1

31 gennaio 1962

i:

iu

scuola e città

LA NUOVA ITALIA - FIRENZE

PROSPETTIVE NUOVE PER UNA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Fra le molte accuse che si fanno alla scuola italiana 1e è una che di tanto in tanto riaffiora ufficialmente fino a 1dere posto nelle colonne dei giornali quotidiani, e che, inche non assume un carattere di pubblicità, resta in .1no di noi sopita ma sempre viva: l'accusa all'insegna- to della matematica.

È ormai passato il tempo in cui la persona colta in campi, il grande avvocato, il letterato, e persino il me- di fama, dichiaravano, quasi vantandosene, di non aver capito nulla di matematica, facendo intendere cosí che iteva benissimo essere un grande uomo, una vera per- lità, senza sapere dei numeri e delle figure. A questo giamento di 'sfida' contro il matematico aveva con- la filosofia gentiliana col sostenere appunto la cultura rattere umanistico-letterario contro una cultura scienti- tecnica, non volendo riconoscere che anche questa po- issumere un valore altamente umanistico.

Ma — abbiamo detto — i tempi sono cambiati: il gio- che lascia oggi la scuola secondaria e che non prosegue idi in una facoltà scientifica, avverte quali enormi la- gli abbia lasciato lo studio della matematica seguito nti anni; e il grande letterato, l'avvocato, il pubbli- sentono con rammarico che tutto un mondo è a loro so, e che questo mondo, quello della scienza e della , dovrebbe essere, d'altra parte, patrimonio di tutti. i ha frequentato solo il corso secondario inferiore, e massa della popolazione, non ha della matematica che rdo vago e poco piacevole, come di uno studio sem- itano dalla realtà, una matematica che mai è venuta gno nell'impiego e nella carriera, anche modesta, vita ha loro offerto.

no tutte queste persone, e cioè la grande maggio- lella nostra società, che accusano la scuola di aver i'istruzione insufficiente, inadeguata ai tempi, una ne che non solo non è stata utile nella vita del ma che — e questo è ancor piú triste — non : loro di godere, nemmeno in modo superficiale, andiose scoperte scientifiche e tecniche; è questa che accusa i p r o f e s s o r i, i m e t o d i, i a m m i.

remmo ora esaminare con serenità queste accuse oci, in modo particolare, alla scuola secondaria ; da un esame critico trarremo suggerimenti co- struttivi che ci introdurranno nel mondo scientifico della didattica matematica e ci faranno intravedere, sia pure di sfuggita, le nuove interessanti prospettive che si offrono allo studioso.

Cominciamo dalla questione piú scottante: i p r o- f e s s o r i.

Mettiamoci dal loro punto di vista e sentiamo come risponderebbero all'accusa gli insegnanti. Alcuni vi porte- rebbero come prova del buon successo dei loro metodi il fatto che la matematica è sempre la stessa e che sempre è stata insegnata cosí; e vi farebbero notare che dalle nostre scuole sono uscite generazioni di allievi che hanno raggiunto posizioni altissime nella scienza e nella tecnica. Vi direbbero perciò che non c'è nessuno scopo di cam- biare e che non vedono perché della questione si debba fare « tanto baccano ». Che se poi è alta, come è vero, la percentuale degli alunni rimandati in matematica, se le famiglie fanno un dramma per ogni compito, se i padri, stanchi del loro lavoro, devono la sera discervellarsi per la risoluzione di un problema di aritmetica o di geometria ed essere costretti a telefonare agli amici per qualche con- siglio, tutto questo è colpa dei giovani che non sono piú come un tempo, ma si mostrano svogliati, disattenti, poco portati a una scienza astratta.

Altri insegnanti vi direbbero invece che, da qualche anno, avendo avvertito un cambiamento nella società sco- lastica, hanno un po' alleggerito il loro corso facendo meno teoria e piú pratica, ed hanno cosí cercato e cercano di avvicinarsi allo spirito della scuola attiva.

Ma questa parola 'attivismo' è molto pericolosa, e, qualche volta, finisce per essere usata ed applicata a spro- posito; non è attivismo, per esempio, il far esercitare i ragazzi sulle impalcature di colossali espressioni aritmetiche o portare l'attenzione del bambino su delle figure geome- triche variamente colorate! E, del resto, anche questi pro- fessori si lamentano, come gli altri, della decadenza intellet- tuale dell'ambiente scolastico, perché, anche coi loro me- todi, non sono riusciti a render piú facile l'apprendimento della matematica.

Abbiamo voluto prendere due gruppi di professori che rispecchiano due diverse tendenze; gli uni e gli altri si trovano d'accordo sul punto « ambiente scolastico e de- cadenza intellettuale ».

Non vogliamo dare giudizi e dichiararci partigiani di questi o di quelli o di nessuno dei due; a una conclusione potremo arrivare dopo aver esaminato le altre accuse: i metodi e i programmi.

Parliamo ora dei metodi.

Abbiamo ancora nell'orecchio quanto ci diceva un gruppo di professori: « La matematica è sempre stata insegnata cosí; perché cambiare? se si spiega chiaramente un concetto, se ne diamo una definizione esatta — ripeto quanto si dice —, se insistiamo fino a che i ragazzi la ripetano bene, il concetto stesso sarà evidentemente chiaro ».

Io mi permetto di portarvi due esempi, l'uno tratto dal campo della geometria e l'altro da quello dell'aritmetica, che penso possano essere piú espliciti di tante parole.

Ed ecco un esempio geometrico: chi è che non sa che cosa è un quadrato?

Fin dai primi anni d'età i bimbi giocano coi cubi, e si fanno un'idea delle facce quadrate; e poi mille altre esperienze fanno sí che per loro questa è la figura piú naturale, piú semplice, direi piú simpatica. Ma se l'insegnante entra in classe dicendo: « oggi parleremo del quadrato » e dà la definizione: « quadrato è quel parallelogramma che ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali », gli sguardi dei ragazzi si spengono o sono attirati dalla mosca che svolazza o rivolti ai francobolli che il compagno ha portato da casa. Non ci si deve poi meravigliare se, anche nel ripetere la definizione di una figura cosí nota, il ragazzo si sbaglia e mentre parla non ha davanti agli occhi né quadrati, né parallelogrammi.

Immaginate — permettetemi il confronto — che il professore di scienze naturali voglia parlare del gatto, di un animale cioè che tutti i bambini conoscono. Se il professore entra in classe dicendo: « oggi parleremo del gatto », tutti gli occhi si ravvivano, tutti gli orecchi sono tesi; ma questi stimoli, queste sollecitazioni che ha suscitato una parola si calmano e si spengono davanti alla definizione: « dico gatto un componente dalla famiglia dei felini, appartenente al genere... ». È esatta la definizione, fuori dubbio, ma quale freddezza in quelle parole, come è lontana dall'idea concreta, da quel soriano che li aspetta ogni mattina all'angolo della strada, da quel bianco e nero che sembra esser stato dipinto dal genio della simmetria! Se invece l'insegnante fa vedere, sia pure in fotografia o in un film, oltre al gatto, il leone, la tigre, la lince, se fa cogliere i caratteri che variano nel passaggio da un felino all'altro e i caratteri invece che si mantengono costanti, se fa capire le incertezze e le varie possibilità che si sono presentate nella costruzione di famiglie di animali simili, tutto un nuovo mondo si apre agli occhi e al pensiero del bambino: è la costruzione, la sistemazione di una scienza, come la zoologia. Problemi di classificazione e quindi problemi di definizione appariranno ora non come frasi dommatiche ma come opera dell'uomo e quindi soggetti a cambiamenti e a perfezionamenti.

Anche lui, il nostro quadrato, può nascere cosí, come un caso particolare di una grande famiglia: basterà far costruire un quadrato con delle striscioline di cartone, collegabili agli estremi con dei ferma-campioni, o, ancor meglio, con delle strisce del meccano collegate con viti e dadi. Il quadrato che il bambino ha costruito è articolabile e si trasforma in rombo: il quadrato appartiene dunque alla famiglia dei rombi, è un rombo particolare. Una quantità di problemi sorgono al bambino stesso osservando le trasformazioni di queste figure: quali elementi rimangono costanti e quali variano nella trasformazione? Sempre con strisce di questo tipo si potrà costruire un rettangolo, e la costruzione stessa metterà in evidenza che il rettangolo fa parte della famiglia dei parallelogrammi; e, anche qui, analoghi problemi.

Ecco come, da queste esperienze concrete, il ragazzo sarà condotto da se stesso a fare una classificazione e quindi a dare una definizione dell'uno o dell'altro quadrilatero. Si accorgerà cosí, fin dall'inizio, che la matematica non s'impone, che le definizioni non cadono dal cielo, ma che è l'umanità che le costruisce. Questo esempio mette in evidenza su un argomento molto elementare le possibilità didattiche che offre un metodo costruttivo, cioè attivo nel senso pestalozziano della parola, nei confronti del metodo descrittivo. È con un metodo attivo che si ' umanizza ' la scienza.

Vorrei ora portarvi un esempio tratto dal campo dei numeri; voglio parlare dello studio delle frazioni. Ogni professore di matematica sa che questo argomento, il cui studio viene iniziato nella prima classe, riesce particolarmente difficile, e che gli errori, sempre i soliti errori, si trascinano per tutto il triennio e oltre.

Si è sempre cercato perciò, anche nei testi scolastici, di dedicare la massima cura a questo studio. Ricordo che nei libri d'aritmetica di qualche decina di anni fa, dopo aver dato al piú un esempio, si presentava la seguente definizione: « Dicesi frazione il simbolo m/n con cui si esprime che una grandezza è stata divisa in n parti uguali e che si sono riunite m di queste parti »; oppure: « si chiama frazione la coppia di numeri che serve per rappresentare l'insieme di piú unità frazionarie »; definizioni, l'una e l'altra, ineccepibili dal punto di vista matematico, ma, certamente, molto lontane dalla psicologia del fanciullo.

Da qualche anno, vedendo che la definizione era imparata a memoria senza rendersi conto né del valore delle parole né di quello del concetto, si nota una netta tendenza a introdurre la frazione con esempi pratici e, in generale, da un punto di vista operatorio; si fa vedere, ad esempio, che 3/4 vuol dire dividere una grandezza in 4 parti uguali e prendere 3 di queste parti, senza insistere troppo sulla definizione. Ma, molto spesso, si ritiene che qualche esempio, dato all'inizio di questo studio, illustri il concetto in tutta la sua essenza; si lascia perciò quasi subito d'insistere sul concetto per passare alle operazioni sulle frazioni, a quelle espressioni tristemente famose che sono una vergogna non solo del nostro insegnamento ma anche di quello di altri paesi. Queste impalcature di numeri su cui i nostri ragazzi fanno le acrobazie non illuminano certo il concetto di frazione ma hanno come unico scopo quello di condurre a un inutile quanto dannoso tecnicismo; che se poi, alla fine di uno di questi calcoli, si osa domandare a un allievo se il risultato ottenuto, sia per esempio la frazione 2/3, è maggiore o minore di 1/2, saremo certi di non avere risposta. L'esercizio è valso solo a far muovere delle pedine in un certo ordine e secondo certe regole.

Ma perché — ci si chiede — il bambino ha tante difficoltà per il concetto di frazione? Perché, se la stessa nozione viene insegnata ad una persona adulta che non abbia mai studiato, questa entra subito nel concetto? Una analisi del problema, fuori dubbio di grande interesse, mi porterebbe lontano e richiederebbe molto tempo. Mi basti dire che l'apprendimento di questo concetto ha una base psicologica ed ha bisogno della formazione di certe strutture mentali, proprio come, nei primissimi anni d'età, il concetto di numero intero si limita all'1 o al 2, non potendosi avere la nozione di 3 e del numero in generale fino a che non si sono formate nel bambino delle date strutture mentali. Il problema dell'insegnamento delle frazioni richiede dunque da parte dell'insegnante degli studi di psicologia; ed è solo in tal modo che si può 'umanizzare' una scienza.

E, infine, parliamo dei programmi.

« La matematica è sempre la stessa — ci diceva un gruppo di professori —; perché cambiare? ».

In effetti, molto nei programmi non è stato cambiato, ormai da decine di anni. Basta pensare che i programmi di aritmetica e di geometria, piú o meno sempre gli stessi da mezzo secolo, rispecchiano la matematica dell'epoca greca.

Ma la storia non si è arrestata al periodo greco; una storia di guerre ma anche una storia dello sviluppo della società e della cultura. E, per quanto riguarda la matematica, si sono verificati nel Rinascimento degli avvenimenti colossali che hanno sconvolto problemi e ricerche; parlo della creazione del calcolo infinitesimale e della geometria analitica, dove i nuovi metodi d'indagine sembrano fondere in maniera meravigliosa la sintesi e l'analisi.

La matematica è cambiata dal '600, ma non si è voluto che in molti ordini di scuole entrasse questo nuovo spirito di ricerca quasi a voler concentrare il pensiero del ragazzo su una matematica, come è la greca, dove regnano l'ordine e l'armonia; una matematica che non dà turbamenti né presenta incertezze, una matematica statica, pura e perfetta come l'arte di quel popolo.

Ma i tempi sono cambiati, e, se anche negli ultimi programmi non si è ritenuto opportuno accennare alle applicazioni pratiche piú semplici dei metodi analitici, noi possiamo, valendoci della libertà di cui si gode nel nostro insegnamento, introdurre gli allievi nello studio dei diagrammi perché non rimangano sbalorditi davanti a un grafico che mostra l'aumento della popolazione italiana o la diminuzione della tubercolosi.

L'idea che un numero è molto spesso legato a un altro numero, che ogni fatto dipende da un altro fatto, ogni fenomeno da un altro fenomeno, in breve, l'idea di funzione, è fondamentale non solo nel corso di matematica, ma in ogni campo della scienza, dell'economia, della vita sociale. E i nostri ragazzi non devono rimanere estranei a quel mondo addirittura affascinante che è il mondo del 'variabile'.

Ma la discussione sui programmi di matematica che si agita oggi in tutte le nazioni non riguarda questo punto, perché un professore con delle serie basi culturali riesce a portare ai suoi bambinetti di 11 anni lo spirito e l'essenza delle teorie analitiche nate nel '600.

Il problema, oggi, è un altro: è accaduto, ancora una volta, che la matematica è cambiata, e ciò si è verificato in questi ultimi anni.

È cambiata non perché si sia scoperta qualche nuova, fondamentale, proprietà di questo o quell'ente o qualche nuova teoria, ma perché si è rivolta l'attenzione non piú all'ente o alla teoria in se stessa (come potrebbe essere una curva, una superficie, una teoria su un tipo di numeri o di equazioni), ma alle proprietà comuni che appartengono a enti diversi o a teorie diverse.

Cercherò di spiegarmi con un esempio: pensate all'insieme dei numeri interi; in esso sono contenuti due sotto-insiemi: i numeri pari e i numeri dispari. Operiamo su questi numeri con l'addizione e con la moltiplicazione; otterremo sempre dei numeri interi e avremo:

pari + pari = pari		pari · pari = pari
pari + dispari = dispari	e	pari · dispari = pari
dispari + pari = dispari		dispari · pari = pari
dispari + dispari = pari		dispari · dispari = dispari

E ora, consideriamo attentamente queste 'strutture'. Le regole della somma dei numeri pari e dispari assomigliano molto a certe regole grammaticali relative alle proposizioni affermative e negative. Se si immagina che 'pari' corrisponda a 'sí' (proposizione affermativa) e che 'dispari' corrisponda a 'no' (proposizione negativa) ci si accorge che le regole sulla somma di quei numeri corrispondono a quelle di composizione di proposizioni affermative e negative, come può vedersi nell'esempio seguente:

io voglio che tu vada = sí, devi andare
io voglio che tu non vada = no, non devi andare
io non voglio che tu vada = no, non devi andare
io non voglio che tu non vada = sí, devi andare.

Si dice che la struttura della somma dei numeri pari e dispari è uguale alla struttura del sí e del no in casi come quello ora considerato.

Anche per il prodotto dei numeri pari e dispari si possono trovare delle suggestive analogie. Immaginiamo, per esempio, di considerare un miscuglio di acqua colorata e di acqua comune; potranno presentarsi le seguenti combinazioni:

acqua colorata e acqua colorata = acqua colorata
acqua colorata e acqua = acqua colorata
acqua e acqua colorata = acqua colorata
acqua e acqua = acqua.

Si vede subito che questo schema assomiglia molto a quello del prodotto dei numeri pari e dispari: basta sostituire al termine 'pari' la parola 'acqua colorata' e al termine 'dispari' la parola 'acqua' per passare dall'uno all'altro schema.

Si dice che la struttura del prodotto dei numeri pari e dispari è uguale alla struttura di certe possibilità di miscugli.

Ho portato degli esempi banali, di carattere qualitativo, e fuori del campo della matematica, ma sono convinta che anche un solo esempio può far comprendere lo spirito di queste nuove ricerche; si capisce che se due sistemi di enti hanno la stessa struttura, le proprietà dell'uno saranno valide anche per l'altro, e una scoperta fatta per l'uno sarà una scoperta anche per l'altro. In tal modo le teorie piú diverse, piú lontane, vengono unificate; e può accadere che una teoria riconosciuta valida in campo astratto abbia dei riflessi in campo concreto, ove i simboli siano interpretati in maniera diversa, e dia luogo cosí alla scoperta di brillanti applicazioni tecniche. Il mondo della tecnica, di cui anche il bimbo sente parlare alla radio e alla televisione, e che vede realizzato nei robot meccanici e nelle tartarughe sensibili alle eccitazioni luminose, quel mondo che domina la vita dei nostri giorni dalle segnalazioni luminose alle macchine calcolatrici elettroniche, e che si riassume nella parola 'automatismo', trova le radici nelle piú astratte e recenti teorie matematiche, in quelle che oggi si chiamano le 'matematiche moderne'.

Ora, queste conquiste tecniche resteranno misteriose e sapranno del sovrumano se noi non diamo una base, un'idea, sia pur vaga, delle teorie matematiche da cui dipendono. D'altra parte, le teorie matematiche a cui devono la loro vita sono aride e astratte e appaiono stranamente lontane dalla realtà.

« Dobbiamo introdurre nella scuola le matematiche moderne? ». Questo è il tema di discussione che hanno aperto vari paesi, in particolare la Francia e il Belgio, cinque o sei anni fa. Allora, molte nazioni e molti grandi matematici risposero che tale introduzione nella scuola sarebbe stata una vera pazzia. Ma i tempi cambiano rapidamente, e sembra che la risposta negativa, oggi, non possa piú essere sostenuta. Sí, dobbiamo: lo dobbiamo se si vuole che la tecnica non appaia come un qualcosa di magico e quindi non opera dell'uomo; lo dobbiamo se si vuole che tutta l'umanità possa portare un contributo, sia pur modesto, alla costruzione della scienza.

Ed è la scuola che deve, ancora una volta, 'umanizzare' la scienza.

Ecco il compito, terribilmente difficile, ma forse il piú bello che mai si sia presentato all'insegnante di matematica, che ha oggi chi si occupa di didattica.

Emma Castelnuovo