rende tutti veramente uguali.

L'esperimento che desidero esporre l'ho fatto sulle mie sei classi e cioè su 180 bambini; ho cominciato a farlo in terza media, poi in seconda media e poi in prima; in verità mi è capitato, per una strana occasione, di svolgere il medesimo argo-

mento anche per i ragazzi del liceo, ma quanto vado a dire vorrei facesse comprendere come questo argomento si può veramente e molto facilmente svolgere in una prima media. Immaginiamo di essere in classe e in una prima media.

Avevo più volte notato negli anni passati, nel parlare dei numeri pari e dei numeri dispari e nel parlare delle simmetrie del quadrato, come i bambini fossero affascinati da strutture uguali. Mi spiego subito meglio. L'esperienza che vado a ripetere l'ho fatta alla fine di novembre dell'anno scorso, cioè due mesi dopo l'inizio della scuola. Avevo dunque già parlato in 1ª media dei numeri pari e dei numeri dispari, numeri che tutti conoscono, ma nessun bambino li aveva osservati attentamente. Avevo fatto notare che la somma di due numeri pari è un numero pari, la somma di un pari e un dispari è dispari, la somma di due dispari è un numero pari; avevamo perciò scritto la tavola così come si fa sempre

+	pari	disp.
pari	p	d
disp.	d	p

Dopo quindi giorni, o forse un mese, non ricordo più, sono venuta a parlare delle simmetrie del quadrato e avevamo notato insieme questo fatto: se io ho un quadrato lo posso piegare lungo le mediane (fig. 1); lo posso piegare anche lungo le diagonali e, sempre, le due parti si possono sovrapporre; in questo

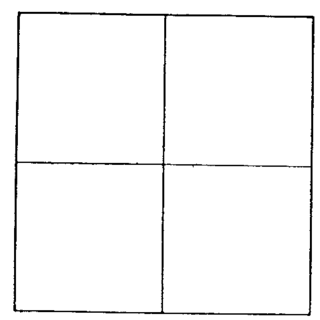

Fig. 1.

modo si mettono in evidenza gli assi di simmetria del quadrato (fig. 2). Avevamo notato (fig. 3) che si può passare dalla figurina A alla C con una rotazione, ma vi si può passare anche ese-

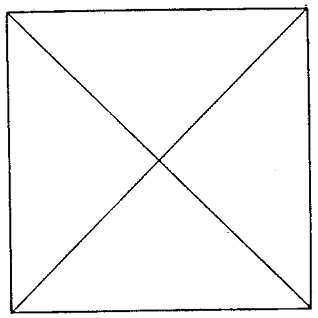

Fig. 2.

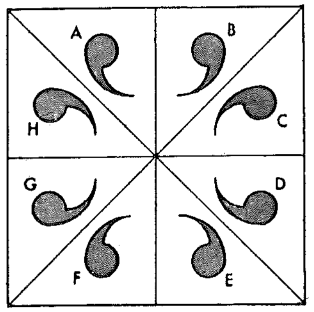

Fig. 3.

guendo successivamente due simmetrie: una attorno ad una mediana ed una attorno ad una diagonale. Avevamo dunque scritto che il prodotto di due simmetrie è una rotazione; in modo del tutto analogo avevamo visto che il prodotto di due rotazioni è una rotazione, di una rotazione e di una simmetria è una simmetria. Avevamo quindi scritto così

°	rot.	simm.
rot.	r	s
simm.	s	r

Quando i ragazzi hanno scoperto questa seconda tavola sono rimasti molto perplessi, ed hanno detto « prima erano numeri, ora sono trasformazioni; eppure *è la stessa cosa* ».

Ed ancora più impressionati sono rimasti quando ho fatto loro notare che la stessa struttura si trova nel linguaggio di tutti i giorni quando pronunciamo due proposizioni affermative o negative. Facciamo subito un esempio: « io non voglio che tu non vada » significa che « devi andare »; molte volte per sottolineare l'affermazione usiamo due negazioni. Ed ora consideriamo queste proposizioni in tutte le loro « combinazioni ». Se dico « io

voglio che tu vada », si tratta di una proposizione composta di due che hanno significato affermativo e il risultato è affermativo: « tu ci devi andare » e se dico « io voglio che tu non vada » o « io non voglio che tu vada » abbiamo un significato negativo: « non ci devi andare »; e infine, come dicevo un momento fa, se dico « io non voglio che tu non vada », ciò significa che tu devi andare.

Quanto ho detto si può riassumere in una tavola che i bambini chiamano « del sì e del no »

°	sì	no
sì	sì	no
no	no	sì

Bene, è difficile far capire a coloro che non hanno ancora fatto questa esperienza, come il ripetersi dello stesso motivo, il rilevare la stessa struttura in tre campi così diversi, in tre mondi così lontani, colpisca i bambini. Sono loro stessi che dicono « allora è inutile che scriviamo tre tabelloni (questi tre tabelloni sono appesi nelle nostre classi), basta farne uno solo in cui non si parla né di numeri, né di trasformazioni, né di sì o di no; al posto dei numeri o delle trasformazioni ci metteremo « qualcosa » che funzioni in modo tale che vale quella struttura.

Abbiamo allora messo un tondino (°) per indicare l'operazione e poi ho preso i suggerimenti da loro: abbiamo deciso di mettere come simboli un triangolo e un quadrato (fig. 4)

°	△	□
△	△	□
□	□	△

Fig. 4.

Questo tabellone è lì appeso ad una parete della nostra aula, e i vuoti dentro ai triangoli e ai quadrati saranno riempiti via via, ad es. dal prodotto dei numeri relativi.

Da molti anni « unificavo » così questi diversi argomenti, ed avevo sempre notato che la tavola che destava più interesse era quella « del sì e del no ». Ma, proprio di quella tavola, non se ne parlava più; riprendevo invece le altre due (numeri e isometrie) per svilupparle negli anni successivi insistendo sulla struttura di gruppo. Il lasciar cadere proprio il tema che interessava di più era fuori dubbio un grave errore didattico. Quest'anno ho cercato di rimediare al mio errore. Cosa voleva dire riprendere la tabella « del sì e del no »? Voleva dire questo: parlare del linguaggio: nel linguaggio ci spieghiamo per mezzo di proposizioni le quali possono essere semplici o composte; le proposizioni sia semplici che composte traducono dei pensieri, i pensieri possono essere veri o falsi. È dunque sul *vero* e sul *falso* che si deve « puntare ».

Di proposizioni semplici ce ne sono tante e sono così diverse che sarebbe molto difficile « riunirle » tutte insieme; mentre invece cominciando dalle più complicate, e cioè dalle proposizioni composte, si possono avere ben presto dei risultati molto significativi.

Lavoriamo dunque sulle proposizioni composte. Si chiede: « come si possono comporre due proposizioni? ». Le risposte sono assai imprevedibili: i bambini di 1ª media propongono non « e », la congiunzione più semplice, ma « benché », « se », « perché », dei connettivi meno usati.

Decidiamo di vedere come si comporta « e »; consideriamo allora due frasi che siano composte con « e », per esempio: « il gatto è un mammifero *e* un animale domestico ». Questa frase composta è vera: il gatto è un mammifero ed è un animale domestico; questa frase è composta da due proposizioni semplici che sono entrambe vere: « il gatto è un mammifero » è vero, e « il gatto è un animale domestico » è anche vero. Ma se nego anche solo una di queste proposizioni tutta la frase composta diventa falsa; non posso dire « il gatto non è un mammifero ed è un animale domestico », perché è chiaro che la frase risulta falsa. Prendiamo ora un esempio nel campo matematico: « il quadrato è un rombo e un rettangolo » è una proposizione vera composta da due vere (da notare che avevamo già, e a lungo, parlato di questo argomento).

Ma allora è inutile che parliamo di gatto, di rettangolo, di mammifero e di quello che sia; facciamo una cosa molto più

semplice: a noi ciò che interessa non è l'argomento di cui parliamo, quello che ci interessa è vedere se la frase composta è vera o falsa. Decidiamo allora di scrivere così: vero o falso; anzi invece di scrivere vero o falso scriveremo il simbolo 1 al posto di vero e il simbolo 0 al posto di falso. Ecco dunque la nostra tavola di verità relativa alla congiunzione « e », dove il simbolo $\wedge$ significa « e »

		frase p	
$\wedge$		1	0
frase q	1	1	0
	0	0	0

Non sono riuscita a completare la tavola che mi hanno interrotto: « ma noi l'abbiamo già visto questo modo di comportarsi — hanno detto — noi sappiamo che il quadrato è l'intersezione fra l'insieme A dei rombi e quello B dei rettangoli (fig. 5) e dunque il *simbolo* $\wedge$ *corrisponde all'intersezione di due insiemi*! ». « Qui abbiamo linguaggio, qui abbiamo matematica — e indicavano tabelloni e scritte sulla lavagna — ma è la stessa cosa: il connettivo "e" corrisponde all'intersezione ».

Abbiamo poi parlato di un altro connettivo, la disgiunzione « o », ed ho detto subito di farmi un esempio di una frase composta con « o ». È una cosa molto curiosa: il primo esempio che mi è stato fatto quasi all'unanimità in tutte le classi è « o la

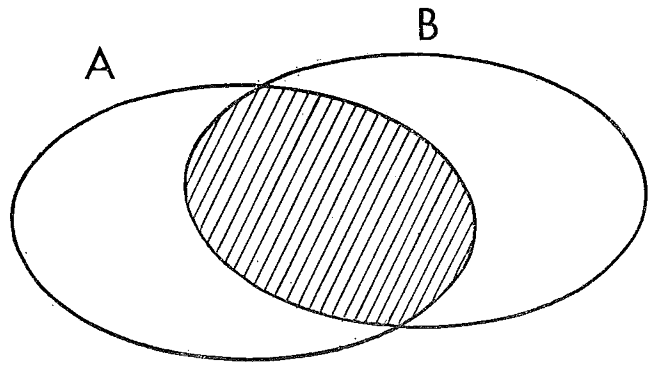

Fig. 5.

borsa o la vita »; il fatto sorprendente è che, pur incoraggiati a dare altri esempi, tutti gli esempi erano sulla disgiunzione « o » esclusiva. Mi spiego meglio riportando un altro esempio che mi hanno dato: « o mangiar questa minestra o saltar dalla finestra », « o questo o quello »; in latino si direbbe « aut aut ». Con molta difficoltà è venuto fuori qualche esempio dell'« o » inclusivo, o come dicevano loro, dell'« o » più dolce. Ma forse si capisce perché nel nostro linguaggio effettivamente si usa poco l'« o » inclusivo.

Allora ho parlato della ricchezza della lingua latina: i latini avevano due modi di esprimere l'« o »: l'aut esclusivo e il « vel » che è l'« o » inclusivo. Ed è proprio il vel che ha portato al simbolo V.

Ho portato degli esempi sull'utilizzazione dell'« o » inclusivo, cominciando da un proverbio in romanesco: « oggi è il 2, la candelora, dell'inverno semo fora, ma se piove *o* tira vento, dell'inverno semo dentro ». Ho poi portato un esempio matematico: se io dico « datemi un numero che sia divisore di 6 o di 10 » uno potrà dire 3 perché è un divisore di 6, un altro dirà 5, e va bene perché è un divisore di 10; se poi dico 2, va anche bene perché è divisore sia di 6 che di 10. Allora descrivo il diagramma della fig. 6 con gli insiemi B e C. Rispondo bene se prendo un numero in una delle tre zone, cioè nell'unione dei due insiemi B e C. Dunque *l'unione di due insiemi corrisponde al Vel, cioè all'« o » inclusivo.* È facile ormai costruire la tavola di verità relativa al Vel

	V	frase p 1	0
frase q	1	1	1
	0	1	0

Le operazioni del linguaggio, i connettivi ∧ e V, corrispondono dunque a determinate operazioni sugli insiemi e precisamente all'intersezione e all'unione.

Ma c'è un altro connettivo sul quale dovevo trattenermi all'inizio: è il « non ». Il « non » ha un grande potere. Si dice per esempio: « i raggi del sole riscaldano »; questa è una frase vera.

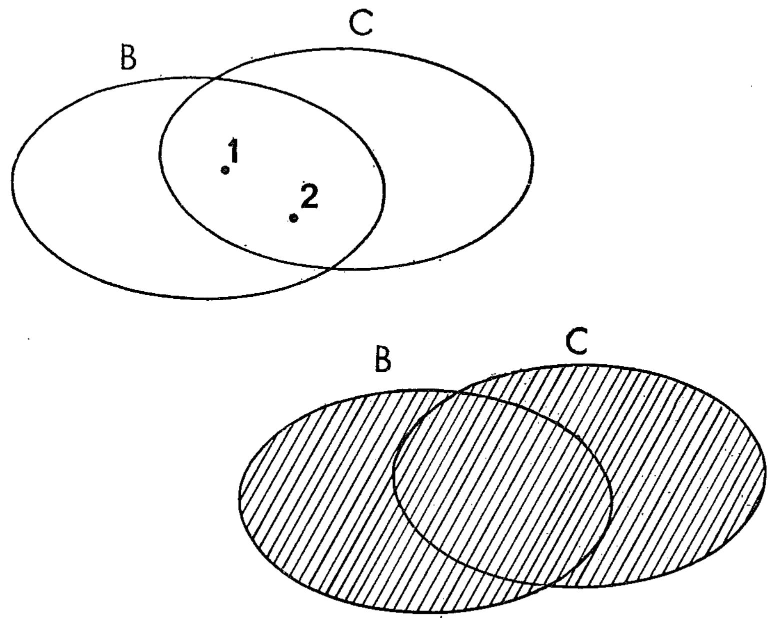

Fig. 6.

Se invece dico: « i raggi del sole non riscaldano », la frase è falsa. Mettendo dunque un « non » ho reso falsa una frase vera.

Ed ecco un esempio matematico: « i numeri multipli di 2 sono numeri pari », e questa è una frase vera; se io dico « non è vero che i multipli di 2 sono numeri pari » la frase è falsa. Il « non » rende falsa una frase vera.

Che cosa succede se premetto il « non » ad una frase falsa? Ecco un esempio suggerito da un bambino: « tutti i gatti sono grigi » e la sola idea di questo « grigiume » ha suscitato grande ilarità! È chiaro che si tratta di una frase falsa. Ma se dico « non è vero che tutti i gatti sono grigi », ho una frase vera.

Allora, se indichiamo con p una proposizione e con $\sim p$ la sua negazione, abbiamo la seguente tavola di verità relativa al « non »

p	~p
1	0
0	1

È chiaro che l'operazione « non » equivale a prendere il complementare di un insieme; per esempio, a prendere un numero dispari invece di un numero pari e viceversa (fig. 7).

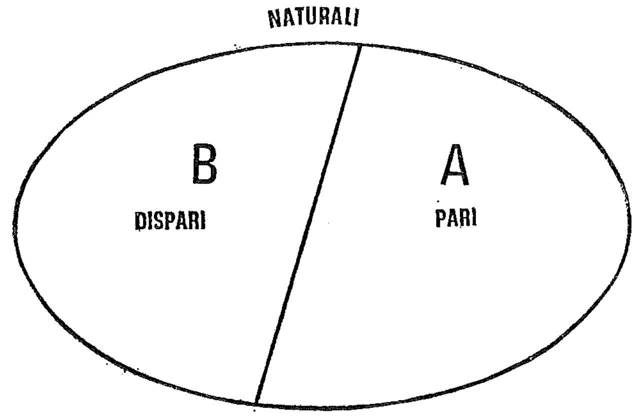

Fig. 7.

Abbiamo, come conclusione, scritto sulla lavagna le tavole di verità relative a $\wedge$, $\vee$, $\sim$, e indicato, a lato, le tre situazioni insiemistiche (intersezione, unione, complementarietà) corrispondenti. Ne viene come conseguenza che: se io scopro delle proprietà che valgono per le operazioni sugli insiemi, queste proprietà corrisponderanno a certe proprietà del linguaggio. Ho allora parlato delle proprietà dell'intersezione e dell'unione di insiemi, richiamando le proprietà commutativa, associativa e distributiva dell'aritmetica ordinaria. Ho fatto notare come la proprietà distributiva valga solo nei riguardi della moltiplicazione rispetto all'addizione e non viceversa.

Abbiamo poi verificato, valendoci dei diagrammi, le proprietà commutativa e associativa relative all'intersezione e all'unione di insiemi. Ma queste proprietà non dicono nulla di nuovo rispetto alle analoghe dell'aritmetica ordinaria.

I ragazzi rimangono invece colpiti dal fatto che, nei riguardi dell'intersezione e dell'unione, valgono le due proprietà distributive.

Ora, le proprietà degli insiemi corrispondono a proprietà del linguaggio; e dunque, nei riguardi dei connettivi $\wedge$ e $\vee$ valgono le due proprietà distributive. Questo fatto può esprimersi

in modo suggestivo dicendo che le leggi del linguaggio, cioè quelle del pensiero, sono più armoniche, più giuste delle leggi dell'aritmetica ordinaria.

Ecco su un esempio come si applica giornalmente la proprietà distributiva: la mamma dice al babbo che rientra a casa e vuol sapere cosa fanno i ragazzi « Pietro studia *e* Carlo ascolta la musica *o* legge ». Questa proposizione è composta da tre proposizioni semplici, indicate con p, q, r. La proposizione composta si scrive in simboli così:

$$p \wedge (q \vee r).$$

Applicando la proprietà distributiva dell'« e » rispetto all'« o », la stessa proposizione si scrive

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

e se passiamo di nuovo all'espressione verbale risulta chiaro quanto ha detto la mamma.

Sempre su un esempio si può far vedere come valga la proprietà distributiva dell'« o » rispetto all'« e ».

Siamo passati dal linguaggio alla matematica, all'insiemistica, abbiamo cioè considerato una logica delle proposizioni e l'abbiamo messa a confronto con una logica degli insiemi.

Adesso facciamo un passo avanti, andiamo alla logica, all'algebra dei circuiti elettrici, ma ripeto che non c'è nulla di nuovo, sono cose che si sono fatte un po' dappertutto, e se proprio si vuole trovare qualcosa di nuovo in quello che affermo occorre pensare che ho trattato l'argomento nella prima media e che l'interesse è stato grandissimo.

Rappresentiamo ora tutto ciò su dei circuiti; guarderemo solo una certa lampadina che si accende o si spegne. Cominciamo dalla cosa più semplice: la negazione. Ricordiamo che 1 significa vero e 0 falso; viene naturale di indicare con 1 il passaggio di corrente in un certo circuito e con 0 il non passaggio di corrente nello stesso circuito. Procediamo così: lanciamo una corrente in A (fig. 8) in un circuito dotato di un interruttore C; quando l'interruttore C è chiuso la corrente arriva in B. Se invece viene lanciata una corrente nel circuito P, esso funziona da elettromagnete ed apre l'interruttore C; perciò la corrente lanciata in A non arriva in B e la lampadina non si accende.

Dunque al passaggio di corrente (1) nel circuito P corrisponde un non passaggio di corrente (0) in B, e viceversa. Si è realizzata così la negazione.

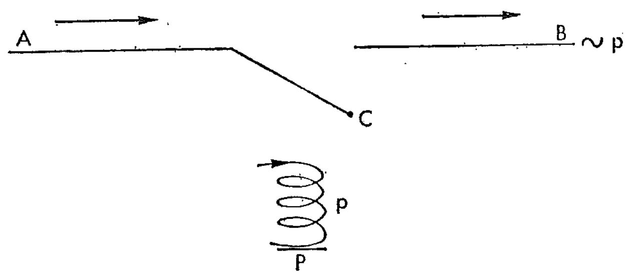

Fig. 8.

Rappresentiamo adesso con un circuito il connettivo « e ». Costruiamo un circuito AB (fig. 9) dove ci siano due interruttori C, D disposti *in serie*. È chiaro che la corrente lanciata in A arriva in B, solo se entrambi gli interruttori sono chiusi, il che avviene se una corrente passa sia nel circuito P che nel circuito

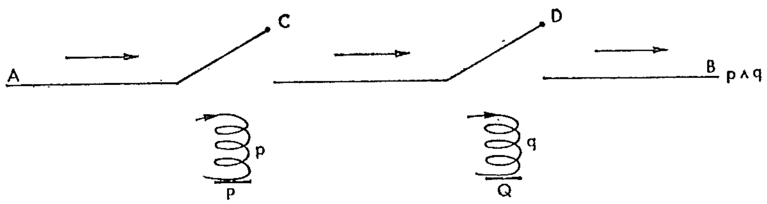

Fig. 9.

Q dando così luogo ad elettromagneti. Vediamo dunque che l'unico caso in cui si abbia passaggio di corrente (1) in B è quello in cui vi sia corrente (1) sia in P che in Q. In tutti gli altri casi in B non arriva la corrente. Abbiamo così realizzato con un circuito la tavola di verità relativa all'« e ».

Costruiamo infine un circuito AB (fig. 10) con due interruttori C, D disposti *in parallelo*. È facile capire che la corrente arriverà in B sia che sia chiuso l'interruttore C sia che sia chiuso l'interruttore D, sia, naturalmente, che siano entrambi chiusi.

Avremo allora corrente (1) in B nei seguenti casi: 1 in P e 0 in Q o viceversa, e 1 in P e 1 in Q.

Il circuito in parallelo rappresenta dunque la tavola di verità relativa all'« o » inclusivo.

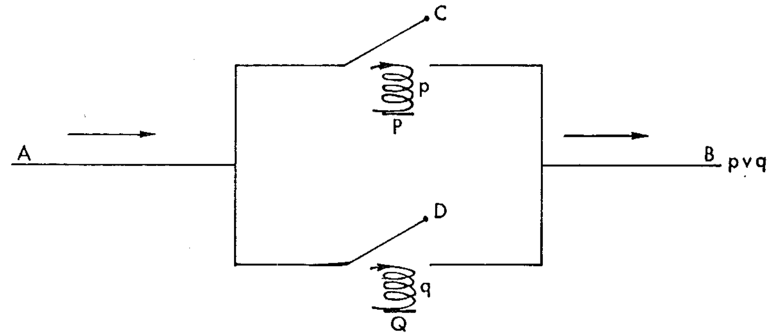

Fig. 10.

Vorrei adesso considerare il vero significato di questo esperimento didattico. Abbiamo studiato tre algebre: l'algebra delle proposizioni cioè linguaggio, l'algebra degli insiemi cioè matematica, l'algebra dei circuiti elettrici cioè tecnica. Abbiamo dunque tre campi che sono apparentemente molto lontani l'uno dall'altro; ma la loro struttura è la stessa. I ragazzi cominciano in tal modo fin dalla 1ª media ad abituarsi ad un notevole processo di astrazione: a vedere come uguali cose all'apparenza diverse. Ed è così che « sentono » molto presto il vero significato della matematica.