GIORNALE

DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

Volume XXII. - 1884.

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra 20.
1884.

LE FUNZIONI ALGEBRICHE STUDIATE GEOMETRICAMENTE.

Nota del

Dott. ORESTE TOGNOLI.

Gli argomenti trattati in questo lavoro sono di vecchia data, perchè si leggono in una Memoria, che anni sono veniva pubblicata per le cure dei sigg. Brill e Nöther, nel Vol. VII dei *Mathematische Annalen*.

Quando lessi questa Memoria, pure ammirandone la bellezza e l'importanza dei risultamenti, non mi parve che tutto vi fosse esposto in modo abbastanza semplice, e specialmente colla migliore delle chiarezze possibili; e fin d'allora presi alcuni appunti, coll'intenzione di ricostruire la Memoria stessa con diversa tessitura.

E ora pubblico qui questo lavoro, che ho ricavato da tali appunti. In esso, lo ripeto, tratto argomenti altrui, ma non seguo nel trattarli il metodo d'altri; e il lettore se ne potrà subito persuadere, quando avrà confrontato la citata Memoria de' due chiari autori tedeschi, con questo medesimo mio lavoro.

INTRODUZIONE.

Sia:

(1) $$f(x, y) = 0$$

l'equazione in coordinate cartesiane ortogonali di una curva piana dell'ordine n; e si conduca nel piano di questa curva, e pel punto (α, β) di essa, una retta arbitraria, la cui equazione sia la:

(2) $$a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0.$$

I punti nei quali questa retta sega la curva f, sono determinati dalle radici dell'equazione:

(3) $$\varphi(x) \equiv f\left(x, -\frac{a}{b}(x-\alpha)+\beta\right) = 0.$$

Ora, se per $x=\alpha$, oltre la φ si annullerà ciascuna delle funzioni: $\varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots, \varphi^{(\mu-1)}$, per le quali si ha $\varphi^{(s)} = \frac{d^s\varphi}{dx^s}$, il punto (α, β) sarà μ^{uplo} sulla curva f. In questa ipotesi le coordinate del punto (α, β), dovranno verificare l'equazioni del sistema:

(4) $$\left\{\begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial^{\mu-1} f(x, y)}{\partial x^{\mu-1}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{\mu-1} f(x, y)}{\partial x^{\mu-2} \partial y} = 0 , \ldots , \frac{\partial^{\mu-1} f(x, y)}{\partial y^{\mu-1}} = 0 , \end{array}\right.$$

composto di $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ equazioni. Di qui si deduce, che se la curva f ha nel punto (α, β) un punto μ^{uplo}, fra i coefficienti della sua equazione dovranno verificarsi, in generale, $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ equazioni lineari distinte. L'equazione:

$$\frac{\partial^\mu f(x, y)}{\partial x^\mu} + \mu \frac{\partial^\mu f(x, y)}{\partial x^{\mu-1} \partial y} \frac{dy}{dx} + \ldots\ldots + \frac{\partial^\mu f(x, y)}{\partial y^\mu} \left(\frac{dy}{dx}\right)^\mu = 0$$

determina i coefficienti angolari delle tangenti ai μ rami della curva f, che passano pel punto (α, β). Un simile punto, nel computo del numero dei punti doppi che può avere la detta curva, va dunque calcolato per $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ di tali punti.

Osservazione. Per ogni punto (x,y) della curva f, si determini un punto (ξ,ζ), le cui coordinate, rispetto agli assi ai quali è riferita la f, sian date dalle proporzioni:

$$x : 1 = 1 : \xi \quad , \quad y : 1 = 1 : \zeta.$$

Così si trasformerà la f in una curva F del medesimo ordine, e i punti della f, F si corrisponderanno in modo univoco.

Ora, perchè si può sempre supporre che i punti multipli della f non giacciano sopra alcuno degli assi di riferimento, ne risulta che la F non avrà punti multipli all'infinito; e però, nelle successive ricerche, potremo sempre ammettere che la curva che vi sarà considerata, non abbia alcuno di tali punti all'infinito.

Abbia ora la f: α_1 punti doppi, α_2 tripli, ecc., α_{i-1} i^{upli}. Il numero dei punti doppi della f (denotato con k), sarà espresso dall'uguaglianza:

$$k = \sum_{\mu=1}^{\mu=i-1} \alpha_\mu \frac{1}{2} \mu(\mu+1), \tag{5}$$

e il genere p della curva stessa dall'altra:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - k; \tag{6}$$

e questo p, *secondo quanto precede, avrà un valore indipendente* dall'essere due (o più) delle tangenti in uno dei punti multipli della f, riunite in una stessa retta.

Sia f_1 una curva algebrica piana dell'ordine m, assoggettata a passare per ciascuno dei punti multipli della f tante volte, quante unità sono nel grado di moltiplicità del punto multiplo meno una. Se la f_1, nei punti multipli della f soddisfa alla sola condizione qui indicata, le daremo il nome di *curva aggiunta* alla f, o semplicemente quello di *curva aggiunta*.

La f_1 sarà sottoposta, in generale, a $\sum_{\mu=1}^{\mu=i-1} \alpha_\mu \frac{1}{2} \mu(\mu+1)$ condizioni lineari distinte; ed avrà in comune $\sum_{\mu=1}^{\mu=i-1} \alpha_\mu \cdot \mu(\mu+1)$ punti colla f, nei punti multipli di questa curva.

Una curva algebrica nel piano della f sarà una curva aggiunta, purchè ad essa convenga la definizione data riguardo alla f_1. Tali curve aggiunte saranno considerate in seguito in modo particolare.

I.

Teorema dei resti.

Sulla curva f si suppongano dati due gruppi di punti G_R, G_Q, il primo dei quali ne contenga R, e il secondo Q. Se una curva aggiunta, oltre nei punti multipli, sega la f in $R+Q$ punti, che coincidono con quelli dei gruppi G_R, G_Q, diremo che uno di questi gruppi è *residuo* dell'altro.

Immaginando sulla f più gruppi: G_R, $G_{R'}$, $G_{R''}$, ecc., di R, R', R'', ecc. punti; se ciascuno di questi gruppi sarà residuo rispetto ad un medesimo gruppo di Q punti della f, chiameremo *corresidui* i gruppi G_R, $G_{R'}$, $G_{R''}$, ecc.

Se f_1 è una curva aggiunta dell'ordine m, essa soddisferà in generale a k condizioni lineari distinte, k essendo il numero definito dall'uguaglianza (5) (Introd); e quindi per determinare questa curva occorreranno generalmente $\frac{1}{2}m(m+3)-k$ di tali condizioni. Ora, quando sia $k \geqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, si vedrà subito che l'ordine m della f_1 deve superare il numero $n-3$.

Quando il genere p della curva f sia uguale ad 1, e quindi $k=\frac{1}{2}n(n-3)$, sarà $m \geqq n-3$. Finalmente quando sia $p \geqq 2$, e quindi $k<\frac{1}{2}n(n-3)$, potrà essere il numero $m \gtreqless n-3$. Dunque l'ordine di una curva aggiunta è sempre $>n-3$, se la curva f ha un numero di punti doppi $\geqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; non è $<n-3$, se la curva f è del genere $p=1$, e può essere $\gtreqless n-3$, se la curva f è del genere $p \geqq 2$.

Sieno: G_{R_1}, G_{R_2}, G_{R_3}, ecc. gruppi formati rispettivamente di R_1, R_2, R_3, ecc. punti della curva f, e sia ciascuno di questi gruppi residuo di un medesimo gruppo di Q punti della f. Per una precedente definizione, si avrà:

$$2k + R_s + Q \equiv 0 \pmod{n} \qquad s = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Ora, se uno dei gruppi G_{R_s} (p. e. G_{R_1}) è residuo anche di un gruppo di Q' punti della f, sussisteranno le congruenze:

$$2k + Q + R_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

$$2k + Q' + R_1 \equiv 0 \pmod{n},$$

dalle quali derivano subito le altre:

$$Q \equiv Q' \pmod{n}$$

$$2k + R_{s'} + Q \equiv 2k + R_{s'} + Q' \pmod{n} \qquad (s' = 2, 3, \ldots);$$

e dall'ultima di queste, in virtù della (1), la:

$$2k + R_{s'} + Q' \equiv 0 \pmod{n}.$$

Si può dunque porre:

$$2k + R_{s'} + Q' = z \cdot n,$$

z essendo un numero intero positivo.

Ma per la (6) (Introd.) quest'ultima uguaglianza può scriversi così:

$$R_{s'} + Q' = n(z - n + 3) + 2(p - 1);$$

e però, se è $k \geqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, e quindi $p \leqq 0$, dovendo essere sempre positivo il numero $n(z - n + 3) + 2(p - 1)$, sarà $z > n - 3$.

Una curva aggiunta d'un ordine $> n-3$, restando ferma l'ipotesi fatta sul valore di k, passerà effettivamente per tutti i punti di ciascuno dei gruppi $G_{R_{s'}}$, $G_{Q'}$, perchè per $z > n - 3$, il numero $\frac{1}{2} z(z+3)$ non è mai inferiore a $k + R_{s'} + Q'$, ovvero a $zn - k$.

Se poi è $k < \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, e quindi $p > 0$, si dimostrerà, in modo analogo a quello qui sopra indicato, che per un siffatto valore di k può accadere che si possa prendere $z \gtreqless n - 3$, e che una curva aggiunta, il cui ordine potrà essere $\gtreqless n - 3$, passerà sempre per tutti i punti di ciascuno dei gruppi $G_{R_{s'}}$, $G_{Q'}$; dunque si potrà affermare la verità del teorema:

Se un sistema di gruppi, formati rispettivamente di $R_1, R_2, R_3, \ldots$ *punti della curva* f, *risulta di gruppi residui di un medesimo gruppo di* Q *punti della* f; *e se un gruppo qualunque del sistema è residuo anche di un gruppo di* Q' *punti di questa curva; ogn' altro gruppo del sistema stesso sarà residuo anche di questo gruppo di* Q' *punti.*

Questo teorema, conosciuto col nome di *teorema dei resti*, mostra, che sebbene più gruppi di punti sulla curva f, per essere corresidui debbano essere residui di un medesimo gruppo di punti della f, non è però vero che questo gruppo sia unico; e quindi il concetto di gruppi corresidui, è indipendente dal gruppo particolare, rispetto al quale quelli del sistema sono residui.

II.

Serie di gruppi di punti.

Sia l'equazione:

$$\psi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau) = 0; \tag{1}$$

nella quale ψ esprime un polinomio razionale intero rispetto a ciascuna delle quantità: $x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$, quella che corrisponde ad un'arbitraria curva aggiunta.

Se il polinomio ψ contiene dei termini indipendenti dalle λ, e queste quantità vi rappresentano altrettanti parametri arbitrari, diremo che la (1) è l'equazione di una serie τ volte infinita (∞^τ) di curve aggiunte, l'ordine delle quali è uguale al grado del polinomio ψ, nelle x, y.

La (1) sarà, nei parametri λ, del grado $1, 2, 3, \ldots$, e la serie delle curve aggiunte, da essa rappresentate, si chiamerà rispettivamente *lineare*, *quadratica*, *cubica*, ecc.

I gruppi di punti mobili d'intersezione delle curve (1) colla f, formano su questa curva una serie di gruppi, la quale si dirà *lineare*, *quadratica*, *cubica*, ecc., secondochè le curve (1), formeranno esse stesse una serie lineare, quadratica, cubica, ecc.

Il numero dei parametri λ, contenuti nella (1), si chiamerà il grado d'infinità della qui indicata serie di gruppi, la quale sarà perciò ∞^τ.

In generale, se i punti di una curva algebrica s'immaginano raggruppati Q a Q, e si suppone che tutti questi gruppi soddisfacciano a certe condizioni comuni, si otterrà sulla curva una serie di gruppi di Q punti, la quale sarà determinata, quando sian note queste condizioni.

La determinazione poi di un gruppo di una tal serie dipenderà dalla scelta arbitraria di alcuni punti del gruppo; il quale rimarrà da questi punti fissato, purchè sia nota la serie della quale il gruppo stesso fa parte. Se dunque badiamo solo al numero delle condizioni, si vede che due numeri concorrono alla determinazione di un gruppo; ma è bene osservare, che due tali numeri possono determinare uno o più gruppi di una serie, ovvero la determinazione di un gruppo, mediante questi due numeri, può essere o no univoca. Se essa è univoca, diremo che la serie di gruppi è *lineare*; altrimenti *quadratica*, *cubica* ecc., se le condizioni, il cui numero è la somma dei numeri predetti, fissano due, tre, ecc. gruppi della serie. Si dovranno dunque considerare per questa serie tre numeri, cioè:

a) il numero dei punti di un gruppo;

b) il numero dei punti che si possono prendere ad arbitrio per fissare un gruppo;

c) il numero delle condizioni che determinano la serie di gruppi.

Indicheremo questi numeri rispettivamente con Q, σ, ε.

Detto q il grado d'infinità della serie, sarà evidentemente $\varepsilon + q = \sigma$, donde $\varepsilon = \sigma - q$.

Ogni serie di gruppi di Q punti, per la quale è $\varepsilon = 0$, e però $q = \sigma$, è composta di un numero finito di tali serie, e ciascuna di queste è ∞^σ. Se un tal numero è uguale ad uno, si avrà una serie lineare.

In generale, una serie di gruppi di Q punti, quale è stata ora definita, risulterà di un numero ∞^ε di sistemi di serie lineari, e ciascuna di queste sarà ∞^q $(q = \sigma - \varepsilon)$.

Così, se si considerano quattro punti arbitrari di una curva del 4° ordine, essi formeranno un gruppo di una serie di gruppi di 4 punti. Tutti i gruppi di una tal serie, dovendo giacere sulla curva del 4° ordine, saranno per la serie medesima: $\varepsilon=1$, $Q=4$, $\sigma=4$, e quindi $q=3$. Questa serie risulterà dunque composta di ∞^1 serie lineari di gruppi di 4 punti, e ciascuna di queste sarà ∞^3.

I singoli punti di una curva del 3° ordine formano una serie di gruppi di un punto, per la quale sussistono le uguaglianze: $\varepsilon=1$, $Q=1$, $\sigma=1$. In questo caso le ∞^1 serie lineari dalle quali risulta la serie di gruppi qui considerata, sono tutte ∞^0. Ma se la curva del 3° ordine ha un punto doppio, i singoli punti di essa si potranno riguardare come determinati dalle rette del fascio, che ha il suo centro nel punto doppio; ed è chiaro che in quest'ipotesi i punti stessi formeranno una unica serie lineare, che sarà ∞^1.

Dalle cose dette di sopra si rileva subito, che ogni gruppo di una serie di gruppi di Q punti sopra una curva algebrica, contiene un certo numero di punti, che sono determinati dalle particolari condizioni, cui soddisfano in comune i gruppi della serie; un tal numero di punti sarà uguale a $Q-\varepsilon-q$, essendo $\varepsilon+q$ il numero dei punti liberi di un gruppo, dei quali ε serviranno a determinare la serie.

In seguito denoteremo una serie lineare con uno dei simboli $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ..., e uno qualunque de' suoi gruppi con $G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, ..., dove q esprimerà sempre il grado d'infinità della serie, e Q il numero dei punti di un gruppo.

Una serie $g_Q^{(q)}$ si può sempre considerare composta di gruppi corresidui. Infatti, i singoli gruppi di questa serie si potranno sempre immaginare separati sulla curva f, ove tutti sono situati, mediante le curve di una serie lineare ∞^q di curve aggiunte, per la quale ciascuna delle sue curve passa per R punti arbitrari ma fissi della f, e sega la f in un gruppo di Q punti mobili; basterà semplicemente supporre, che sia $2k+Q+R\equiv 0$ (mod. n). Allora ogni gruppo della serie $g_Q^{(q)}$ sarà residuo di un gruppo di R punti fissi arbitrari della f, e però tutti i gruppi della serie medesima saranno corresidui.

Per una serie ∞^q di gruppi di Q punti, che sia formata d'un numero finito di serie lineari, non saranno, in generale, i gruppi d'una di queste serie, corresidui rispetto a quelli d'un'altra delle serie medesime. E infatti, se un gruppo d'una delle serie qui indicate potesse essere residuo di tutti i gruppi di un'altra delle serie stesse, dovrebbe aversi $2(k+Q)\equiv 0$ (mod. n); e questa condizione non è generalmente soddisfatta.

III.

Serie lineari di gruppi di punti.

Secondo le considerazioni del § II, possiamo dedurre che una serie $g_Q^{(q)}$ si può sempre separare sulla curva f col mezzo delle curve aggiunte di un sistema lineare ∞^q, le quali passano pei medesimi R punti della f. Il gruppo di questi R

punti non è però fisso sulla f, e quindi la serie $g_Q^{(q)}$, che si suppone su questa curva, è indipendente da quella delle curve aggiunte che ve la separano.

Sia ora la f dell'ordine $n>3$, e φ una sua curva aggiunta dell'ordine $s \geqq n$. La curva definita dall'equazione

$$\psi_1 \equiv \varphi + \varphi_1 f = 0,$$

dove $\varphi_1=0$ è l'equazione d'una curva algebrica dell'ordine $s-n$, sarà anch'essa evidentemente una curva aggiunta dell'ordine s.

Il numero delle costanti arbitrarie, contenute nell'equazione $\varphi_1=0$, è in generale uguale ad $\frac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$ e di esse potremo disporne in modo che altrettanti coefficienti della ψ_1 ricevano dei determinati valori.

La ψ_1 sarà dunque generalmente determinata da $\frac{1}{2}s(s+3)-k-l$ costanti, ove k è il numero espresso dalla formola (5) (Introd.), ed $l=\frac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$; e questa curva si potrà sostituire alla φ.

Ora si ha:

$$\frac{1}{2}s(s+3)-k-l=ns-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-k,$$

ovvero, per la formola (6) (Introd.):

$$\frac{1}{2}s(s+3)-k-l=ns-2k-p.$$

Quest'uguaglianza dimostra, che presi ad arbitrio sulla curva f $ns-2k-p$ punti, dei quali non ve ne sia alcuno che cada in un punto multiplo della f, la curva ψ_1 sarà completamente determinata se la si assoggetterà a passare per questi punti; e però dei punti d'intersezione delle curve f, ψ_1, i quali non cadono nei punti multipli della prima di esse, ve ne sono p pienamente determinati dai rimanenti, supposto sempre che sia $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\geqq k$.

Osservazione. Se il numero delle costanti contenute nell'equazione $\varphi_1=0$, sarà minore di $\frac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$, il numero dei predetti punti di segamento delle curve f, ψ_1, che sono determinati mediante i rimanenti di essi, sarà inferiore a p. Una diminuzione nel numero dei punti qui indicati, avrà parimenti luogo anche nel caso, nel quale l'equazioni che nascono dal sottoporre la curva ψ_1 a dover passare per $ns-2k-p$ punti della f, per la scelta particolare di questi punti, non saranno tutte distinte. È poi facile vedere, che se la curva aggiunta φ è di un ordine $s < n$, la curva ψ_1 dovrà coincidere colla φ, e però la riduzione accennata superiormente, riguardo al numero delle costanti della equazione $\varphi = 0$, non si potrà più operare. Tuttavia, se sarà $s = n - 1$ oppure $s = n - 2$, rimarrà invariabile la conclusione dedotta più sopra relativamente ai punti mobili di segamento delle curve, che ora sono le φ ed f.

Infatti a queste due ipotesi corrispondono le uguaglianze:

$$\left[\frac{1}{2} s(s+3) - k\right]_{s=n-1} = n(n-1) - 2k - p\,,$$

$$\left[\frac{1}{2} s(s+3) - k\right]_{s=n-2} = n(n-2) - 2k - p\,,$$

le quali dimostrano appunto la nostra affermazione.

Esaminiamo anzi più estesamente questo caso di $s < n$, e supponiamo perciò $s = n - \mu$ $(\mu \geqq 3)$. In quest'ipotesi l'equazione della curva φ conterrà, in generale, un numero di costanti arbitrarie uguale ad $\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu+3)$.

Ora si verifica facilmente l'esattezza dell'uguaglianza:

$$\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu+3) - k = n(n-\mu) - 2k - \left\{p - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - 1\right\},$$

dalla quale risulta, che dei punti mobili d'intersezione delle curve φ, f, essendo la φ d'ordine $s \leqq n-3$, e la f d'ordine $n > 3$, ve ne sono generalmente $p - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - 1$ determinati dai rimanenti.

Suppongasi adesso $k \leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$; i punti mobili d'intersezione di ciascuna curva aggiunta dell'ordine $s > n-3$, rappresenteranno sulla f una serie lineare di gruppi di Q punti, e il numero dei punti necessari alla determinazione di un gruppo, e che potranno scegliersi ad arbitrio sulla curva f, sarà almeno uguale a $Q - p$. Dunque il grado d'infinità della serie stessa, sarà almeno uguale a $Q - p$; e però, se lo indichiamo con q, sarà $q \geqq Q - p$.

Se poi è $s = n - \mu$ $(\mu \geqq 3)$, il numero dei punti che si potranno scegliere ad arbitrio sulla curva f per determinare un gruppo, sarà almeno uguale a $Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1$, purchè si ammetta sempre che l'equazione della curva aggiunta, che determina sulla f un gruppo di Q punti, contenga il massimo numero di costanti. Si avrà dunque in quest'ipotesi $q \geqq Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1$.

Per una curva del 4° ordine con due punti doppi, sono

$$k = 2\,,\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 3\,,\ p = 1.$$

Le coniche aggiunte determinano su questa curva una serie lineare di gruppi di 4 punti, e ogni gruppo è individuato da tre punti. La serie è dunque ∞^3.

Per una curva del 5° ordine con un punto triplo, sono

$$k = 3\,,\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 6\,,\ p = 3.$$

Le cubiche aggiunte determinano su questa curva una serie lineare di gruppi di 9 punti, e ogni gruppo è individuato da 6 punti. La serie è dunque ∞^3.

Le coniche aggiunte sono evidentemente formate dal sistema di due rette, che si segano nel punto triplo. Tali coniche determinano sulla curva del 5° ordine una serie lineare di gruppi di 4 punti, la quale si decompone in due serie lineari di gruppi di due punti, e ciascuna di queste è ∞^1.

Per una curva del 6° ordine con 7 punti doppi, sono

$$k = 7\,,\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 10\,,\ p = 3.$$

Le cubiche aggiunte determinano su questa curva una serie lineare di gruppi di 4 punti, e ogni gruppo è individuato da 2 punti. La serie è dunque ∞^2.

Se la curva del 6° ordine è tale, che i nove punti d'intersezione di due delle sue cubiche aggiunte sono sempre sopra la curva, allora tutte quelle cubiche che passano per un punto arbitrario di essa curva, si segheranno in un altro punto completamente determinato della medesima; e quindi dei due punti che individuano un gruppo della suddetta serie, uno determina di per sè l'altro.

Finalmente per una curva del 5° ordine con due punti doppi, sono

$$k = 2\,,\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 6\,,\ p = 4.$$

Le coniche aggiunte vi determinano una serie lineare di gruppi di 6 punti, la quale è ∞^3.

Quei gruppi della serie che sono individuati da tre punti in linea retta con un punto doppio della curva del 5° ordine, dànno origine ad una serie lineare ∞^1 di gruppi di tre punti, per la quale i punti di un gruppo sono in linea retta coll'altro punto doppio della curva stessa.

IV.

Curve aggiunte.

Sia f la curva considerata nell'introduzione, e per essa sia $k \leqq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Dalle conclusioni ricavate nel § precedente si deduce, che se una serie lineare $g_Q^{(q)}$ di gruppi di Q punti, è separata sulla curva f da una serie lineare di curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$ $(\mu \geqq 3)$ è, in generale,

$$q \geqq Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1, \qquad \text{ovvero è} \qquad \leqq p - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - 1$$

il numero dei punti di un gruppo, che sono determinati dai rimanenti punti del gruppo stesso.

Ora sia $g_Q^{(q)}$ una serie lineare di gruppi di Q punti sulla curva f. Affinchè i gruppi di una tal serie si possano separare mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, supposto $q \geqq Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1$, dovrà in generale aver luogo la relazione:

$$\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu+3) \geqq k + Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1\,,$$

ovvero, essendo $k = \frac{1}{2}n(n-3) - p + 1$, l'altra:

$$\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu+3) \geqq \frac{1}{2}n(n-3) + Q - 2(p-1) + \frac{1}{2}\mu(\mu-3)\,,$$

dalla quale risulta:

$$Q \leqq 2(p-1) - n(\mu-3).$$

Questa condizione si rende manifesta quando si osservi, che se i gruppi della serie $g_Q^{(q)}$ sono separabili sulla curva f nel modo suindicato, deve aversi

$$Q \leqq n(n-\mu) - 2k.$$

Si può dunque enunciare il teorema:

Perchè una serie $g_Q^{(q)}$ *si possa separare sulla curva* f *mediante curve aggiunte dell'ordine* $n-\mu$ $(\mu \geqq 3)$, *è necessario e sufficiente che sia*

$$q \geqq Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1.$$

Da questo teorema risulta chiaramente, che le serie $g_Q^{(q)}$ contemplate in questo teorema sono serie particolari.

Per tali serie è sempre

$$q \geqq Q - p + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + 1, \qquad \text{e quindi} \qquad Q \leqq 2(p-1) - n(\mu-3).$$

Suppongasi ora $Q = 2(p-1) - n(\mu-3)$; dico che q non potrà allora superare il numero $p - 1 - \frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$.

Infatti si consideri la serie $g_{2(p-1)-n(\mu-3)}^{\left(p-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)\right)}$; aggiungendo a ciascuno dei suoi gruppi un punto arbitrario e fisso della curva f, si avrà la serie $g_{2p-1-n(\mu-3)}^{\left(p-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)\right)}$.

Ora i gruppi di questa serie non si potranno separare sulla curva f mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, se non è

$$n(n-\mu) - 2k \geqq 2p - 1 - n(\mu-3).$$

Ma è

$$2k = n(n-3) - 2p + 2,$$

quindi

$$n(n-\mu) - 2k = n(n-\mu) - n(n-3) + 2p - 2 = 2p - 2 - n(\mu-3).$$

Dovrebbe dunque aversi

$$2p - 2 - n(\mu-3) \geqq 2p - 1 - n(\mu-3),$$

ovvero $2p - 2 \geqq 2p - 1$, relazione evidentemente assurda.

Si può giungere alla medesima conclusione anche osservando, che affinchè una serie lineare di gruppi di punti, per la quale il grado d'infinità q è uguale al numero $p - \frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$, si possa separare sulla curva f mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, deve aversi in generale:

$$\frac{1}{2}(n-\mu)(n-\mu+3) \geqq k+p-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu),$$

e questa relazione si riconosce subito assurda, se in essa si pone in luogo di k il suo valore dato dalla formola (6) (Introduzione).

Se adunque per una serie lineare $g_Q^{(q)}$ separabile sulla curva f mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, è $Q=2(p-1)-n(\mu-3)$, non può aversi

$$q>p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu).$$

Ma secondo il precedente teorema non può neppure essere in quest' ipotesi $q<p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$; dunque sarà necessariamente $q=p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$. Quindi, se Q è uguale a $2(p-1)-n(\mu-3)$, esiste una sola serie lineare $g_Q^{(q)}$, separabile sulla curva f per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, ed è per una tal serie $q=p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$.

Un gruppo di questa serie essendo determinato da $p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$ de' suoi punti, arbitrariamente scelti, i punti del gruppo che rimarranno individuati da questi, saranno in numero di $p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)$.

Le curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$, che separano sulla f i gruppi della serie $g_{2(p-1)-n(\mu-3)}^{\left(p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)\right)}$, formano dunque una serie lineare $\infty^{p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)}$ di curve aggiunte del detto ordine, la quale contiene per conseguenza

$$p-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)$$

curve, fra loro indipendenti.

Daremo qui alcuni esempi relativi a serie lineari di gruppi, che formano parte di quelle, cui si riferisce il precedente teorema.

Sia f una curva del 6° ordine con 6 punti doppi, per essa sono $p=4$, $k=6$.

Una serie lineare $g_6^{(3)}$ si può separare sulla f mediante cubiche aggiunte. Siffatte cubiche hanno infatti in comune colla f nei punti doppi di questa curva, 12 punti, e quindi la segano in altri 6 punti, i quali sono individuati da tre di essi, scelti ad arbitrio.

Sia f una curva del 7° ordine con 3 punti doppi, saranno per questa curva $k=3$, $p=12$.

Una serie lineare $g_{15}^{(6)}$ si potrà separare sulla f per mezzo di curve aggiunte del 3° ordine. Infatti queste curve hanno in comune colla f, nei punti doppi di questa curva, 6 punti, e quindi la segano in altri 15 punti, che si possono individuare mediante 6 di essi.

S'immagini ora sulla curva del 7° ordine qui considerata, una serie lineare $g_8^{(2)}$. Una tal serie vi si potrà separare mediante coniche aggiunte.

Si consideri anche sulla detta curva del 7° ordine una serie lineare $g_{12}^{(4)}$, e un'altra serie, parimente lineare, $g_1^{(1)}$. Tutte le cubiche aggiunte, che passano per due punti fissi della curva del 7° ordine, si potranno determinare mediante quattro punti di questa curva, la cui scelta è pienamente libera. Ma si può sempre ammettere, che le due serie $g_1^{(1)}$, $g_{12}^{(4)}$ sian fra loro in tale relazione, che un punto della prima debba sempre giacere con quattro punti arbitrari di un gruppo della seconda sopra una di tali cubiche. In tale ipotesi ogni cubica del nostro sistema che passerà per quattro punti arbitrari di un gruppo della serie $g_{12}^{(4)}$, segherà la curva del 7° ordine in altri 8 punti completamente determinati, e così rimarrà individuato questo gruppo.

Altro esempio relativo alla medesima curva del 7° ordine, ce lo offre la serie $g_7^{(2)}$. Infatti, se ad una tal serie si associa l'altra $g_1^{(1)}$, si potrà sempre ammettere che un gruppo di questa serie debba sempre trovarsi con due punti arbitrari di un gruppo della serie $g_7^{(2)}$ sopra una medesima conica aggiunta. Allora una tal conica segherà la curva del 7° ordine in altri 5 punti pienamente determinati, e resterà così individuato il gruppo suddetto della serie $g_7^{(2)}$.

In quest'esempio possiamo anche dire che i gruppi della serie $g_7^{(2)}$ sono individuati da curve aggiunte del 4° ordine, perchè ad ognuna delle predette coniche possiamo unire una conica fissa. La stessa osservazione potrà pure ripetersi rispetto a ciascuna delle tre precedenti serie, considerate sulla data curva del 7° ordine.

V.

Teorema di Riemann e Roch.

Sia $g_Q^{(q)}$ una serie lineare di gruppi di Q punti, la quale riguarderemo come esistente sulla curva f; e supponiamo $q=Q-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+q'$ $\left(q'\right.$ intero positivo $\left.<p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-1\right)$.

Secondo il § precedente, i gruppi di questa serie si potranno separare sulla curva f per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$. Quella fra queste curve, che passerà per $q-q'$ punti arbitrari della f, sarà dunque individuata dal dover passare per altri q' punti arbitrari della stessa f.

Ma una tal curva aggiunta sega ancora la f in un gruppo di $2(p-1)-n(\mu-3)-(q-q')$ il quale si potrà ritenere come individuato da q' punti arbitrari della f.

Il numero totale dei punti, che la medesima curva aggiunta ha in comune colla f, è $2(p-1)-n(\mu-3)$; e perchè sottoponendo una siffatta curva aggiunta a passare per q' punti arbitrari della f, essa passerà anche per un gruppo di Q punti della serie $g_Q^{(q)}$, così essa curva aggiunta segherà la f, oltre in questi Q punti, in un altro gruppo di $2(p-1)-n(\mu-3)-Q$ punti, il quale si potrà considerare come individuato dai suddetti q' punti. Da ciò risulta chiaramente che ad ogni gruppo della serie $g_Q^{(q)}$ è associato un gruppo di $Q'=2(p-1)-n(\mu-3)-Q$ punti, il quale è individuato da $q'=q-Q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-1=Q'-p+1+\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)+q$; ovvero ai gruppi della serie $g_Q^{(q)}$ corrispondono uno ad uno quelli di un'altra serie $g_{Q'}^{(q')}$, la quale come la prima ha la proprietà, che i suoi gruppi si possono separare sulla curva f, mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$.

I ragionamenti qui fatti presuppongono evidentemente che il numero q non sia minore del numero q', ovvero, il che è lo stesso, che il numero

$$Q-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3)$$

sia positivo.

Se ciò non ha luogo, vediamo prima di tutto se sia possibile separare sulla curva f i gruppi della serie $g_{Q'}^{(q')}$ per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$. Questo potrà farsi, purchè (§ IV) sia

$$q' \geqq Q'-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3).$$

Ma è $\mu<n$, dunque sarà $2n-\mu>n$, e però anche $2n-\mu>\mu$. D'altronde è

$$q'=Q'-p+1+\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)+q,$$

quindi sarà:

$$q'>Q'-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3);$$

e la serie $g_{Q'}^{(q')}$ si potrà separare sulla curva f nel suddetto modo.

Dimostrato questo, si consideri una curva aggiunta dell'ordine $n-\mu$ che passa per $q'-q$ punti arbitrari della f. Il numero totale dei punti che una tal curva aggiunta ha in comune colla f, è uguale a $2(p-1)-n(\mu-3)$. E se questa curva aggiunta è una di quelle che separano uno dei gruppi della serie $g_{Q'}^{(q')}$, sarà individuata da altri q punti arbitrari della f, e allora passerà per un determinato gruppo della serie $g_Q^{(q)}$, e segherà la curva f, oltre nei Q punti di questo gruppo, in un altro gruppo di $Q'=2(p-1)-n(\mu-3)-Q$ punti, che sarà individuato da $q'-q+q=q'$ punti arbitrari della curva f. Di qui segue pei gruppi della serie $g_{Q'}^{(q')}$, in relazione a quelli della serie $g_Q^{(q)}$, quella stessa conseguenza che abbiamo già ricavato, nella supposizione che il numero $Q-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3)$ fosse positivo, pei gruppi della seconda di queste serie rispetto a quelli della prima.

Ora dimostriamo, che i gruppi della serie $g_Q^{(q)}$ hanno, rispetto a quelli della serie $g_{Q'}^{(q')}$, la stessa proprietà che abbiamo riconosciuta per questi, rispetto a quelli.

Dalle precedenti considerazioni risulta infatti, che la curva aggiunta dell'ordine $n-\mu$ che passa per un gruppo della serie $g_{Q'}^{(q')}$, è quella stessa che passa per il gruppo della serie $g_Q^{(q)}$, che ha dato origine al gruppo considerato della serie $g_{Q'}^{(q')}$. Siffatta curva aggiunta sega la f in un gruppo di $n(n-\mu)-2k-Q'$ $=2(p-1)-n(\mu-3)-Q'=Q$ punti mobili, che sarà evidentemente determinato appena lo sarà questa curva aggiunta, e però da q punti arbitrari della f. Così ad ogni gruppo della serie $g_{Q'}^{(q')}$ corrisponde un unico gruppo della serie $g_Q^{(q)}$, e possiamo ora affermare che esiste univoca corrispondenza fra i gruppi delle due serie $g_Q^{(q)}, g_{Q'}^{(q')}$. Ha dunque luogo il teorema:

Data sulla curva f *una serie* $g_Q^{(q)}$, *per la quale sia*

$$q=Q-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+q' \left(q' \text{ intero positivo } <p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)\right);$$

le curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$ *che passano pei gruppi di questa serie, determinano sulla curva* f *una serie* $g_{Q'}^{(q')}$, *per la quale è*

$$q'=Q'-p+1+\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)+q.$$

I gruppi di queste due serie si corrispondono univocamente.

È ovvia la dimostrazione delle seguenti uguaglianze:

$$(1) \qquad Q+Q'=2(p-1)-n(\mu-3)$$

$$(2) \qquad Q-Q'=2q-2q'+(n-\mu)(\mu-3),$$

in virtù delle quali dati i numeri Q e q oppure Q', q', e l'ordine delle curve aggiunte che separano i gruppi di ciascuna delle serie $g_Q^{(q)}, g_{Q'}^{(q')}$ sulla curva f, si determinano i numeri Q', q' oppure Q, q.

Il precedente teorema, da Riemann, che ne iniziò la dimostrazione, e da Roch, che la generalizzò, porta il nome di ciascuno di questi due autori.

Di questo teorema offriamo qui il seguente esempio.

La curva f sia del 7° ordine, ed abbia 9 punti doppi. Per essa saranno

$$k = 9\,,\quad \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = 15\,,\quad \text{e quindi}\quad p = 6.$$

Sulla f si consideri una serie $g_4^{(1)}$. Le curve aggiunte del 4° ordine che passano per un gruppo di questa serie sono individuate evidentemente da due punti arbitrari della f, e però formano una serie lineare ∞^2. Esse segano la f in altri gruppi di 6 punti, che formano la serie $g_6^{(2)}$.

Ora supposto che sulla f sia data la serie $g_6^{(2)}$, le curve aggiunte del 4° ordine che passano pe' suoi gruppi formeranno, secondo il precedente teorema, un fascio di curve aggiunte del 4° ordine, le quali separeranno sulla f i gruppi della serie $g_4^{(1)}$.

VI.

Trasformazioni univoche.

Denotiamo con:

$$(1)\qquad a_x^n = 0$$

l'equazione in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 del punto, relativa alla curva f considerata nella introduzione; ed esprimiamo con (X) il piano in cui giace questa curva.

Le coordinate omogenee y_1, y_2, y_3 del punto in un piano (Y), supponiamole legate alle x dalle relazioni:

$$(2)\qquad y_1 : y_2 : y_3 = \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3\,,$$

dove le Θ esprimono delle funzioni omogenee (intere e razionali) di un medesimo grado ν delle x.

Eliminando le x dalle equazioni (1), (2), si otterrà l'equazione omogenea nelle y:

$$(3)\qquad a_y^{n'} = 0$$

che rappresenterà una curva F sul piano (Y). E perchè in virtù delle (2) ad ogni punto del piano (X), non comune alle tre curve Θ, corrisponde un solo e determinato punto del piano (Y), così i punti della F corrisponderanno uno ad uno a quelli della f.

Supposto ora che dalle (2) sia possibile ricavare le x razionalmente espresse per le y, ovvero che dalle (2) si possano dedurre le loro inverse:

$$(2')\qquad x_1 : x_2 : x_3 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3\,,$$

dove le Δ sono funzioni delle y analoghe alle Θ, allora i piani (X), (Y) saranno punteggiati proiettivamente, e però anche le curve f, F. È chiaro che ciò si riduce ad ammettere, che eliminando le y dalle equazioni (2), (3), ne risulti, a meno d'un fattore costante, l'equazione (1).

L'ordine della curva F si desume dalla considerazione delle due serie di curve rappresentate dalle equazioni:

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \alpha_3\Theta_3 = 0\,,$$

$$\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \alpha_3\Delta_3 = 0\,,$$

dove le α dinotano delle costanti arbitrarie, curve che sono rispettivamente nei piani (X), (Y), e fra le quali v'ha univoca corrispondenza.

Sia p' il genere della curva F, e k' il numero analogo a k (Introd.) che si deduce dall'esistenza dei punti multipli di cui può essere dotata la F.

Ad una serie di gruppi di Q punti sulla curva f, corrisponde sulla F, in virtù della supposta corrispondenza fra i punti delle due curve f, F, un'altra serie di gruppi di Q punti, ed è chiaro che si corrisponderanno in modo univoco, non soltanto i gruppi di queste due serie, ma ancora i punti di due gruppi corrispondenti delle medesime.

Ora abbiamo veduto (§ IV), che esiste sulla f un'unica serie $g_{2(p-1)-n(\mu-3)}^{\left(p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)\right)}$, separabile mediante curve aggiunte dell'ordine $(n-\mu)$, essendo $n>3$ ed $n>\mu\geqq 3$; e i punti di un gruppo di questa serie, che sono determinati dai

$$p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu).$$

punti arbitrari del gruppo stesso, sono in numero di $p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)$.

Se dunque si considera sulla curva f questa serie di gruppi, ad essa corrisponderà sulla F un'altra serie di gruppi del medesimo grado d'infinità, ogni gruppo della quale conterrà $2(p-1)-n(\mu-3)$ punti. Di tali serie ve ne sarà poi una soltanto sulla curva F.

Ma secondo il § III una serie lineare di gruppi di punti si può sempre separare sulla curva F, mediante una serie lineare di curve aggiunte del medesimo grado d'infinità di quella serie; e perchè la serie che ora consideriamo sulla F è unica, così detto X l'ordine delle curve aggiunte che ve la separano, curve le cui equazioni supporremo contengano il massimo numero di costanti, dovranno sussistere le uguaglianze:

$$(4)\qquad \frac{1}{2}X(X+3)=k'+p-1-\frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu)=p-p'+\frac{1}{2}(n'^2-3n'+\mu^2-3\mu-2n\mu+6n)\,,$$

$$(5)\qquad n'X=2k'+2(p-1)-n(\mu-3)=2(p-p')+n'(n'-3)-n(\mu-3)\,,$$

dalle quali eliminando la X si ottiene l'altra:

$$\{2(p-p')+n'^2-3n'-n\mu+3n\}\{2(p-p')+n'^2+3n-n\mu\}=$$
$$=n'^2\{2(p-p')+n'^2-3n'+\mu^2-3\mu-2n\mu+6n\}.$$

Posto ora in quest'uguaglianza $\mu=3$, se ne deduce la seguente:

$$\{2(p-p')+n'^2-3n'\}\{2(p-p')+n'^2\}=n'^2\{2(p-p')+n'^2-3n'\}\,,$$

e quindi l'altra:

$$2(p-p')+n'^2=n'^2\,,$$

donde risulta $p=p'$.

Pertanto, se si pone $\mu=3$ nella (5), perchè $p=p'$ se ne dedurrà $X=n'-3$. Dunque le curve aggiunte alla f che separano su questa curva i gruppi corrispondenti a quelli della serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$ data sulla f, sono dell'ordine $n'-3$, e formano una serie lineare ∞^{p-1}. Questa serie è unica, e però la curva F ammette p curve aggiunte dell'ordine $n'-3$ fra loro linearmente indipendenti.

Le curve aggiunte dell'ordine $n-3$ alla f, che separano su questa curva i gruppi della serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$, corrispondono una ad una alle curve aggiunte dell'ordine $n'-3$ alla F, che separano su questa curva i gruppi corrispondenti a quelli della serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$, e una tale corrispondenza fra le une e le altre di queste curve aggiunte, sarà univoca, se, come abbiamo supposto, le curve f ed F sono punteggiate proiettivamente.

Due curve aggiunte dell'ordine $n-3$ alla curva f, oppure due curve aggiunte dell'ordine $n'-3$ alla F, che appartengono a quelle che sono linearmente indipendenti per l'una o l'altra delle curve f, F, non possono avere in comune un punto sulla curva f (o F), fuori dei punti multipli della f (o F).

Infatti se ciò potesse aver luogo, tutti i gruppi della serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$ sulla f (o F) avrebbero in comune un punto fisso, e quindi i rimanenti punti di un gruppo di questa serie formerebbero la serie $g^{(p-1)}_{2p-3}$, sempre separabile sulla curva f (o F) per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-3$ (o $n'-3$), come si rileva dal § IV. Ma una curva aggiunta dell'ordine $n-3$ (o $n'-3$) sega ancora la curva f (o F) in un punto, che secondo il teorema del § V appartiene ad una serie $g_{(1)}^{(1)}$, situata sulla curva f (o F), e ciò contradice all'ipotesi, che un tal punto sia fisso sulla f (o F).

Si può ora definire il genere di una curva algebrica dell'ordine n, non decomponibile, col dire, ch'esso è quel numero che esprime quante curve aggiunte dell'ordine $n-3$ ($n>3$), fra loro linearmente indipendenti ammette la curva algebrica considerata; e affermare che un tal numero resta *invariabile per tutte le trasformazioni razionali univoche, cui si voglia sottoporre la data curva* (*Teorema di Riemann*) (*).

Siano ora:

$$\varphi_1=0\,,\ \varphi_2=0\,,\ \ldots\ldots\,,\ \varphi_p=0$$

le equazioni delle curve aggiunte dell'ordine $n-3$, linearmente indipendenti, per la curva f; e:

$$\psi_1=0\,,\ \psi_2=0\,,\ \ldots\ldots\,,\ \psi_p=0$$

quelle delle curve aggiunte dell'ordine $n'-3$, linearmente indipendenti, per la curva F.

Se supponiamo data sulla curva f la serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$, i suoi gruppi possiamo considerarli come separati dalle curve della serie:

$$(6)\qquad a_1\varphi_1+a_2\varphi_2\ldots+a_p\varphi_p=0\qquad (a \text{ costanti arbitrarie}),$$

e per la particolare corrispondenza che noi supponiamo abbia luogo fra i punti della curva f e quelli della F, e per quanto abbiamo superiormente dimostrato riguardo ai gruppi che sulla curva F corrispondono a quelli della serie $g^{(p-1)}_{2(p-1)}$, possiamo affermare che v'ha univoca corrispondenza fra le curve delle serie (6), e quelle della serie:

$$(7)\qquad b_1\psi_1+b_2\psi_2+\ldots+b_p\psi_p=0\qquad (b \text{ costanti arbitrarie}).$$

(*) Per le curve algebriche del 2° e 3° ordine che non sono decomponibili, il genere si riterrà sempre definito dalla formola (6) (Introd).

Detta dunque $\alpha_{t,1}\varphi_1+\alpha_{t,2}\varphi_2+\ldots+\alpha_{t,p}\varphi_p$ la curva della serie (6) che corrisponde univocamente alla ψ_t della (7), si potrà scrivere:

$$\psi_t=\rho\,(\alpha_{t,1}\varphi_1+\alpha_{t,2}\varphi_2+\ldots+\alpha_{t,p}\varphi_p)\,, \tag{8}$$

(ρ fattore di proporzionalità, e $t=1,2,3,\ldots,p$).

I $p-1$ punti della F che fissano la curva ψ_t, e che per quanto abbiamo più sopra dimostrato sono tutti diversi dai $p-1$ punti della F, che fissano un'altra delle curve ψ, hanno per corrispondenti altrettanti punti della f, e quindi si potranno determinare per mezzo della (8) i rapporti di $p-1$ delle costanti α alla rimanente, ovvero la curva della serie (6), che corrisponde alla considerata ψ_t, e viceversa.

Possiamo pertanto concludere che le relazioni (8) sono conseguenza delle (2).

È poi facile dimostrare, che sussistendo le relazioni (8) fra le curve aggiunte analoghe a quelle che abbiamo indicato con φ e ψ per le curve f ed F, e relative a due curve di date equazioni, i punti di queste due curve si corrisponderanno univocamente; dunque si potrà ricavare da una delle date equazioni l'altra per mezzo di una trasformazione razionale univoca. Da ciò si deduce che le formole di trasformazione per le curve f ed F conseguono dalle relazioni (8), e ne deriva così un mezzo per giudicare, se due curve di date equazioni sono trasformabili univocamente una nell'altra.

Se ora nelle formole (2) di trasformazione per le curve f ed F si sostituiscono alle Θ curve aggiunte alla f, scelte fra quelle che determinano sulla f i gruppi della serie $g_Q^{(2)}$, il numero Q esprimerà l'ordine della curva trasformata F; quindi se si stabilisce che l'ordine di tali curve aggiunte non debba essere inferiore ad $n-3$, il numero Q avrà in quest'ipotesi il più piccolo valore, se in luogo delle Θ sostituiremo nelle formole (3) tre curve aggiunte dell'ordine $n-3$, come si rileva subito dalle conclusioni dedotte nel § III.

La trasformazione univoca della curva f nella F ha luogo così per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-3$ alla f. Questa conclusione va tuttavia soggetta ad eccezioni, e noi diremo qui quando non è possibile esprimere in siffatta guisa una trasformazione razionale univoca.

Può accadere che le curve aggiunte dell'ordine $n-3$, le quali passano per un punto arbitrario M della f, passino per uno o più altri punti determinati di questa curva, come per esempio se si trattasse di una curva del 4° ordine dotata di un punto doppio. In tale ipotesi, posto che nelle formole (2) le Θ sian sostituite da curve aggiunte dell'ordine $n-3$; al punto M corrisponderà bensì un unico e determinato punto y, ma a questo punto non corrisponderà, inversamente, un solo e determinato punto x. Quindi non si potranno esprimere, mediante le anzidette formole, le x razionalmente per le y; e però nelle espressioni delle x per mezzo delle y entreranno dei radicali, o più in generale dei simboli d'irrazionalità.

Ora si ricordi, che le curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che sono state sosti-

tuite alle Θ nelle formole (2), si sono scelte fra quelle che determinano sulla f i gruppi della serie $g_{2(p-1)}^{(p-1)}$, curve che segano la f in $2(p-1)$ punti mobili, e sono determinate da $p-1$ punti arbitrari della f. Se dunque una di tali curve aggiunte che passa per un punto M della f, dovesse anche passare per altri i punti di questa curva, completamente determinati da M, è chiaro, pel modo stesso di determinazione di una siffatta curva aggiunta, ch'ella segherà la f in un gruppo di $(i+1)(p-1)$ punti, fuori dei punti multipli della f. Ma deve aversi $(i+1)(p-1)=2(p-1)$, dunque sarà $i=1$; e si può perciò concludere, che nell'ipotesi ora fatta la corrispondenza che s'istituisce mercè le formole (2), ove si è effettuata l'indicata sostituzione riguardo alle Θ, può sempre considerarsi come una corrispondenza di doppio significato, espresso cioè dal numero 2. Le curve per le quali questa specie di corrispondenza ha luogo, quand'ella si esprime nel modo qui dichiarato, sono quelle che i geometri hanno distinto col nome di *curve iperellittiche*.

Il carattere particolare di tali curve, è dunque quello di avere i punti associati due a due in guisa, che dato un punto di una coppia, l'altro rimane per mezzo di questo pienamente determinato. Una curva iperellittica, ammetterà dunque sempre una serie $g_2^{(1)}$.

Ora una tale serie, secondo il § V, dà origine ad un'altra serie $g_{2(p-2)}^{(p-2)}$, che è separabile sulla curva iperellittica considerata da curve aggiunte dell'ordine $n-3$; cioè le curve di quest'ordine, che passano pei gruppi della serie $g_2^{(1)}$, determinano sulla predetta curva i gruppi della serie $g_{2(p-2)}^{(p-2)}$.

Se una curva iperellittica è trasformabile univocamente in altra curva, non si potrà, nelle relative formole di trasformazione (2), a ciascuna delle Θ sostituire una curva aggiunta dell'ordine $n-3$, diversa dall'una all'altra delle Θ. E se una tale trasformazione deve aver luogo per mezzo di curve aggiunte, siffatte curve dovranno essere d'un ordine uguale almeno ad $n-2$.

Le curve aggiunte dell'ordine $n-2$ alla f, supposta ora iperellittica, soddisfano a k condizioni lineari, e sono in generale determinate da $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-k=p+n-2$ di tali condizioni.

Esse segano la f in $n(n-2)-2k=2p+n-2$ punti, fuori dei punti multipli di questa curva. Ma è noto, che le curve che effettuano una trasformazione razionale univoca nel piano, debbono far parte di un sistema lineare ∞^2 tale, che due curve prese ad arbitrio nel sistema si seghino in un solo punto, non comune a tutto il sistema. Dunque le curve aggiunte dell'ordine $n-2$, colle quali si vuole effettuare la trasformazione della curva iperellittica f, dovranno passare per $p+n-4$ punti fissi, dati ad arbitrio su questa curva, fuori de' suoi punti multipli.

La curva trasformata della f, se la trasformazione ha luogo nel modo qui supposto, sarà perciò dell'ordine $p+2$.

Ora si rifletta, che la curva f ammette un'unica serie $g_2^{(1)}$, alla quale dovrà corrispondere sulla trasformata F della f una serie unica $g_2^{(1)}$, i cui gruppi, come risulta dalle conseguenze dedotte in questo stesso §, dovranno potersi separare sulla curva F per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $p-1$. E perchè la F dev'essere del genere p, essa dovrà avere $\frac{1}{2}p(p-1)$ punti doppi.

Ma le curve aggiunte alla F, che sono dell'ordine $p-2$, e passano una sola volta per ciascuno degli $\frac{1}{2}p(p-1)-1$ di questi punti sono completamente determinate; dunque la curva F ammette serie di curve aggiunte dell'ordine $p-1$, le curve delle quali si possono considerare come costituite di una curva fissa dell'ordine $p-2$, che passa una sola volta per ciascuno degli $\frac{1}{2}p(p-1)-1$ punti, scelti a piacere fra i punti doppi della F, e di una retta che passa per il punto doppio rimanente. Ed essendo unica la serie $g_2^{(1)}$, che deve separarsi sulla F con curve aggiunte dell'ordine $p-1$, se ne concluderà che tutti i punti doppi della F sono riuniti in un solo punto di questa curva, e però che essa ammette un punto p^{uplo}.

Dalle cose esposte in questo § possiamo finalmente conchiudere, che si può sempre applicare ad una curva algebrica del genere p (che non sia iperellittica) una trasformazione razionale univoca, nelle cui formole le Θ vi rappresentino curve aggiunte dell'ordine $n-3$ (n ordine della curva considerata, ciascuna delle quali passi per $p-3$ punti fissi, arbitrariamente scelti sulla curva data. E una tale trasformazione darà una curva dell'ordine $p+1$, dotata di $\frac{1}{2}(p-3)p$ punti doppi.

VII.

Sui punti singolari.

In tutto ciò che abbiamo dimostrato nei precedenti §§, fu sempre ammesso, che il numero k, relativo alla curva f ch'ivi considerammo avesse un valore indipendente dall'ipotesi, che due (o più) delle tangenti in uno (o più) dei punti multipli di questa curva, coincidano in una retta.

Si comprende ora chiaramente, che questo numero k, del quale abbiamo dato nell'introduzione la definizione precisa, debba godere della qui accennata proprietà, se si vuole che tutti i risultamenti ricavati nei summenzionati §§, non soffrano alcun cambiamento in causa dell'essere due (o più) delle tangenti in un punto multiplo della curva f, riunite in una retta.

E per quanto ci sembri che una siffatta indipendenza del numero k, possa derivare dalle cose esposte nella introd., tuttavia crediamo opportuno dimostrarla qui in modo, da non lasciare alcun dubbio sulla verità della medesima.

A tal'uopo si supponga la curva f riferita ad un sistema di due assi ortogonali delle x e delle y e la si trasformi in altra curva F tale, che i punti delle due curve f, F si corrispondano in modo univoco, e rispetto alla quale dinoteremo con ξ, η le coordinate d'uno de' suoi punti.

Si pongano perciò le uguaglianze:

$$\xi = \frac{\Theta_1(x, y)}{\Theta_3(x, y)} \quad , \quad \eta = \frac{\Theta_2(x, y)}{\Theta_3(x, y)},$$

dove Θ_1, Θ_2, Θ_3 esprimono tre polinomi razionali interi nelle variabili x, y, di ciascuno de' quali supporremo che sia ν il grado.

Si ammetta che le curve Θ passino per un punto P della f, che sia su questa curva un punto j^{uplo}.

Se α, β sono le coordinate del punto P, le tangenti agli j rami della f nel punto (α, β), saranno determinate da questo punto, e dal punto infinitamente vicino ad esso sul ramo considerato. I punti della F che corrispondono al punto P, saranno determinati dalle equazioni:

$$\xi = \frac{\Phi_1}{\Phi_3} \quad , \quad \eta = \frac{\Phi_2}{\Phi_3},$$

dove Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono i polinomi che si deducono dai Θ_1, Θ_2, Θ_3, col porre in questi $\alpha+dx$, $\beta+dy$ rispettivamente in luogo di x, y. Ora dividendo ognuno dei polinomi Φ per dx^ν, dalle ultime equazioni si otterranno le altre:

$$\xi = \frac{\Psi_1}{\Psi_3} \quad , \quad \eta = \frac{\Psi_2}{\Psi_3},$$

nelle quali le Ψ rappresentano dei polinomi razionali interi e del grado ν rispetto alla quantità $\frac{dy}{dx}$. Ma la quantità $\frac{dy}{dx}$ ammette j valori, dunque queste equazioni determineranno j punti sulla curva F, che corrispondono al punto P della f. Tali punti saranno tutti distinti o tutti o parte coincidenti, secondochè saranno tutte distinte o tutte o parte coincidenti le tangenti ai rami della f, che passano per P. Questi punti della curva F saranno poi in ogni caso j dei punti d'intersezione di essa curva con quella che si deduce dalle ultime delle superiori equazioni, eliminandovi la quantità $\frac{dy}{dx}$. Di qui appare evidente la conseguenza, che se si ha riguardo al solo punto multiplo P della curva f, il numero k', che è per la F quello che k è per la f, non potrà subire mutamento alcuno, quando si supporrà che due (o più) delle tangenti in P alla f, coincidano.

Pensando ora al modo di corrispondenza che abbiamo ammesso sussistere fra i punti delle curve f, F, ed indicando con n, n' i rispettivi ordini delle medesime, si avrà la relazione:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - k = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - k'$$

dalla quale, considerando il solo punto multiplo P della curva f, si deduce che anche il numero k deve avere un valore indipendente dall'essere tutte distinte o no le tangenti della f nel punto stesso.

Abbia ora la f in altro (P_1) de' suoi punti, un punto $j_1$uplo; e si trasformi univocamente la F in una curva F_1 dell'ordine n'', per mezzo di curve Θ che passino tutte per il punto P_1. Per le curve F, F_1 si può ripetere quello che sopra abbiamo detto per le f, F; e quindi, se k'' è per la curva F_1 il numero analogo ai numeri k, k' per le f, F, esso conserverà un valore indipendente dall'essere tutte distinte o no le tangenti in P_1 alla curva f. E poichè deve verificarsi la relazione:

$$\frac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-k'=\frac{1}{2}(n''-1)(n''-2)-k'',$$

così si deduce che anche il numero k' deve godere della medesima proprietà di k''; e in virtù della relazione (1) godrà della stessa proprietà anche il numero k.

Con ripetute trasformazioni analoghe a quelle già operate, si finirà per concludere, che se le tangenti nei punti multipli della curva f non soddisfano ad alcuna particolare condizione, il coincidere di due o più di esse in uno dei punti stessi, non altera punto il valore del numero k.

Siano P, P_1 due punti multipli della curva f, e sia il primo $j$uplo e il secondo $j_1$uplo. Se P, P_1 sono infinitamente vicini, le curve aggiunte alla f avranno tutte in comune l'elemento infinitesimo PP_1, cioè si toccheranno in P.

Ora il coincidere dei punti P, P_1 della curva f, vuol dire che questa curva tocca sè stessa nel punto, ove sono riuniti i punti P, P_1, cioè due rami della f che passano per un tal punto di riunione, hanno in comune la tangente nel punto stesso.

Ogni curva aggiunta alla f sarà dunque tangente in questo punto ai due rami della f ch'ivi si toccano, e quindi avrà nel punto di riunione dei punti multipli P, P_1 della f $j+j_1-2$ punti in comune con questa curva, dei quali $j-1$ cadranno in P, ed j_1-1 in P_1, ciò che è conforme alla definizione data di una curva aggiunta nella introduzione.

Il coincidere dunque di due punti multipli della f, non può far variare il numero k.

Riassumendo possiamo dunque concludere che le ipotesi fatte in questo § sui punti multipli della curva f e le tangenti in essi, non hanno per effetto di far variare il numero k, e perciò tutti i risultamenti ricavati nei precedenti §§, conserveranno la loro validità, malgrado queste ipotesi.

(continua)