

# RICERCHE DIDATTICHE

**L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA  
NEL PRIMO BIENNIO DELLE SCUOLE  
SUPERIORI**

1959

**54**

a cura del MOVIMENTO CIRCOLI DELLA DIDATTICA  
ANGELO SIGNORELLI EDITORE - ROMA

giusto, per cui non si vede come si possano dissociare gli errori logici e linguistici dagli errori matematici.

Se nella matematica sopprimiamo la logica e la lingua anche nel senso corrente del termine non so proprio cosa possa restare della matematica.

L'aspetto valido di questo discorso è colto invece sul giusto piano dalla Krygowska quando afferma che « il passaggio dalla lingua del concreto a quella dei simboli, dalle parole ai segni, costituisce per l'alunno una difficoltà fondamentale che può essere superata ricorrendo ad una trasformazione qualitativa del suo pensiero. Oltre a questa difficoltà fondamentale bisogna tener presenti, quando si introduce il calcolo simbolico, le diverse difficoltà relative a questo nuovo linguaggio ». Ma se ci richiamiamo a quanto abbiamo prima trascritto del nostro Vailati troviamo là anche a questo proposito la migliore chiarificazione. E del resto molte volte, nei compiti scritti dei nostri allievi riscontriamo anche per quanto riguarda la lingua italiana tali involuzioni sintattiche da provocare smarrimento nel nostro collega di lingua. Ma a ben riflettere si può subito riconoscere che l'involuzione del discorso è sì sempre linguistica, ma ha il suo fondamento in una non chiara acquisizione e formulazione dell'idea matematica. Ciò si traduce inevitabilmente in oscurità di discorso o addirittura in forme espressive che non corrispondono alla maturità che il ragazzo ha già raggiunto in altre discipline. Si tratta comunque di una questione molto importante e sulla quale non sembra si sia meditato in modo giusto.

Il problema della progressività del rigore nel nostro insegnamento deve affrontare queste questioni. Personalmente sono del parere che si debba consigliare larghezza e tolleranza nel periodo in cui l'allievo è nella fase euristica e di formulazione del suo pensiero matematico, ma ad ogni livello esiste il momento in cui le acquisizioni devono essere tradotte in modo corretto in lingua matematica e direi che il biennio che qui ci interessa occupa per questo riguardo un posto di importanza decisiva. E' il periodo in cui si studiano le sintassi latine e greche, è il periodo in cui la conoscenza delle lingue classiche si va definendo; ora, questa stessa maturazione noi dobbiamo poterla richiedere anche per quanto riguarda l'algebra elementare. Per questo non si vede come al ginnasio si possa continuare ad ignorare l'esigenza della prova scritta da impostare sia pure altri criteri diversi da quelli attuali.

E' evidente che questa propedeutica renderà meno duro il salto fra insegnamento ginnasiale e liceale, dove all'orizzonte immediato si profila la trattazione dei numeri reali e la teoria delle grandezze.

Ma vi è di più, io credo che un insegnamento dell'algebra improntato a questo spirito possa anche educare seriamente ad una formazione logica e ad anticipare alcune conoscenze sui servizi che l'algebra stessa ha recato in tutti i domini e soprattutto in quello della logica matematica.

Questo discorso è troppo importante per essere qui affrontato di sfuggita. Spero che avremo il modo di studiare come incrementare gli studi logici nelle nostre scuole ed è anche in questa prospettiva che l'insegnamento dell'algebra potrà assolvere ad un compito più formativo di quanto oggi effettivamente avvenga.

Detto questo ci schieriamo subito con l'Enriques per respingere il valore metafisico ed ontologico che a volte si finisce per attribuire ai linguaggi logico-formali e in particolare anche a quello matematico.

Io credo che lo spirito scientifico del nostro insegnamento si possa salvare sia seguendo il suggerimento del Dewey, sia sviluppando l'attitudine sempre vigile a cogliere storicamente e attualmente i nessi fecondi fra « scienza formale » e « scienza reale », fra scienza e tecnica, fra uomo e natura.

E' a questa condizione che la ricerca matematica potrà porsi come elemento decisivo e fecondo nel momento sperimentale, pragmatico, conoscitivo e inserirsi produttivamente nello sviluppo della conoscenza e della cultura. Fuori di questo quadro sarebbe impossibile promuovere l'unità della cultura che è il primo e più importante compito per il quale la scuola nazionale deve impegnare le sue migliori energie.

## Didattica della geometria

Emma CASTELNUOVO

Mi è sembrato che il tema « Didattica della geometria nel 1° biennio dei corsi superiori » acquistasse un significato più espressivo se veniva considerato nel quadro della didattica della geometria in tutto il corso delle scuole secondarie. Scusatemi perciò se mi permetto di allargare un po' la mia relazione: vorrei esporre, sia pur brevemente, le idee che mi sono fatte sulle varie fasi dello insegnamento di questa materia, fasi che, volta a volta, si è costretti a superare per poter soddisfare quelle esigenze che si formano nell'intelligenza dell'allievo con lo svilupparsi delle strutture mentali.

Il passaggio dal corso di geometria della scuola media inferiore a quello successivo avviene in modo che direi « obbligatorio », « forzato »; accade infatti che a un certo momento il ragazzo sente l'insufficienza dello studio intuitivo, avverte i limiti del concreto, ha bisogno di qualcosa di più. E' interessante esaminare quali sono quelle reazioni che indicano dei mutamenti nel pensiero del pre-adolescente verso i 13 anni; mi sembra di poterle raccogliere in due gruppi:

*I° gruppo*) L'utilizzazione degli strumenti di misura, a cui, all'inizio del corso medio, veniva data dai ragazzi una fiducia illimitata, non soddisfa più. Dicevano, all'inizio del corso, « viene così perché l'ho misurato »; oppure « io misuro e così ho dimostrato ». Queste considerazioni di carattere sperimentale non soddisfano più perché da una parte si accorgono che la misura, sia pure accurata, è relativa alla persona che l'effettua e dà quindi un valore approssimato, e d'altra parte perché, potendosi effettuare un numero finito di misurazioni, non si ha la generalità.

Permettetemi, fra i tanti, di portarvi due esempi:

a) somma degli angoli di un triangolo.

Si dice: « disegnate tanti triangoli di forma diversa; misurate ciascun angolo, e fate la somma delle varie ampiezze ». A tutti risulta un valore intorno ai 180°. Rimangono perplessi. Si aggiunge: « eseguendo bene le misure la somma risulterebbe proprio di 180° ». Si chiede: « se in cento casi la somma degli angoli di un triangolo risulta di 180°, si può affermare che anche in un centunesimo caso avrà lo stesso valore? ». Qui si nota veramente una differenza fra le diverse maturità e mentalità. Molti dicono « è molto, molto probabile, ma... ».

b) lunghezza della circonferenza.

Ogni ragazzo ha un disco di diversa grandezza che si è costruito in cartone. Gli si dice di misurare la lunghezza della circonferenza e quella del diametro e di trovare il rapporto (ad esempio a meno di 1/100). Rimangono scossi a vedere che a tutti risulta un po' più di 3. Analoga questione di prima: le stesse domande, le stesse perplessità.

Conclusione: la verifica sperimentale non è sufficiente per avere la verità.

*II° gruppo*) All'inizio del corso è frequentissima non solo l'osservazione « misuro e così so », ma anche « ecco, si vede dal disegno; dunque è così ». « Si vede »; ma anche la fiducia in questo « si vede » a un certo punto viene scossa, e non solo portando degli esempi tipici di illusioni ottiche che tanta importanza hanno nella « teoria della forma », ma anche quando, proseguendo nel programma, si passa dai poligoni al cerchio e alle figure solide.

Lasciate che porti anche qui due esempi:

a) non si vede che la lunghezza di una circonferenza è uguale alla somma delle lunghezze di tante piccole circonferenze ottenute dividendo un diametro della grande in parti uguali e costruendo su ognuna di queste parti, assunta come diametro, una circonferenza. E non è nemmeno il caso « limite » che può in

qualche modo suggerire l'intuizione della proprietà perché questa viene proprio a cadere in questo caso.

b) e non si vede perché (è un vedere più largo di quello di prima) i due cilindri che si ottengono avvolgendo un foglio rettangolare di carta nell'uno o nell'altro senso debbano avere volume diverso.

Conclusione: *la percezione visiva non basta per avere la verità.*

Ecco come i ragazzi avvertono a un certo momento i limiti del concreto; è un dramma per loro. Vi dicono sfiduciati: «ma allora, se la misura non dà la certezza assoluta e se l'occhio porta ad errori, in qual modo si può dimostrare?».

Ci troviamo dunque forzati ad allargare il campo intuitivo d'indagine e a chiederci con quale mezzo potremo soddisfare le esigenze del ragazzo, quali strade dunque ci sarebbero offerte per il corso superiore.

Ecco due procedimenti che si presentano a sostituzione dei sensi: *la dimostrazione geometrica* e *la dimostrazione algebrica*; procedimenti che, su semplici esempi, si possono far comprendere anche a dei ragazzetti. Ne rimangono profondamente colpiti.

Riprendiamo due degli esempi or ora riferiti:

1) l'esempio a) del I° gruppo.

Si può dimostrare geometricamente, basandosi sull'uguaglianza di angoli formati da rette parallele con una trasversale, che la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto.

E' chiaro che sarà una dimostrazione isolata, non inquadrata in una sistemazione logica; ma il tipo di ragionamento può essere apprezzato da un allievo di scuola media.

2) l'esempio a) del II° gruppo.

Si può dimostrare algebricamente che la lunghezza della circonferenza grande è uguale alla somma delle lunghezze delle circonferenze piccole; e questo procedimento è alla portata di un allievo dell'ultimo anno di scuola media.

*Metodo geometrico e metodo algebrico, dunque, a sostituzione dei sensi:* verrà utilizzato l'uno o l'altro.

Secondo questo spirito si potrebbe organizzare un corso di geometria nel biennio successivo alla media. Ora, abbiamo già un'opera classica ispirata a queste idee: gli «*Eléments de géométrie*» di A.M. Legendre, pubblicati nel 1794. Nella prefazione ai suoi *Elementi* il Legendre dichiara che la conoscenza dell'algebra, ignorata dagli antichi, deve utilizzarsi per una più agile sistemazione della geometria.

Questo libro ha dominato come testo anche nelle scuole italiane nella prima metà dell'800.

Ma di questa trattazione sono stati avvertiti gli inconvenienti, ed è proprio la Scuola italiana (nelle persone di Cremona, Betti e Brioschi) che li ha segnalati; si è detto: c'è dispersione, non c'è solo un metodo, ci sono due metodi. Dice Cremona nel '67: «I nostri ginnasi e licei sono destinati a dare una cultura elevata, eccezionale. Importa che in essi i giovani apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri né i libri nei quali la geometria è mescolata con l'aritmetica e con l'algebra; l'Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini».

E' appunto dopo la metà dell'800, in seguito all'influenza della Scuola italiana, che si ebbe una fioritura di testi che si differenziavano sostanzialmente dagli stranieri per la trattazione esclusivamente geometrica e per la preminente preoccupazione del rigore logico.

\* \* \*

Il corso di geometria intuitiva viene così, anche oggi, ad essere seguito da un corso di geometria razionale il cui scopo fondamentale è quello di formare i giovani alla struttura ipotetico-deduttiva.

Si presenta allora al professore del corso superiore un problema di carattere pedagogico: mentre era semplice far comprendere ai ragazzi la potenza di un procedimento algebrico o di uno geometrico che avrebbero sostituito le dimostrazioni sperimentali del corso inferiore, non è facile far loro capire il significato della geometria razionale nei confronti con l'intuitiva. D'altra parte, non si deve mai — a me sembra — cominciare un corso senza dare un'idea dei principi che l'informano; non dobbiamo chiuder gli occhi agli allievi e dir loro «seguitemi, abbiate fiducia in me; vi porterò in un mondo perfetto dove ogni cosa si trova a suo posto. Capirete dopo il perché di questo ordine...; la fede verrà».

No, i ragazzi non amano la perfezione, e soprattutto non vogliono essere condotti a occhi chiusi. «Vediamo nel libro — vi dicono — le stesse figure che c'erano nel testo del corso inferiore; vediamo le stesse proprietà. Il corso di geometria razionale è dunque una ripetizione, è un ampliamento del corso precedente?».

Occorre dare delle spiegazioni; occorre parlare di metodi anche agli stessi ragazzi. S'interessarono moltissimo.

Facciamoli riflettere sull'insegnamento di altre materie, per esempio della storia. Prendiamo un argomento: la storia del Risorgimento italiano. Gli allievi ne hanno sentito parlare già alle scuole elementari: allora, se ne erano lumeggiate alcune figure (Mazzini, Garibaldi) più che i fatti. Lo stesso argomento è stato ripreso nella scuola media dove se ne sono studiate le cause politiche e dove il Risorgimento è stato trattato da un punto di vista prettamente italiano, con pochi riferimenti alle nazioni estere. Il tema è ancora una volta ripreso nei corsi superiori su più larga base: se ne considerano ora le cause economiche, sociali, ecc., e il Risorgimento appare come un fenomeno inquadrato nella storia d'Europa.

In questo consiste il *metodo ciclico* d'insegnamento: si tratta di un allargamento, di una ripresa del tema.

Metodi pure ciclici si hanno nei riguardi dell'insegnamento di altre materie, come la geografia, l'italiano.

Anche per la geometria si dice che il metodo d'insegnamento è ciclico; ma forse il termine non è esatto: non si tratta di un allargamento del tema.

Per far capire agli allievi in cosa consista la differenza fra il corso di geometria razionale e quello intuitivo (1) si può portare un esempio del tutto al di fuori dell'insegnamento della matematica, e che — mi sembra — può far cogliere lo spirito delle strade opposte che si seguono nei due corsi: l'esempio che porto è quello degli scavi archeologici e degli studi ad essi relativi.

L'opera dell'archeologo si divide in due tempi: in un primo tempo si procede all'escavazione, alla rimozione della terra in una certa regione dove si presume siano vissute determinate civiltà, e il più delle volte si tratta non di una ma di più civiltà che sono fiorite in una zona in epoche diverse; l'archeologo procede dunque dall'alto al basso, dagli strati superiori ai più profondi, da epoche più recenti a quelle più lontane. Ma l'opera dell'archeologo non termina col portare alla luce costruzioni e documenti di antiche civiltà: comincia, dopo il lavoro dello scavo e l'entusiasmo della scoperta, un lavoro più astratto e più profondo: è l'opera di sistemazione storica, di collegamento fra civiltà e civiltà, è una ricostruzione dalle basi, su su, fino alle più recenti tracce umane. Lo studioso non passa ora da civiltà più vicine a quelle più antiche, ma segue il cammino contrario: ricostruisce.

Come l'opera dell'archeologo si svolge in due tempi, che seguono vie opposte, così in geometria, dopo il lavoro di scoperta che corrisponde allo studio intuitivo (dove si passa dalla necessità di costruzione delle figure alla scoperta delle loro proprietà, dove, dal problema essenziale del calcolo dell'area di un campo poligonale si è spontaneamente portati alla teoria dell'uguaglianza e alla similitudine), comincia il ripensamento delle scoperte fatte e un lavoro di ricostru-

(1) Per il senso che io attribuisco al corso di geometria intuitiva si può vedere l'articolo: E. Castelnuovo «Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva» in *Periodico di Matematiche*, dicembre 1946; e il libro: E. Castelnuovo «Geometria intuitiva», Casa Editrice La Nuova Italia, Firenze, III<sup>a</sup> Edizione, 1959.

zione della teoria a partire dagli elementi più semplici che costituiscono le figure. Il punto, la retta, il piano saranno ora per noi quello che per l'archeologo erano i resti e gli oggetti che aveva trovato nello strato più profondo; è un lavoro di collegamento fra teorema e teorema che dobbiamo fare, una sistemazione delle varie proprietà in modo che ciascuna proprietà avrà senso di esistere solo in quanto si trova dopo una data e prima di un'altra; proprio come, in una catena, un anello fa parte di questa solo in quanto è collegato a quelli che lo precedono e a quelli che lo seguono.

Ora, lo studio della geometria inteso in questo senso, cioè il valore assiomatico di questo studio, verrà messo tanto più in rilievo quanto più si farà sentire lo stacco dallo studio intuitivo, presentando i due corsi come altrettanto essenziali perché il secondo non avrebbe ragione di esistere se gli enti di cui si parla non avessero la loro origine e le loro radici approfondite in quelle esperienze concrete e in quelle costruzioni di carattere tangibile che formavano lo studio precedente. Non vogliamo che lo studio della geometria razionale porti il ragazzo a sottovalutare l'importanza del corso di geometria intuitiva, perché, come scriveva alcuni anni orsono il matematico francese Jean Louis Destouches a proposito della costruzione della scienza, «cominciare un'opera scientifica dalla parte assiomatica è come scrivere un'opera di cui manca il primo volume». «Il primo volume» non deve essere dimenticato, e sarà oltremodo suggestivo per il ragazzo scoprire il mondo delle stesse figure e delle stesse proprietà seguendo un altro cammino.

Ora, quello che è estremamente interessante da un punto di vista psicologico è che il ragazzo di 14-15 anni non sentirà l'inutilità delle proprietà evidenti per i sensi (proprietà che costituiscono la maggior parte del corso), ma anzi si appassionerà al gioco del ragionamento rigoroso perché «la corda della logica» è stata toccata proprio nel «periodo sensibile» (per usare un'espressione della Montessori), ed è quindi entrata subito «in risonanza». E' infatti proprio verso i 14-15 anni, come ha constatato Jean Piaget, che il ragazzo elabora a poco a poco un meccanismo formale fondato su strutture logiche.

Riprendiamo l'esempio degli anelli della catena, modello della costruzione logica della geometria: ogni anello segue dal precedente; c'è un primo anello e questo è collegato a un gancio. Ma — e qui è il punto fondamentale su cui durante il corso si attirerà l'attenzione degli allievi — il gancio a cui è attaccato il primo anello può cambiare, cioè i postulati su cui abbiamo costruito tutta la nostra geometria possono cambiare, sono a nostro arbitrio, possiamo costruire non una sola ma tante geometrie: la scienza è una nostra costruzione, la verità è dunque relativa. Quale fascino esercita questa affermazione che può, anche a metà anno della prima classe del corso superiore essere afferrata dalla maggior parte della scolaresca quando si porti l'esempio di una geometria non euclidea come quella costruita sulla sfera, non riesce ad immaginarlo chi è lontano dallo insegnamento ad allievi di quell'età. E' un cenno, una sola lezione, ma che rimane impressa per tutto il corso degli studi, e che sarà fonte di ripensamenti, di domande, di dubbi.

Noi seguiamo una delle tante geometrie, tutte ugualmente vere; quale? Quella che ci permette di tanto in tanto di rituffarci nel concreto per controllare la veridicità delle scoperte fatte e delle proprietà trovate, quella che dal concreto, dalla realtà tangibile, dalla natura delle cose, prenderà continua ispirazione per astrarre. Perché, se da una parte è vero che l'insegnamento della geometria deve divenire sempre più astratto, d'altra parte è altrettanto vero che questo «astratto» non deve cadere dal cielo; il concreto non deve mai essere abbandonato. Ed è per questa ragione che ritengo non sarebbe assolutamente indicato svolgere in questo biennio un'assiomatica astratta tipo Hilbert, o introdurre i concetti delle matematiche moderne. Non si deve — secondo me — dire ai ragazzi a questa età «pensate a tre sistemi differenti di oggetti che possono anche essere punti, rette, piani; fra questi valgono le seguenti relazioni...». No, il concreto è necessario che sia ancora lì presente: su di esso poggia l'occhio perché il pensiero trovi un sostegno visivo.

Vorrei ancora sottolineare due punti che mi sembrano fondamentali in un insegnamento di geometria razionale:

I°) Una volta scelta la linea da seguire (e poco importa quale essa sia: ai fini della formazione logica del ragazzo non ha importanza, ad esempio, mettere

a base della teoria dell'uguaglianza la nozione di movimento in tutta la sua generalità ovvero assumere come primitiva la nozione di segmenti uguali), non abbandonarla mai, sostituendo una dimostrazione con un'altra. La questione essenziale da mettere in risalto il più spesso possibile è la linea, la strutturazione del corso; e, per vedere la linea, la via che si deve seguire, non dobbiamo intralciare questo cammino con altri cammini. E pochi devono essere i teoremi su cui fermare l'attenzione: con un gran numero di lemmi, di corollari e di sottocorollari rischiamo di far perdere al ragazzo la visione della strada da percorrere.

II°) Far notare che la maggior parte dei teoremi è importante come anelli della catena e non in sé. Che solo due sono i teoremi che rivelano il genio dello scopritore, e cioè il Teorema di Pitagora e quello sulla somma degli angoli del triangolo, teoremi che Enriques chiamava «i due fuochi della geometria elementare». Mettiamo bene a raffronto i due tipi di teoremi: quelli che sono importanti solo come anelli e questi due; si metterà così in risalto il diverso genere d'intelligenza dello scienziato, e la geometria razionale, spesso fredda, acquisterà anch'essa un senso umano.

\* \* \*

Come il corso di geometria dei primi due anni successivi alla media non ha senso — abbiamo visto — se non lo si confronta col corso di geometria intuitiva che lo precede, così, anche, non possiamo comprenderne a fondo il significato, se non lo vediamo vicino al corso successivo, se non riflettiamo a qualcosa che manca a questo corso, qualche cosa che lo rende incompleto e che ci obbliga ad andare ancora avanti. Riflettiamo un momento: le figure presentate in questo corso sono, da un certo punto di vista, meno complete di quanto non fossero quelle del corso intuitivo; manca ad esse la mobilità, sono figure fisse, rigide, sono le figure euclidee. Ma, a questo stadio di cultura matematica del ragazzo, non può essere altrimenti: infatti le figure, non essendo materialmente realizzate, o sono disegnate o sono pensate; ora, il disegno è evidentemente rigido, e, col pensiero, il ragazzo non è ancora in grado di cogliere la mobilità di una figura perché questa risulta solo dalla conoscenza di relazioni analitiche fra gli elementi della figura stessa, cioè di quelle relazioni fra algebra e geometria che costituiscono il concetto di funzione. Le quali relazioni dovrebbero essere studiate negli anni successivi quando ci si muoverà in un mondo di enti geometrici ancor più astratto, dove le figure assumeranno, dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili e quindi del punto senza dimensioni, un aspetto ancora una volta diverso, un aspetto etereo.

In conclusione, le figure della geometria intuitiva, le cui variazioni venivano considerate da un punto di vista qualitativo, erano state fermate nel biennio successivo alla media allo scopo di collegarle fra loro in un sistema ipotetico-deduttivo e di studiarne i particolari; ora le figure dovranno riprendere la loro mobilità che sarà studiata da un punto di vista quantitativo, e, venute a far parte di un nuovo mondo, quello grandioso dell'unificazione analitica e dello inquadramento strutturale, risplenderanno della luce data dai precedenti stadi.

Non posso terminare senza far osservare come queste diverse fasi d'insegnamento della geometria corrispondano, in maniera molto significativa, ai grandi periodi dello sviluppo matematico: la matematica pre-greca che è matematica di scoperta, il momento greco con la strutturazione logica e lo studio dei particolari nelle sue figure assolutamente rigide, le matematiche del Rinascimento dove, nei nuovi campi e metodi d'indagine, sembrano fondersi in maniera sublime lo spirito sintetico di ricerca e quello analitico del dettaglio, e infine le cosiddette matematiche moderne che con la loro potenza unificatrice riescono a rendere uguali le più disparate teorie. E' con l'augurio che un giorno questi ultimi periodi dello sviluppo matematico abbiano anch'essi una vita in tutte le aule scolastiche delle ultime classi dei corsi superiori e che, dalla vita di questi, acquisti piena luce il corso precedente, che termino la mia relazione.