# GIORNALE

# DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI



Volume XXIII. - 1885.



NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
*Via Gennaro Serra 20.*
1885.

dans la même direction pourront conduire à des propositions d'un haut intérêt pour l'analyse.

4. On sait quelle lumière a été portée sur la théorie générale des équations algébrique par l'étude de ces équations spéciales auxquelles conduit la division du cercle en parties égales, et la division par un nombre entier de l'argument des fonctions elliptiques. La transcendante si remarquable qu'on obtient en expriment le module de la théorie des fonctions elliptiques par le quotient des periodes mène semblablement aux équations modulaires qui ont été l'origine de notions entièrement nouvelles, et de résultats d'une grande importance comme la résolution de l'équation du cinquième degré. Mais cette transcendante n'est que le premier terme, le cas particulier le plus simple d'une série infinie de nouvelles fonctions que M. Poincarè a introduites dans la science sous la dénomination de fonctions fuchsiennes, et appliquées avec succès à l'integration des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque. Des fonctions qui ont donc dans l'Analyse un rôle dont l'importance est manifeste, n'ont pas été considérées jusqu'ici sous le point de vue de l'algèbre, comme la transcendante de la théorie des fonctions elliptiques, dont elles sont la généralisation. On propose de combler cette lacune et de parvenir à de nouvelles équations analogues aux équations modulaires, en étudiant ne serait-ce que dans un cas particulier la formation et les propriétés des relations algébriques qui lient deux fonctions fuchsiennes, lorsqu'elles ont un groupe commun

Dans le cas où aucun des mémoires présentés pour le concours sur un des sujets proposés ne serait trouvé digne du prix, ce dernier pourra être adjugé à un mémoire mis en concours contenant la rèsolution complète d'une question importante de la théorie des fonctions outre celles proposées par la commission.

Les mémoires presentés au concours devront être munis d'une épigraphe ainsi que du nom et de l'adresse de l'auteur sous pli cacheté et adressés au Rédacteur en chef des Acta Mathematica avant le 1er Juin 1888.

Le mémoire auquel Sa Majesté daignera décerner le prix, ainsi que d'ailleurs le ou les mémoires que la commission estimera dignes d'une mention honorable, seront insérés dans les Acta Mathematica et aucun entre eux ne doit être publié auparavant.

Les mémoires peuvent être rédigés dans telle langue que l'auteur voudra choisir, mais comme les membres de la commission appartiennent à trois pays différents, l'auteur doit réunir à son mémoire originaire une traduction française si le mémoire n'est pas déjà écrit en français. S'il n'y a pas de telle traduction l'auteur doit accepter que la commission en fasse faire une à son usage.

La rédaction des Acta Mathematica.



# LE FUNZIONI ALGEBRICHE STUDIATE GEOMETRICAMENTE.

## NOTA

DI

ORESTE TOGNOLI.

(*continuazione vedi Volume* XXII *p.* 332)

### VIII.

### Il problema dei gruppi particolari.

Sia $f=0$ l'equazione d'una curva piana algebrica dell'ordine $n$, curva che supporremo dotata di $\alpha_1$ punti doppi, $\alpha_2$ tripli ecc., $\alpha_{i-1}$ $i^{\text{upli}}$, e la più generale del suo genere.

Una serie lineare $g_Q^{(q)}$, per la quale è: $q = Q - p + 1 + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + q'$ ($q'$ intero $>0$, e $\mu$ positivo intero $<n$ e $\geqq 3$) è composta di gruppi particolari $G_Q^{(q)}$, che si possono tutti separare sopra una curva algebrica dell'ordine $n$, mediante curve aggiunte dell'ordine $n-\mu$ (§ IV). Una siffatta serie conduce sempre ad una altra analoga $g_{Q'}^{(q')}$ $\left(\text{per la quale è: } q' = Q' - p + 1 + \frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu) + q\right)$ tale, che i gruppi $G_Q^{(q)}$, $G_{Q'}^{(q')}$ di queste due serie si corrispondono in modo univoco, e due gruppi corrispondenti di esse giacciono sempre sopra una medesima curva aggiunta dell'ordine $n-\mu$. Del problema che concerne queste due serie di gruppi di punti, noi ci occupammo già nel § V, ma ivi il problema non fu considerato sotto il suo aspetto algebrico. È sotto un simile aspetto che vogliamo esaminarlo ora, ma anzitutto lo enuncieremo sotto la sua forma più generale, che è del seguente tenore: *data una serie lineare $\infty^t$ di curve aggiunte, determinare sulla curva f gruppi $G_Q$ di Q punti tali, che le curve di essa serie che passano pei Q punti d'uno di questi gruppi, appartengano ad una serie $\infty^{q'}$ di curve aggiunte.*

Sia:

$$0 = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \ldots + \alpha_{t+1}\varphi_{t+1} \equiv \Phi \qquad (1)$$

l'equazione dell'indicata serie di curve aggiunte. Se si considera sulla curva $f$ un gruppo $G_Q$ di Q punti: $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(Q)}$, le cui coordinate sono:

$$x_1^{(i)}\ ,\ x_2^{(i)}\ ,\ x_3^{(i)}\ (i = 1, 2, 3, \ldots, Q),$$

e si sostituiscano successivamente queste coordinate nell' equazione (1); prese $t - q' + 1$ delle equazioni risultanti da una simile sostituzione, e supposto che sieno stati attribuiti ai rapporti di $q'$ delle costanti $\alpha$ ad una qualunque delle rimanenti dei valori interamente arbitrari, si dedurrà subito, per condizione del problema, che una qualunque di quest'ultime equazioni dev' essere soddisfatta dai medesimi valori dei $t - q'$ rapporti residui delle costanti $\alpha$, dai quali è soddisfatta ognuna delle altre. Ora ciò conduce immediatamente alla conclusione, che tutti i determinanti del grado $t - q' + 1$, che si possono ricavare dalla matrice:

$$\left|\begin{array}{lllll}
\varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \varphi_3(x^{(1)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t+1}(x^{(1)}) \\
\varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \varphi_3(x^{(2)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t+1}(x^{(2)}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_1(x^{(Q)}) & \varphi_2(x^{(Q)}) & \varphi_3(x^{(Q)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t+1}(x^{(Q)})
\end{array}\right|$$

debbono annullarsi. Una volta poi fatta la scelta di quelli dei rapporti di $q'$ delle $\alpha$ ad una delle rimanenti, i cui valori debbono rimanere arbitrari, questa scelta dirà quali degl'indicati determinanti dovranno essere nulli. Supponiamo (p. e.) che si debbano annullare tutti i determinanti che derivano dal seguente:

$$(s) \qquad \left|\begin{array}{lllll}
\varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t-q'}(x^{(1)}) & \varphi_j(x^{(1)}) \\
\varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t-q'}(x^{(2)}) & \varphi_j(x^{(2)}) \\
\varphi_1(x^{(3)}) & \varphi_2(x^{(3)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t-q'}(x^{(3)}) & \varphi_j(x^{(3)}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_1(x^{(t-q')}) & \varphi_2(x^{(t-q')}) & \ldots\ldots & \varphi_{t-q'}(x^{(t-q')}) & \varphi_j(x^{(t-q')}) \\
\varphi_1(x^{(l)}) & \varphi_2(x^{(l)}) & \ldots\ldots & \varphi_{t-q'}(x^{(l)}) & \varphi_j(x^{(l)})
\end{array}\right| ,$$



ponendovi per $j$ ed $l$ uno dopo l'altro i valori

$$j = t - q' + 1\ ,\quad t - q' + 2, \ldots\ldots, t + 1$$

$$l = t - q' + 1\ ,\quad t - q' + 2, \ldots\ldots, Q.$$

Le equazioni che si ottengono in questo modo sono evidentemente in numero di $(q' + 1)(Q + q' - t)$.

Ora se si osserva che le coordinate dei Q punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(Q)}$ debbono soddisfare ciascuna delle equazioni del sistema:

$$f(x^{(1)}) = 0\ ,\quad f(x^{(2)}) = 0, \ldots\ldots, f(x^{(Q)}) = 0,$$

si vedrà che il numero dei rapporti: $x_1^{(i)} : x_3^{(i)}$, $x_2^{(i)} : x_3^{(i)}$, che restano ancora incogniti, può dirsi ridotto uguale a Q.

Questi rapporti dovendo poi verificare ognuna delle predette $(q'+1)(Q+q'-t)$ equazioni, si concluderà, che affinchè il suenunciato problema abbia soluzione, ritenuto che la curva $f$ sia la più generale del suo genere, e perciò senza ammettere particolari equazioni di condizione fra le costanti dell'equazione $f = 0$, dovrà aversi:

$$Q \geqq (q' + 1)(Q + q' - t).$$

Di qui risulta adunque, che sono ammissibili serie di gruppi $G_Q$ della proprietà espressa nell'enunciato del superiore problema, i quali esistono solamente sopra curve algebriche particolari, e sono quindi tali, che la loro esistenza sopra una curva algebrica, dev'essere presa quale un segno caratteristico, che esprime essere la curva stessa una particolare curva del suo genere. Tuttavia non si potrà escludere in modo assoluto, che una parte dei risultamenti ai quali in seguito perverremo, nella ipotesi che la curva $f$ sia la più generale del suo genere, sieno applicabili anche a curve algebriche particolari.

Se si ammette che le curve della serie (1) sian dell'ordine $n - \mu$, ed inoltre che i gruppi $G_Q$ pei quali esse debbono passare sian determinati da un tal numero $q$ di punti dati ad arbitrio sulla curva $f$, che sia

$$q \leqq t - q'\ ,\quad q \geqq Q - p + 1 + \frac{1}{2}\mu(\mu - 3),$$

i gruppi $G_Q$, $G_{Q'}$, cui si riferisce il superiore problema, apparterranno a serie $g_Q^{(q)}$, $g_{Q'}^{(q')}$, che saranno della natura di quelle considerate nel § V, e varrà quind pei gruppi stessi il teorema di Riemann e Roch ivi dimostrato. Per la possibilità del detto problema, dovranno dunque sussistere in questa ipotesi le due relazioni:

$$Q \geqq (q'+1)(Q+q'-t),$$

e

$$Q \leqq p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+q.$$

Ora da quanto precede si deduce subito, che il numero $Q-(q'+1)(Q+q'-t)$ esprime quanti punti $x^{(i)}$ d'un gruppo $G_Q$ rimangono ancora arbitrari; quindi perchè il detto problema abbia soluzione, bisognerà che sia pure:

$$(\alpha_1) \qquad Q-(q'+1)(Q+q'-t) \geqq q.$$

E perchè si ammette adesso che sia applicabile alle serie $g_Q^{(q)}$, $g_{Q'}^{(q')}$ il teorema del § V, si avrà:

$$(\alpha_2) \qquad q = Q-p+1+\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+q',$$

donde:

$$Q-(q'+1)(Q+q'-t) = Q\left(q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)-\left(q-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+p\right)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right),$$

e quindi:

$$(r_1) \qquad Q \geqq \frac{q+\left(q-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+p\right)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)}{q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t}.$$

Ponendo adesso in questa relazione: $\mu=3$, $t=p-1$, si otterrà la

$$(r_2) \qquad Q \geqq \frac{q(1+p+q)}{q+1}.$$

Se nella relazione $(\alpha_1)$ si pone in luogo della Q il suo valore dato dalla uguaglianza $(\alpha_2)$, si ottiene, dopo facili riduzioni, la:

$$(r_3) \qquad q'p \leqq \frac{1}{2}\mu(\mu-3)q'-(q'+1)(q-t),$$



dalla quale, per $\mu=3$, $t=p-1$, si ricava la seguente:

$$(r_4) \qquad p \geqq (q+1)(q'+1).$$

Detta $\varepsilon$ la differenza fra le due quantità che figurano nella relazione $(\alpha_1)$, si dedurrà facilmente, mercè la uguaglianza $(\alpha_2)$, per $\varepsilon$ il valore:

$$(\alpha_3) \qquad \varepsilon = Q\left(q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)-\left(q-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+p\right)\left(q-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)+p-1-t\right)-q.$$

Due altre espressioni per $\varepsilon$, facili a verificarsi, sono rappresentate dai secondi membri di quest'altre due uguaglianze:

$$(\alpha_4) \qquad \varepsilon = Q-(q'+1)\left(q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-1-t\right)-q$$

$$(\alpha_5) \qquad \varepsilon = p-(q'+1)\left(q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)-\frac{1}{2}\mu(\mu-3).$$

Posto poi nelle uguaglianze $(\alpha_3)$, $(\alpha_4)$, $(\alpha_5)$ $\mu=3$, $t=p-1$, risulterà:

$$(\alpha_6) \qquad \varepsilon = Q-(q'+1)q-q = Q(q+1)-q(q+p+1) = p-(q'+1)(q+1).$$

I numeri dei quali $\varepsilon$ esprime la differenza potranno anche essere uguali fra loro, e quindi $\varepsilon$ potrà anche assumere il valore zero.

Il significato di questo numero $\varepsilon$ risulta chiaramente dalle cose dette nel § II: $\varepsilon$ esprime cioè il numero delle condizioni che determinano la serie $g_Q^{(q)}$ dei gruppi $G_Q$, ovvero esso indica il numero dei punti che si possono scegliere ad arbitrio sulla curva $f$ per fissare questa serie di gruppi, mentre ogni gruppo della serie è fissato da $q$ punti arbitrariamente presi sulla curva stessa.

In virtù dunque del § II. si potrà concludere, che la serie dei gruppi $G_Q$ sulla curva $f$ è composta di un numero $\infty^{\varepsilon}$ di sistemi di serie lineari di gruppi $G_Q$, e ciascuna di queste serie è $\infty^q$.

Se sarà $\varepsilon=0$, i gruppi $G_Q$ formeranno sulla curva $f$ un numero finito di serie lineari $\infty^q$, numero che potrà anche essere uguale ad uno.

Relativamente poi ai gruppi $G_Q$, $G_{Q'}$, cui si riferisce il problema, che è argomento del presente § (si possa o no applicare ad essi il teorema del § V), si deve sempre dire, che un gruppo d'una delle serie di gruppi $G_Q$, si trova con un gruppo di una serie di gruppi $G_{Q'}$ sopra una medesima curva aggiunta, e però un gruppo $G_Q$ è sempre residuo d'un gruppo $G_{Q'}$ (§ I).

Alle $\infty^\varepsilon$ serie di gruppi $G_Q$, corrisponderanno in modo univoco $\infty^\varepsilon$ serie di gruppi $G_{Q'}$, residui dei gruppi $G_Q$; ed è chiaro poi che i gruppi $G_Q$ sono residui di un gruppo di $\varepsilon$ punti della curva $f$, e quindi corresidui fra loro (§ I).

Due gruppi $G_Q$ che appartengono a due delle $\infty^\varepsilon$ serie formate di questi gruppi, avranno inoltre la proprietà, che i loro punti non potranno uno ad uno coincidere. Difatti due dei nominati gruppi non potendo stare sopra una medesima curva aggiunta (§ II), così i punti dell'uno non possono tutti coincidere con quelli dell'altro.

Due delle $\infty^\varepsilon$ serie di gruppi $G_Q$ non possono dunque avere un gruppo completo in comune, e però dato un gruppo $G_Q$ rimarrà completamente individuata la serie alla quale esso appartiene. Ed è manifesto che una simile proprietà deve pure appartenere ai gruppi delle $\infty^\varepsilon$ serie di gruppi $G_{Q'}$.

Se ai gruppi $G_Q$, $G_{Q'}$ sarà applicabile il teorema del § V, a due valori di Q e $q$, scelti sempre in modo che soddisfacciano la relazione $(r_4)$, saranno associati due valori di $Q'$ e $q'$, che per la coppia di valori così attribuiti uno a Q e l'altro a $q$, si otterranno dalle equazioni:

$$Q + Q' = 2(p-1) - n(\mu-3)$$

$$Q - Q' = 2(q-q') + (n-\mu)(\mu-3),$$

una volta dato il valore del numero $\mu$, e purchè si prenda per $t$ un valore che soddisfaccia la condizione $t \geqq q + q'$.

Se si ha $\varepsilon = 0$, i gruppi $G_Q$ formeranno un numero finito di serie $g_Q^{(q)}$: sia $\alpha$ questo numero.

Il numero delle incognite, che nel sistema delle equazioni che si deducono dal determinante (S) nel modo altrove dichiarato, restano ancora arbitrarie, sarà, nella ipotesi qui fatta, uguale a $q$.

A $q$ punti arbitrari della curva $f$ corrisponderanno ora $\alpha$ gruppi $G_Q$, i quali apparterranno individualmente alle $\alpha$ serie $g_Q^{(q)}$, che i gruppi stessi debbono ora formare.

Dunque il gruppo dei $Q - q = (q'+1)\left(q + p - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - 1 - t\right)$ punti residui d'un gruppo $G_{Q'}$, non sarà in modo univoco determinato dai $q$ punti suddetti,



ma corrisponderanno a questi $\alpha$ di tali gruppi di $Q - q$ punti; e le coordinate dei punti di questi gruppi dovranno soddisfare tutte le equazioni or ora nominate.

Ognuno dei gruppi di $Q - q$ punti, insieme ai $q$ punti arbitrari della $f$, formerà un gruppo $G_Q$.

Ora è necessario osservare, che a questi $\alpha$ gruppi $G_Q$ debbono corrispondere altrettante curve aggiunte dell'ordine $n - \mu$, che separano sulla $f$ i gruppi stessi. Sia $\psi = 0$ l'equazione d'una qualunque di queste curve. È chiaro che i coefficienti della $\psi$ dovranno essere funzioni delle coordinate di $q$ punti della curva $f$, e tali funzioni, che per ogni sistema di valori di queste coordinate risultino $\alpha$, e soltanto $\alpha$. sistemi diversi di valori pei coefficienti medesimi. Ma affinchè ciò si verifichi, è necessario ammettere che tali coefficienti dipendano da una quantità $y$, alla quale corrispondano $\alpha$ valori per ogni sistema di $q$ punti presi sulla $f$. Sarà dunque $y$ l'incognita d'un'equazione di $\alpha^{\text{esimo}}$ grado, i coefficienti della quale saranno funzioni algebriche delle coordinate dei detti $q$ punti. Gli $\alpha$ gruppi $G_{Q'}$ che sono determinati da questi punti, si otterranno dunque mediante le $\alpha$ radici, che una tale equazione pei punti stessi determina.

In conclusione, tutti i possibili gruppi $G_Q^{(q)}$ si dividono in $\alpha$ serie $g_Q^{(q)}$, che sono accoppiate in modo univoco alle $\alpha$ radici di quest'equazione. Ma abbiamo già osservato che due di così fatte serie non possono avere un gruppo completo in comune; quindi se ne deduce l'impossibilità di ridurre per qualsivoglia trasformazione una di esse a coincider con un'altra.

Alle $\alpha$ serie di gruppi $G_Q^{(q)}$ saranno poi associate in modo univoco altrettante serie di gruppi $G_{Q'}^{(q')}$; e un gruppo d'una delle prime di queste serie sarà sempre residuo d'un gruppo della serie ad essa associata nelle seconde, e inversamente.

Risulta di qui che tutti i possibili gruppi $G_{Q'}^{(q')}$ formano $\alpha$ serie $g_{Q'}^{(q')}$, le quali sono, in modo univoco, associate alle $\alpha$ radici d'un'equazione dell'$\alpha^{\text{esimo}}$ grado in $z$, analoga a quella dell'$\alpha^{\text{esimo}}$ grado in $y$, alle radici della quale corrispondevano nello stesso modo le $\alpha$ serie $g_Q^{(q)}$.

Ma per il modo di corrispondenza, che abbiamo detto esistere fra quest'ultime serie e le prime, ne risulterà che le $y$ e $z$ debbono considerarsi come due quantità proiettive, e quindi come proiettivi i due problemi che concernono la determinazione delle une e delle altre di queste serie.

Pertanto questi due problemi, dal punto di vista dell'algebra, dovranno riguardarsi come differenti uno dall'altro.

Noteremo finalmente che la corrispondenza univoca dovrà pure sussistere fra i gruppi di due associate delle serie $g_Q^{(q)}$, $g_{Q'}^{(q')}$.

Se $\varepsilon$ è differente da zero, vi saranno $\infty^\varepsilon$ serie $g_Q^{(q)}$, alle quali corrisponderanno univocamente altrettanto serie $g_{Q'}^{(q')}$, ma nel caso attuale non vi sarà più, come v' era nel caso precedente, univoca corrispondenza fra i gruppi $G_Q$, $G_{Q'}$ di due di queste serie. E infatti, presi $q+\varepsilon$ punti ad arbitrio sulla curva $f$, ad essi corrisponderà un numero finito di gruppi $G_Q^{(q)}$, ma questi non potranno determinare un uguale numero di gruppi $G_{Q'}^{(q')}$, perchè quest'ultimi, qualunque sia d'altronde il loro numero, hanno in comune $q'+\varepsilon$ punti, mentre secondo il teorema di Riemann e Roch non possono averne in comune più di $q'$, dovendo essere di per sè determinate le serie cui il teorema stesso si riferisce, e quindi necessario dare soltanto le condizioni che valgono a determinarne i singoli gruppi. Dunque i gruppi $G_{Q'}^{(q')}$ dei quali ora parliamo, non potranno essere in numero uguale a quello dei gruppi $G_Q^{(q)}$, determinati dai $q+\varepsilon$ punti arbitrari della curva $f$, dai quali gruppi $G_Q$ essi gruppi $G_{Q'}$ derivano.

Perciò se fra le serie $g_Q^{(q)}$, $g_{Q'}^{(q')}$, che si ottengono nel caso di $\varepsilon$ differente da zero, v'ha univoca corrispondenza, una simile corrispondenza non sussisterà fra i gruppi di due associate di queste serie.

## IX.

### Caso limite.

La relazione $(r_1)$ stabilita nel precedente §, dà il minimo valore del numero Q dei punti di un gruppo $G_Q^{(q)}$ per un dato valore del numero $q$, quando vi si considerino come noti i numeri $\mu$ e $t$. Un tal minimo non sarà altro che il più grande numero intero contenuto nella frazione che figura nel secondo membro della stessa relazione, o questo numero aumentato di uno. Detto $u$ il valore minimo di Q, corrispondente al valore dato $v$ di $q$, si avrà :

$$\text{per} \qquad q=v \quad , \quad Q=u .$$

Per determinare poi i valori di $q'$, $Q'$, $\varepsilon$, corrispondenti a questi valori di $q$ e Q, ricorreremo alle seguenti equazioni :

$$Q+Q'=2(p-1)-n(\mu-3)$$

$$Q-Q'=2(q-q')+(n-\mu)(\mu-3) ,$$

che sono le (1) e (2) del § V; e all'altra :

$$\varepsilon=p-(q'+1)\left(q+p-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)-\frac{1}{2}\mu(\mu-3) ,$$

che è la $(\alpha_5)$ del § VIII.



I signori **Brill** e **Nöther**, nella Memoria dalla quale noi abbiamo ricavato il presente lavoro, danno esempi d'applicazione delle formole superiori. Questi due autori, partendo dalla ipotesi che $t$ e $\mu$ abbiano i valori : $t=p-1$, $\mu=3$; che il genere $p$ della curva $f$ sia un numero intero della forma

$$2\pi \;,\; 2\pi+1 \;,\; 3\pi \;,\; 3\pi+1 \;,\; 3\pi+2 \;,\; \text{ecc.} ,$$

e $q$ uguale ad uno dei numeri 1, 2, 3, offrono nella citata Memoria il seguente quadro riassuntivo del minimo valore di Q, e dei valori di $Q'$, $q'$, $\varepsilon$, che corrispondono ai suddetti valori di $t$, $\mu$, $p$, $q$ :

| per $p=$ | $q=$ | Valore minimo di Q | Valori corrispondenti di $q'$ | Valori corrispondenti di $Q''$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2\pi$ | 1 | $p-\pi+1$ | $\pi-1$ | $p+\pi-3$ | 0 |
| $2\pi+1$ | | | | | 1 |
| $3\pi$ | 2 | $p-\pi+2$ | $\pi-1$ | $p+\pi-4$ | 0 |
| $3\pi+1$ | | | | | 1 |
| $3\pi+2$ | | | | | 2 |
| $4\pi$ | 3 | $p-\pi+3$ | $\pi-1$ | $p+\pi-5$ | 0 |
| $4\pi+1$ | | | | | 1 |
| $4\pi+2$ | | | | | 2 |
| $4\pi+3$ | | | | | 3 |

ecc.

L'esattezza dei numeri segnati in questo quadro si può verificare per mezzo delle formole notate al principio del presente §.

Diamo ora esempi relativi a serie $g_Q^{(q)}$, i cui gruppi contengono il minimo numero di punti. Alle serie, che passiamo adesso ad esaminare, diciamo subito, per evitare ripetizioni inutili, ch'è sempre applicabile il teorema del § V.

Sia $C_5$ una curva del 5° ordine senza punti doppi. Applicando, come faremo nei successivi esempi, le formole (5) e (6) della introduzione, avremo ora $k=0$, $p=6$.

Sulla $C_5$ esistono due serie $g_6^{(2)}$, $g_4^{(1)}$, i gruppi delle quali sono separati dalle coniche d'un sistema lineare $\infty^3$, che passano per due punti, dati ad arbitrio sulla $C_5$. Indicati con $C_1$, $C_2$ questi due punti, è chiaro che i gruppi della serie $g_6^{(2)}$ avranno in comune i punti $C_1$, $C_2$; e al gruppo di questa serie ch'è determinato dai punti $C_1$, $C_2$, corrisponderà nella serie $g_4^{(1)}$ quel gruppo, fissato dalla conica che tocca la curva $C_5$ in $C_1$ e $C_2$, e passa pel punto che individua quest'ultimo gruppo.

$C_5'$ sia una curva del 5° ordine con 2 punti doppi ($k=2$, $p=4$). Sulla $C_5'$ esistono due serie $g_3^{(1)}$, i cui gruppi sono separati dalle coniche d'una serie lineare $\infty^2$, ogni curva della quale risulta di un paio di rette, che passano: una per uno dei punti doppi della $C_5'$, e l'altra per l'altro.

I fasci di rette che hanno i centri rispettivi in questi punti della $C_5'$, considerati uno per uno, separano due distinte serie $\infty^1$ di gruppi $G_3$, che si mantengono sempre tali, quantunque si possa passare dall'una all'altra, mediante la retta che unisce i centri dei fasci stessi.

$C_6$ sia una curva del 6° ordine con 2 punti doppi ($k=2$, $p=8$). Sulla $C_6$ esistono due sistemi $\infty^2$: gli uni formati di serie $g_8^{(2)}$, e gli altri di serie $g_6^{(1)}$. I gruppi $G_8^{(2)}$, $G_6^{(1)}$ appartenenti alle serie di questi due sistemi, si potranno separare mediante cubiche aggiunte. Bisognerà però supporre che queste cubiche sian formate di una conica che passa pei punti doppi della $C_6$, e di una retta arbitraria, cubiche che sono determinate da 5 punti arbitrari della $C_6$. I gruppi $G_8^{(2)}$ staranno sulla conica, e i gruppi $G_6^{(1)}$ sulla retta. Ora presi ad arbitrio due punti $b_1$, $b_2$ sulla $C_6$, si faccia passare per uno di essi (p. e. $b_1$) una conica aggiunta, e per l'altro una retta. È chiaro allora che le cubiche aggiunte formate di questa conica e di questa retta, separeranno sulla $C_6$ i gruppi $G_8^{(2)}$, $G_8^{(1)}$, dei quali si parla; e si avranno così $\infty^2$ serie $g_8^{(2)}$, alle quali corrisponderanno univocamente altrettante serie $g_6^{(1)}$, e sarà sempre un gruppo d'una delle prime con un gruppo d'una delle seconde, sopra una medesima delle suddette cubiche aggiunte. Un gruppo $G_8^{(2)}$ è dunque sempre residuo d'un gruppo $G_6^{(1)}$.

Per ultimo esempio consideriamo una curva $C_6'$ del 6° ordine con 5 punti doppi ($k=5$, $p=5$).

Sulla $C_6'$ esistono due sistemi $\infty^1$ di serie $g_6^{(1)}$, le cui serie si corrispondono in modo univoco. I gruppi di questi due sistemi di serie, si possono separare sulla $C_6'$ mediante cubiche aggiunte. Presi due punti arbitrari $b_1$, $b_2$ della $C_6'$, potremo supporre che il primo individui una delle serie del primo dei due suddetti sistemi, e l'altro un gruppo $G_4$ di questa serie. Il gruppo $G_4'$ residuo di $G_4$, nella serie a questa associata, sarà determinato da due punti $b_1'$, $b_2'$ della $C_6'$, il primo dei quali individuerà la serie cui appartiene $G_4'$, e l'altro questo gruppo nella serie medesima, difatti la cubica aggiunta che passa pei quattro punti $b_1$, $b_2$, $b_1'$, $b_2'$, separa sulla $C_6'$ i due gruppi $G_4$, $G_4'$; questi gruppi si separeranno dunque per mezzo delle cubiche aggiunte, che passano per due punti arbitrari della curva $C'_6$. Quella di queste cubiche, che toccherà in ciascuno dei punti arbitrari la curva $C_6'$, individuerà quei due gruppi $G_4$, $G_4'$ che sono determinati da questi stessi punti, e hanno in essi riuniti due dei loro punti. Così si otterranno effettivamente due sistemi $\infty^1$ di serie di gruppi $G_4^{(1)}$, e si separeranno i gruppi residui di due associate di queste serie. Due di siffatte serie saranno, p. e., quelle i cui gruppi sono separati dalle coniche che passano per quattro dei punti doppi della $C_6'$, e dalle rette che passano per il quinto punto doppio rimanente.



## X.

### Sulle soluzioni del problema dei gruppi particolari.

Nel § VIII ci siamo occupati, considerandolo sotto il suo aspetto algebrico, del problema dei gruppi particolari, senza tuttavia ricercare, astrazion fatta dalla relazione ($\alpha_1$) dello stesso §, necessaria per l'esistenza di siffatti gruppi, se l'equazioni del sistema (s), cui quel problema conduce, e nelle quali il numero delle incognite deve almeno uguagliare quello delle equazioni, non contenevano alcuna contradizione, o altrimenti, se non fosse stato possibile dedurre un numero finito, com'espressione del numero delle soluzioni comuni alle equazioni del problema.

La possibilità che il numero $\varepsilon$ potesse avere un valore diverso da quello che fu ad esso assegnato nell'ora indicato §, fu essa pure esclusa dalle considerazioni in esso svolte; e per il valore allora attribuito ad $\varepsilon$, e solo per questo, furono ritenute possibili le ulteriori applicazioni del problema.

Ora possiamo seguire due diverse vie per giungere a stabilire le incompatibilità e la limitazione del numero delle soluzioni di un problema algebrico: o per mezzo della discussione delle equazioni, che ad esso si riferiscono, si riesce ad ottenere l'espressione numerica, che ne determina il numero delle soluzioni; oppure, per certe ipotesi che si facciano sulle costanti del problema, che diviene così particolare, è ammissibile che si possa scorgere sempre direttamente l'esistenza di soluzioni, e non rimanga a dimostrare altro, che il numero di queste non può essere infinitamente grande. Quindi, se noi ci riferiamo al problema generale che ci occupa, e supponiamo che le dette ipotesi sulle costanti di esso abbiano stabilito, p. e., una condizione, esprimibile in modo algebrico fra le sue equazioni, la quale sia identicamente soddisfatta in virtù di queste ipotesi, il problema particolare che per queste è derivato avrà un numero infinito di soluzioni, perchè tante debbono ammetterne le sue equazioni, che sono rimaste indipendenti una dall'altra, mentre il suddetto problema generale dovrà riguardarsi come possibile sulla curva $f$, perchè non è infinito il numero delle soluzioni delle equazioni, che ad esso si riferiscono.

Se ammettiamo che al nostro problema sia applicabile il teorema del § V, per la possibilità del problema dovrà sussistere (§ VIII) la relazione:

$$q \leqq Q - (q'+1)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right);$$

quindi, se sussistessero in pari tempo le due relazioni:

$$q > Q - (q'+1)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right)$$

$$Q - (q'+1)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right) \geqq 0,$$

il problema stesso diverrebbe insolubile. E difatti, perchè secondo l'ipotesi fatta si può applicare a questo problema il teorema indicato, bisognerà che esista un gruppo $G_Q$, affinchè il problema abbia soluzione, ma un tal gruppo non esiste se sussistono le due ultime relazioni, dunque il problema non ha soluzione in questo caso.

Del resto abbiamo più sopra accennato a due diverse maniere, che possono permetterci di concludere se il nostro problema ammette o no soluzione; e sebbene la prima di esse si mostri in generale irta di difficoltà, il più spesso forse insuperabili, il signor Brill, nella sua memoria: *Ueber Entsprechen von Punktsystemen aufeiner Curve* (Math. Annalen, Bd. VI, p. 61, e s.), l'ha tuttavia applicata ad alcuni problemi della stessa natura del nostro, e stabilito delle formole, che permettono di ricavarne altre, applicabili ad una classe importantissima di tali problemi. Queste formole si riferiscono al caso dei gruppi particolari $G_Q^{(1)}$, pei quali il corrispondente problema fu in forma algebrica enunciato anche dai signori Clebsch e Gordan nell'opera: *Theorie der Abelschen Functionen* (v. § 61).

I gruppi $G_Q^{(1)}$ dei quali ora parliamo, godono infatti della proprietà, che pei punti di ciascuno è possibile far passare una serie $\infty^{q'}$ di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, ovvero, perchè ha luogo la relazione:

$$q = Q - p + 1 + \frac{1}{2}\mu(\mu-3) + q',$$

e da essa si ricava (per $q=1$, $\mu=3$) $q' = p - Q$, una serie $\infty^{p-Q}$ di tali curve.

Le citate formole comprendono perciò il caso contemplato da Riemann (v. *Abel'sche Functionen*, § 5), che corrisponde a quello di $q=1$ segnato nel quadro del § IX, dove Q ha in pari tempo il minimo valore, il quale, come si deduce subito dal quadro stesso, è espresso da $\frac{1}{2}(p+2)$, se $p$ è pari, e da $\frac{1}{2}(p+3)$, se



$p$ è dispari; e $q'$ corrispondentemente i valori:

$$q' = \frac{1}{2}(p-2) \quad , \quad q' = \frac{1}{2}(p-3).$$

Ritornando adesso al problema, che continua ad essere l'argomento anche del presente §, noi osserveremo, che le equazioni di esso problema risultano (§ VIII) dal porre uguale a zero ciascuno dei determinanti del grado Q, che derivano dalla matrice:

$$(C)\quad \left|\begin{array}{cccc} \varphi_1(x^{(1)}) & \varphi_2(x^{(1)}) & \ldots\ldots & \varphi_{Q+\lambda}(x^{(1)}) \\ \varphi_1(x^{(2)}) & \varphi_2(x^{(2)}) & \ldots\ldots & \varphi_{Q+\lambda}(x^{(2)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1\left(x^{(Q-1)}\right) & \varphi_2\left(x^{(Q-1)}\right) & \ldots\ldots & \varphi_{Q+\lambda}\left(x^{(Q-1)}\right) \\ \varphi_1\left(x^{(Q)}\right) & \varphi_2\left(x^{(Q)}\right) & \ldots\ldots & \varphi_{Q+\lambda}\left(x^{(Q)}\right) \end{array}\right|$$

dove $Q+\lambda = t+1$ $(\lambda \geqq 0)$; $\varphi(x^{(i)})$ sta in luogo di $\varphi(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, e le coordinate $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ dei Q punti $x^{(i)}$, verificano l'equazione: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ora è evidente che il numero delle soluzioni comuni al sistema delle equazioni che in questo modo si ottengono, dev'essere limitato e dipendente da $\lambda$. E siccome è dall'esistenza o non esistenza di tali soluzioni, che si potrà concludere se il problema del § VIII è o non è risolvibile, così, avendo già dimostrato (§ VIII) che il problema stesso è risolvibile semprechè il numero $\varepsilon$, che figura nel secondo membro dell'uguaglianza:

$$Q = q + (q'+1)\left(q+p-1-\frac{1}{2}\mu(\mu-3)-t\right) + \varepsilon \qquad (t \geqq q+q')$$

è intero positivo, e non lo è nel caso che il numero intero $\varepsilon$ sia negativo, si concluderà subito che il numero delle soluzioni comuni al detto sistema di equazioni, deve anche dipendere da $\varepsilon$. Se dunque s'indica con $(Q+\lambda)_Q$ un tal numero di soluzioni, si avrà:

(*) (A) $$(Q+\lambda)_Q = \psi(\lambda, \varepsilon),$$

---

(*) I signori Brill e Nöther, nella citata Memoria, affermano, senza dimodove la funzione $\psi(\lambda, \varepsilon)$ ammetterà un valore intero positivo diverso da zero, per ogni sistema di valori interi e positivi di $\lambda$ ed $\varepsilon$, e sarà uguale a zero per qualunque sistema di valori interi di $\lambda$ ed $\varepsilon$, dei quali quello di $\varepsilon$ sia negativo.

---

strarlo, che il numero $(Q+\lambda)_Q$ è dato dalla seguente formola:

$$\text{(B)} \qquad (Q+\lambda)_Q = \binom{l}{\lambda+1} - \binom{p}{1}\binom{l-2}{\lambda-1} + \binom{p}{2}\binom{l-4}{\lambda-3} - \dots\dots$$

$$+\begin{cases} (-1)^{\frac{\lambda}{2}}\dbinom{p}{\frac{1}{2}\lambda}\dbinom{l-\lambda}{1} \dots (\lambda \text{ pari}) \\ (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}\dbinom{p}{\frac{1}{2}(\lambda+1)} \dots (\lambda \text{ dispari}), \end{cases}$$

formola che per ora è dimostrata solo per $\lambda = 0, 1, 2, 3$ (v. i Math. Annalen, Vol. VI, p. 61 e. s,), e nella quale è:

$$l = M - Q + 1, \quad \binom{l}{m} = \frac{l(l-1)(l-2)\dots(l-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m};$$

M essendo il numero dei punti, nei quali una curva $\varphi$ sega la $f$, e che non sono comuni alla $f$ e a tutte le curve $\varphi$.

I medesimi autori, supponendo $t = p-1$, $\mu = 3$, deducono che i gruppi particolari $G_{\frac{p+1}{2}}^{(1)}$ ($p$ dispari) non esistono sulla curva $f$. Infatti, per

$$q = 1 \quad , \quad Q = \frac{p+1}{2} \quad , \quad t = p-1 \quad , \quad \mu = 3,$$

si ricavano subito, da formole da noi precedentemente stabilite, le uguaglianze:

$$q' = \frac{p-1}{2} \;,\; \varepsilon = \frac{p+1}{2} - 1 - \frac{p+1}{2} = -1 \;,\; l = \frac{3p-3}{2} \;,\; \lambda = t+1-Q = \frac{p-1}{2}$$

Ma col solito metodo di deduzione da $\alpha$ ad $\alpha+1$ si prova, che la somma dei primi $\alpha+1$ termini del 2° membro della (B) è data da:

$$\pm\binom{2\lambda}{\alpha}\binom{3\lambda-2\alpha}{\lambda-2\alpha+1}\frac{(\lambda-2\alpha+1)(\lambda-2\alpha)}{\lambda.(\lambda+1)},$$



Dalla formola ($\Delta$), supposto che $\varepsilon$ vi rappresenti un numero positivo intero; che sia $t = p-1$, e $\mu = 3$, dovrà sempre risultare un numero positivo intero diverso da zero per il numero $(Q+\lambda)_Q$; quindi potremo rispondere in modo affermativo riguardo alla possibilità del problema dei gruppi particolari $G_Q^{(1)}$, per $p > 1$; e potremo anche dire di aver dato un metodo per la risoluzione algebrica di questo problema; e tutto ciò senza avere avuto bisogno di supporre vincolate da particolari equazioni di condizione le costanti dell'equazione della curva $f$, sulla quale debbono stare i gruppi considerati $G_Q^{(1)}$. Ma essendo ora applicabile a questo problema il teorema del § V, e ricavandosi dalla formola:

$$q' = Q' - p + 1 + \frac{1}{2}(\mu-3)(2n-\mu) + q \quad (\text{per } \mu = 3 \;,\; q = 1)$$

$q' = Q' - p + 2$, si concluderà che i gruppi $G_{Q'}^{(Q'-p+2)}$, residui dei gruppi $G_Q^{(1)}$, si possono, mediante una serie lineare di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, separare sulla curva $f$. Volendo poi che $Q'$ abbia il massimo valore, bisognerà supporre che Q abbia il valore minimo. Allora dal quadro del § IX si dedurrà;

$$Q' = \frac{1}{2}(3p-6) \quad , \quad q' = \frac{1}{2}(p-2),$$

per $p$ pari, e

$$Q' = \frac{1}{2}(3p-7) \quad , \quad q' = \frac{1}{2}(p-3),$$

per $p$ dispari. Così noi abbiamo potuto concludere l'esistenza dei gruppi particolari $G_{Q'}^{(Q'-p+2)}$, e la loro separazione sulla curva $f$, mediante curve aggiunte dell'ordine $n-3$, conclusioni che in altra guisa ricavate, avrebbero presentato una ben diversa difficoltà.

---

la quale espressione, per $\alpha = \frac{\lambda+1}{2}$ ($\lambda$ dispari), e per $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ ($\lambda$ pari), diviene rispettivamente:

$$\pm\binom{2\lambda}{\frac{\lambda+1}{2}} . 1 . 0 = 0 \quad , \quad \pm\binom{2\lambda}{\frac{\lambda}{2}} . 2\lambda . 0 = 0,$$

e di qui si ricava, che nel caso contemplato è $(Q+\lambda)_Q = 0$; c. d. d.

Infine osserveremo, che la seconda delle vie indicate di sopra, per decidere intorno alla possibilità del problema algebrico, del quale ci siamo finora occupati, permette di scoprire le curve algebriche sulle quali un simile problema ammette soluzione. In molti casi particolari essa via ci condurrà alla conclusione che si vuole ricavare, senza che però si possa, dal complesso di questi casi, dedurre tali criteri, che permettano di stabilire un metodo per potere subito decidere quali sono i caratteri di tutte quelle curve, sulle quali il problema stesso è risolvibile. Così, p. e., se si trattasse di sapere se sopra una curva del 6° ordine $C_6$, dotata di 4 punti ($k=4$, $p=6$), esiste una serie di gruppi particolari $G_6^{(2)}$, e si volesse seguire la via ora indicata, bisognerebbe osservare che da formole anteriori si deducono per questo caso, per $\lambda$ ed $\varepsilon$, i valori: $\lambda = 0$, $\varepsilon = 2$. Dunque ad uno si riduce il numero delle equazioni dell'attuale problema, e quest'unica equazione conterrà tre incognite, a due delle quali potremo attribuire valori arbitrari. Essa darà perciò un numero limitato di soluzioni relative al problema, e questo sarà dunque risolvibile. Se si ricorre poi alla formola dei signori Brill e Nöther, che noi abbiamo indicato in nota, la quale formola é per il caso che ora consideriamo dimostrata; osservando che per questo caso è $l=5$, si concluderà subito che il numero delle suddette soluzioni è uguale a 5.

È questa pertanto la via cha abbiamo seguita, per decidere circa la possibilità del problema del § VIII, e per ottenere un metodo di risoluzione del medesimo, come lo si vede chiaramente, quando si pensi, che per concludere una tale possibilità, e per avere un tal metodo, abbiamo ricorso alle equazioni del sistema (C).

(*continua*).

*Quando un sistema di forze applicato ai punti di un sistema rigido varia per modo da ridursi in ogni istante ad una diname intorno ad un asse di un assoide del quart' ordine, se nell'assoide reciproco di questo vi sono due assi tali che le differenze delle prime tre coordinate omonime siano proporzionali alle differenze delle seconde tre, il sistema di forze può ammettere una funzione, ed il calcolo di questa dipende dalla integrazione di due equazioni alle derivate parziali di primo ordine.*

3. Considerando il caso in cui la dinamc risultante del sistema di forze varii in un assoide d' ordine $n$, le condizioni di esistenza della funzione U si ridurranno alle condizioni di integrabilità per un sistema di $6-n$ equazioni alle derivate parziali del primo ordine, e del tipo dell' equazione (3).

Allora fra gli altri casi in cui è possibile l' esistenza della U, ci sarà quello in cui saranno verificate le $(6-n)_2$ condizioni analoghe alla (12), o più in particolare le $(6-n)_2$ condizioni analoghe alla (13), cioè quando i $6-n$ assoidi de quint' ordine che determinano l'assoide d'ordine $n$ sono in tale posizione reciproca che per le intersezioni di essi due a due può sempre passare un assoide del quint' ordine che può scriversi nella forma (13).

Napoli, Gennajo 1885.

## ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

Giornale di matematiche elementari pubblicato per cura del Dott. Davide Besso, Professore nell' Istituto tecnico di Roma.



# LE FUNZIONI ALGEBRICHE STUDIATE GEOMETRICAMENTE.

## NOTA

DI

ORESTE TOGNOLI.

(*continuazione e fine vedi pag.* 262)

## XI.

### Sopra un metodo indiretto di determinazione dei gruppi minimi $G_Q^{(q)}$, per un dato valore di $q$.

Se nella formola (§ VIII):

$$q = Q - \left(q + p - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - Q\right)\left(q + p - 1 - \frac{1}{2}\mu(\mu-3) - t\right) - \varepsilon,$$

si pone:

$$\mu = 3\,,\ t = p - 1\,,\ \varepsilon = 0\,,$$

il minimo valore di Q, per un dato valore di $q$, si ricaverà dall'uguaglianza

$$Q = q + \frac{qp}{q+1}\,;$$

quindi posto:

$$\frac{qp}{q+1} = h + \frac{r}{q+1}\ \left(0 \leqq r < q+1\right),$$

un tal valore di Q sarà espresso da $q+h$, se $r=0$, oppure da $q+h+1$, se il numero intero $r$ sarà diverso da zero. Ammesso ora che i gruppi $G_Q^{(q)}$ si possano separare sulla curva $f$ per mezzo di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, e che in pari tempo Q abbia il minimo valore, se sarà $Q = q + h$, dovremo scegliere per $q$ un valore, per il quale l'espressione $\frac{qp}{q+1}$ rappresenti un numero intero $\leqq p-1$. Dovrà dunque essere $q \leqq p - 1$. Se poi è $Q = q + h + 1$, si dovrà prendere per $q$ un valore, per il quale $qp$ non risulti esattamente divisibile per $q + 1$, e tale che la parte intera del quoziente $\frac{qp}{q+1}$ sia $\leqq p - 2$. Sarà dunque

$$q > \frac{p-2-\lambda}{2+\lambda}\left(0 \leqq \lambda \leqq p - 2\right).$$

Ora osserviamo, che dati ad arbitrio $q$ punti sulla curva $f$, ad essi corrisponderanno $\alpha$ gruppi $G_Q^{(q)}$ (§ VIII), quindi se $G_Q$, $L_Q$ sono due di questi gruppi, il gruppo $G_{2Q}$, risultante dal complesso dei punti contenuti nei due gruppi $G_Q$, $L_Q$, apparterrà ad una serie $\infty^{3q}$ di gruppi $G_{2Q}$. Dico ora che una tal serie di gruppi si potrà ottenere sulla curva $f$ mediante curve aggiunte dell'ordine $n - 3$. Infatti, se è $Q = q + h$, affinchè ciò abbia luogo converrà che sia (§ IV):

$$3q \geqq 2q + 2h - (p - 1),$$

ovvero:

$$q \geqq 2h - (p - 1),$$

e poichè si ricava di qui $2h \leqq q + p - 1$, basterà prendere $q \leqq p - 1$, perchè risulti (come dev' essere) $h \leqq p - 1$. Dunque, essendo $h$ e $q$ non minori di $p - 1$, i gruppi $G_{2Q}^{(3q)}$ si potranno separare nel suddetto modo sulla curva $f$, semprechè fra i valori di $q$, da cui derivano quelli di $h$, si considerino solo quelli pei quali la relazione $q \geqq 2h - (p - 1)$ è soddisfatta. In secondo luogo sia $Q = q + h + 1$, perchè si possa ottenere la voluta separazione dei gruppi $G_{2Q}^{(3q)}$ sulla curva $f$, dovrà adesso aversi:

$$3q \geqq 2q + 2h - p + 3,$$

ovvero:

$$q \geqq 2h - p + 3.$$

Ma si ha in questo caso $h = p - 2 - \lambda$; dunque bisognerà che sia:

$$q \geqq p - 2\lambda - 1.$$

Il problema è dunque risolvibile nel modo voluto, se $q$ non è minore del più grande dei numeri $p - 2\lambda - 1$, $\frac{p-2-\lambda}{2+\lambda}$.



Ritenuto pertanto che $q$ sia stato scelto in guisa da soddisfare alle condizioni dichiarate nei due casi esaminati di sopra, da un gruppo $G_{2Q}^{(3q)}$ si dedurrà (§ V) un gruppo ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$, se $Q = q + h$; e un gruppo ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$, se $Q = q + h + 1$. Ad ogni paio di gruppi $G_Q^{(q)}$, $L_Q^{(q)}$, che corrispondono a due radici di quella equazione dell' $\alpha^{mo}$ grado, della quale fu fatto cenno nel § VIII, apparterrà così un unico gruppo ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$, o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$, secondochè sarà $Q = q + h$ oppure $Q = q + h + 1$. Associando ora ad uno degli $\alpha$ gruppi $G_Q^{(q)}$ ciascuno degli $\alpha - 1$ rimanenti, si otterranno in questo modo, dal considerato gruppo $G_Q^{(q)}$, $\alpha - 1$ gruppi ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$ o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$.

Il gruppo $G_Q^{(q)}$ e uno dei gruppi ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$ (o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$), che da esso derivano, sono evidentemente composti di punti, che giacciono tutti sopra una medesima curva aggiunta dell'ordine $n - 3$ di una serie $\infty^q$ di tali curve; ed è facile vedere che le curve di questa serie condurranno alla determinazione di tutti i gruppi ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$ (o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$), che si ottengono sempre da quel gruppo $G_Q^{(q)}$.

Il problema che concerne la determinazione degli $\alpha$ gruppi minimi $G_Q^{(q)}$, che corrispondono a $q$ punti arbitrariamente dati sulla curva $f$, si può così ridurre a quello che riguarda la determinazione degli $\alpha - 1$ gruppi ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$ (o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$), che si ottengono da ogni singolo di quei gruppi $G_Q^{(q)}$, come il secondo di questi due problemi può ridursi al primo. Una tale riduzione del primo problema al secondo può talora offrire dei vantaggi per la risoluzione del primo, e allora si avrà un metodo utile, sebbene indiretto, per la risoluzione di questo problema.

Ora si osservi, che il problema che riguarda i gruppi ${G_{2(p-q-h-1)}}^{(q-2h+p-1)}$ (o ${G_{2(p-q-h-2)}}^{(q-2h+p-3)}$), considerato nel suo enunciato algebrico, è incluso in quello del § VIII, e però sarà un problema pienamente determinato, e finito il numero delle soluzioni delle equazioni, che ad esso corrispondono. Dovrà dunque per questo problema essere soddisfatta la relazione (§ VIII):

$$Q_1 = (q_1' + 1)(Q_1 + q_1' - t) + q_1,$$

dove si dovrà porre: $Q_1 = 2(p - q - h - 1)$ (oppure $= 2(p - q - h - 2)$), e $q_1' = q$, $q_1 = q - 2h + p - 1$ (oppure $= q - 2h + p - 3$). Se dunque sarà:

$$Q = q + h,$$

il problema avrà soluzione, purchè esista un numero intero positivo $t$, che soddisfaccia all'uguaglianza:

$$\text{(A)} \qquad p - 2q - 1 - (q + 1)(2p - q - 2h - 2 - t) = q;$$

e se $Q = q + h + 1$, perchè il problema stesso abbia soluzione, bisognerà che vi sia un numero intero positivo $t$, che verifichi l'uguaglianza:

$$\text{(A')} \qquad p - 2q - 1 - (q + 1)(2p - q - 2h - 4 - t) = q.$$

Supposto ora che vi sia il numero $t$, che verifica l'una o l'altra delle qui indicate equazioni, il problema che consiste nel trovare i gruppi $G_{2(p-q-h-1)}{}^{(q-2h+p-1)}$ (o $G_{2(p-q-h-2)}{}^{(q-2h+p-3)}$), i quali corrispondono ad uno dato degli $\alpha$ gruppi $G_Q{}^{(q)}$, avrà almeno una soluzione, come l'avrà il problema che consiste nel trovare i gruppi stessi $G_Q{}^{(q)}$. Il ridurre pertanto l'uno di questi due problemi all'altro, può, come abbiamo già osservato, tornare utile per l'indiretta determinazione del numero delle soluzioni dell'uno o dell'altro di essi, ed è poi interessante osservare che l'equazione del grado $\alpha - 1$, risultante colla soppressione di un fattore lineare da quella, alle cui radici sono associati i gruppi $G_Q{}^{(q)}$, ha pei gruppi $G_Q{}^{(q)}$, il medesimo significato geometrico, che ha l'ultima rispetto ai gruppi $G_Q{}^{(q)}$.

Applicheremo adesso le cose esposte in questo § alla determinazione dei gruppi minimi $G_Q{}^{(1)}$.

Facciamo prima il caso che $p$ sia un numero pari, allora si otterrà per questo caso, dall'uguaglianza $Q = q + \frac{qp}{q+1}$, per Q il valore $Q = \frac{1}{2}(p+2)$; quindi sarà $h = \frac{p}{2}$. I gruppi $G_{2Q}{}^{(3q)}$ si potranno separare sulla curva $f$ mediante curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, perchè si ha $\left(\text{per } q = 1,\ h = \frac{p}{2}\right) q = 2h - (p - 1)$.

I gruppi $G_{2(p-q-h-1)}{}^{(q-2h+p-1)}$ si ridurranno ai gruppi $G_{p-4}{}^{0}$, e il problema che concerne la determinazione di questi gruppi sarà risolvibile, essendo l'equazione (A) soddisfatta nel caso presente da $t = \frac{1}{2}(p-2)$. Per ogni gruppo $G_{p-4}$ passerà una serie $\infty^2$ di curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, le quali separeranno gruppi di $p + 2$ punti, fra i quali gruppi sono compresi quelli separati dalle curve $(\varphi - \lambda\varphi_1))(\psi - \mu\psi_1) = 0$, supposto che le equazioni $\varphi - \lambda\varphi_1 = 0$, $\psi - \mu\psi_1 = 0$ sian quelle di due fasci di curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, che separano due serie di gruppi $G_Q{}^{(1)}$, alle quali appartengono rispettivamente due dati gruppi $G_Q{}^{(1)}$, corrispondenti ad un dato punto della curva $f$. Esisterà inoltre una serie $\infty^1$ di gruppi $G_{p-4}$, che saranno residui di un medesimo gruppo $G_Q{}^{(1)}$, e quindi corresidui fra loro.

In secondo luogo sia $p$ dispari. Volendo anche in questo caso considerare i gruppi minimi $G_Q{}^{(1)}$, converrà porre (§ IX) nella formola ricordata al principio del presente § $\varepsilon = 1$, e quindi calcolare Q per mezzo dell'uguaglianza $Q = q + \frac{qp+1}{q+1}$, la quale (per $q = 1$) dà $Q = 1 + \frac{p+1}{2} = \frac{1}{2}(p+3)$. Ma anche per questo caso si possono istituire i calcoli basandosi sulla formola $Q = q + \frac{qp}{q+1}$, dalla quale (per $q = 1$)



si avrà $h = \frac{p-1}{2}$, e quindi

$$Q = q + h + 1 = \frac{1}{2}(p + 3).$$

Si avrà poi

$$\lambda = p - 2 - h = \frac{1}{2}(p - 3).$$

I gruppi $G_Q{}^{(1)}$, secondo il § VIII, sono determinati, nel caso che ora consideriamo, da due punti della curva $f$; quindi, se prendiamo due gruppi $G_Q{}^{(1)}$, che corrispondono a due punti arbitrari della $f$, e formiamo coi punti di questi due gruppi il gruppo $G_{2Q}$, un tal gruppo si potrà separare sulla $f$ per mezzo di una curva aggiunta dell'ordine $n - 3$, purchè per il dato valore di $\lambda$ si abbia

$$3q' = 2q + p - 2\lambda - 1,$$

dove $3q'$ esprime il grado d'infinità della serie delle curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, che separano sulla $f$ i gruppi $G_{2Q}$. Ora questa uguaglianza $\left(\text{per } q = 2,\ \lambda = \frac{1}{2}(p-3)\right)$ è soddisfatta da $q' = 2$, e ciò è difatto.

I gruppi $G_{2Q}$ determineranno gruppi $G_{p-5}$, e il problema che concerne questi gruppi sarà risolvibile, a norma del § VIII, perchè l'equazione (A'), che ora si riduce alla:

$$p - 2q - 1 - (q + 1)(2p - q - 2h - 4 - t) = 3q' - 2q,$$

è soddisfatta (per $q = 1$, $q' = 2$) da $t = \frac{1}{2}(p - 1)$.

Per ogni gruppo $G_{p-5}$ passerà una serie $\infty^4$ di curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, che segheranno la curva $f$ secondo gruppi di punti, fra i quali saranno compresi quelli separati dalle curve $(\varphi - \theta\varphi_1)(\psi - \mu\psi_1) = 0$, essendo le equazioni $\varphi - \theta\varphi_1 = 0$, $\psi - \mu\psi_1 = 0$ quelle di due fasci di curve aggiunte dell'ordine $n - 3$, che separano due serie di gruppi $G_Q$, alle quali appartengono due dati gruppi $G_Q{}^{(1)}$, corrispondenti ad un dato punto della $f$.

Vi sarà poi un numero finito di gruppi $G_{p-5}$, che insieme con un gruppo $G_Q$, formeranno i punti base di una serie $\infty^1$ di curve aggiunte dell'ordine $n - 3$. V'è anche una serie $\infty^2$ di gruppi $G_{p-5}$, formata di gruppi che non sono corresidui.

Altri esempi di determinazione di gruppi minimi potrebbero essere considerati, e trattati colle formole stabilite in questo §, ma non giova prolungarne più oltre il numero.

## XII.

### Curve normali.

I gruppi minimi $G_Q^{(1)}$, che sono separati sulla curva $f$ da curve aggiunte dell'ordine $n-3$, contengono (§ IX) $\frac{1}{2}(p+2)$ oppure $\frac{1}{2}(p+3)$ punti, secondochè il genere $p$ della $f$ è pari o dispari. Da questi gruppi derivano (§ V) gruppi $G_{Q'}^{(q')}$ del massimo numero di punti, pei quali sono rispettivamente

$$Q'=\frac{1}{2}(3p-6)\ ,\ q'=\frac{1}{2}(p-2)\quad ;\quad Q'=\frac{1}{2}(3p-7)\ ,\ q'=\frac{1}{2}(p-3).$$

Due serie di gruppi $G_Q^{(1)}$ non potendo avere un gruppo completo in comune (§ VIII), ne risulta che due gruppi $G_{Q'}^{(q')}$ non sono corresidui uno dell'altro. Se dunque consideriamo due gruppi $G_{Q'}$, $G'_{Q'}$, e assumiamo rispettivamente i punti di questi due gruppi come punti base di due fasci di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, si vedrà subito, che due curve appartenenti una all'uno e l'altra all'altro di due simili fasci, avranno in comune sulla curva $f$ un solo punto.

Quindi indicate con: $\varphi-\lambda\varphi_1=0$, $\psi-\mu\psi_1=0$ le equazioni rispettive dei fasci stessi, e posto: $\lambda=y_1:y_3$, $\mu=y_2:y_3$, si otterranno le equazioni:

$$(1)\qquad y_1:y_2:y_3=\varphi\psi_1:\varphi_1\psi:\varphi_1\psi_1\,,$$

mediante le quali potrà effettuarsi la trasformazione univoca della curva $f$ in una curva F, la di cui equazione si ricaverà coll'eliminazione delle $x$ fra le (1) e la $f=0$.

Ora la F ha colla retta: $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3=0$ tanti punti in comune, quanti sono i punti mobili d'intersezione della $f$ colla curva: $\alpha_1\varphi\psi_1+\alpha_2\varphi_1\psi+\alpha_3\varphi_1\psi_1=0$; quindi, perchè il numero di questi ultimi punti è uguale a:

$$2n(n-3)-4k-3p+6=2n(n-3)-2n(n-3)-4+4p-3p+6=p+2$$

ovvero a:

$$2n(n-3)-4k-3p+7=2n(n-3)-2n(n-3)-4+4p-3p+7=p+3\,,$$

secondochè si adottano, come basi dei predetti due fasci, due gruppi $G_{\frac{1}{2}(3p-6)}^{\left(\frac{1}{2}(p-2)\right)}$,



oppure due gruppi $G_{\frac{1}{2}(3p-7)}^{\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)}$; così sarà la F dell'ordine $p+2$ nel primo caso e dell'ordine $p+3$ nel secondo.

La curva F ha evidentemente due punti $\left(\frac{1}{2}(p+2)\right)^{\text{upli}}$ $\left(\text{o }\left(\frac{1}{2}(p+3)\right)^{\text{upli}}\right)$, ai quali corrispondono sulla $f$ i punti dei due gruppi $G_Q^{(1)}$ che si ottengono per $\lambda=\infty$, $\mu=\infty$, e sono residui dei due $G_{\frac{1}{2}(3p-6)}^{\left(\frac{1}{2}(p+2)\right)}$ $\left(\text{o dei due } G_{\frac{1}{2}(3p-7)}^{\left(\frac{1}{2}(p+3)\right)}\right)$. Siccome poi la F dev'essere del genere $p$, così essa avrà un numero $k_1$ (o $k_1'$) di punti doppi, determinato dall'uguaglianza:

$$p=\frac{1}{2}p(p+1)-\frac{1}{4}p(p+2)-k_1$$

$$\left(\text{o dalla } p=\frac{1}{2}(p+1)(p+2)-\frac{1}{4}(p+1)(p+3)-k_1'\right),$$

e però $\frac{1}{4}p(p-4)$ $\left(\text{o }\frac{1}{4}(p-1)^2\right)$ punti doppi.

La trasformazione dell'equazione $f(x_1,x_2,x_3)=0$ nella $F(y_1,y_2,y_3)=0$, della quale abbiamo più sopra parlato, è precisamente quella, che secondo Riemann dà la *forma normale* della prima ovvero la *curva normale* della curva $f$.

La curva F può sempre trasformarsi in modo univoco in una certa curva dello spazio. Infatti si considerino le tre quantità $\lambda, \mu, \lambda\cdot\mu$, e si pongano le uguaglianze:

$$(2)\qquad \lambda=y_1:y_3\ ,\quad \mu=y_2:y_3\ ,\quad \lambda\cdot\mu=y_4:y_3\,;$$

si avranno allora le equazioni:

$$(1')\qquad y_1:y_2:y_3:y_4=\varphi\psi_1:\varphi_1\psi:\varphi_1\psi_1:\varphi\psi\,,$$

e sussisterà fra le $y$ la seguente:

$$(2')\qquad y_1y_2-y_3y_4=0.$$

Le equazioni (2) effettuano la voluta trasformazione della curva F in una curva $F_1$, la quale è situata sulla iperboloide (2'). La $F_1$ è del medesimo ordine della F, perchè i punti della $F_1$, che stanno sul piano $y_4=0$, corrispondono ai punti della F, che giacciono anche sulle curve $\varphi=0$, $\psi=0$. Vi sono due punti della curva $F_1$

ciascuno dei quali corrisponde a due distinti punti della F (*punti nodali o nodi*); due tali punti, come lo mostrano facilmente le uguaglianze (1′), sono posti sulla faccia $y_3 = 0$ del tetraedro di riferimento $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ per l'iperboloide (2′). La curva $F_1$ avrà dunque due punti

$$\left(\frac{1}{2}(p-2)\right)^{\text{upli}}\left(\text{o}\ \left(\frac{1}{2}(p-1)\right)^{\text{upli}}\right),\ \text{e}\ \frac{1}{4}p(p-4)\ \left(\text{o}\ \frac{1}{4}(p-1)^2\right)$$

punti doppi. È chiaro poi che per la trasformazione della curva $f$ nella F o nella $F_1$, si debbono escludere i due casi corrispondenti a $p=1$, $p=2$.

I fasci di rette, che hanno i rispettivi centri nei punti

$$\left(\frac{1}{2}(p+2)\right)^{\text{upli}}\left(\text{o}\ \left(\frac{1}{2}(p+3)\right)^{\text{upli}}\right)$$

della curva normale F, hanno comune la proprietà di essere formati di rette, che segano la curva stessa nel minor numero possibile di punti; e si possono sempre indicare direttamente curve, che abbiano questa medesima proprietà della curva F, come sarebbe, ad es., la curva del 6° ordine con due punti tripli.

La curva $F_1$, proiettata da uno de' suoi punti doppi sopra un piano, conduce ad una curva $F_2$, che è evidentemente dell'ordine $p$ (o $p+1$); ha due punti

$$\left(\frac{1}{2}(p-2)\right)^{\text{upli}}\left(\text{o}\ \left(\frac{1}{2}(p-1)\right)^{\text{upli}}\right),\ \text{e}\ \frac{1}{4}p(p-4)-1\ \left(\text{o}\ \frac{1}{4}(p-1)^2-1\right)$$

punti doppi. Questa trasformazione della curva $F_1$ nella $F_2$ richiede, come ben lo si vede, che sia $p>4$. Questa stessa curva $F_2$ si potrebbe ancora ottenere, applicando alla curva normale *Riemaniana* F una quadratica trasformazione, che avesse due *punti fondamentali* nei due punti multipli della F, e il terzo in un punto doppio di questa curva. Dobbiamo ancora osservare, che quando si prendono (nel caso di $p$ dispari) due gruppi $G^{\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)}_{\frac{1}{2}(3p-7)}$, per dedurre la curva F dalla $f$, si ha $\varepsilon=1$, e però per la determinazione dei gruppi residui dei due $G^{\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)}_{\frac{1}{2}(3p-7)}$ saranno necessari due punti arbitrari, cioè converrà aggiungere un nuovo para-



metro arbitrario a quello da cui dipendono le curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che s'impiegano per individuare i gruppi delle due serie formate dei detti gruppi residui.

Per rendere più generale il precedente procedimento, col quale si riduce l'equazione $f(x_1, x_2, x_3)=0$ ad una forma normale, si considerino sulla curva $f$ una serie di gruppi minimi $G_Q^{(q)}$, e la serie dei gruppi massimi $G_{Q'}^{(q')}$, che da quella si ottiene, e si supponga che i gruppi delle due serie siano separati sulla curva $f$ da curve aggiunte dell'ordine $n-3$.

Sia data ora l'equazione:

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots\ldots+\alpha_{q+1}\varphi_{q+1}=0$$

rappresentante una serie $\infty^q$ di curve aggiunte dell'ordine $n-3$. Le curve di una tal serie separeranno sulla $f$ una serie di gruppi $G_Q^{(q)}$; e considerata anche l'equazione:

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots\ldots+\alpha_{q+1}y_{q+1}=0,$$

se supporremo che il rapporto $(\alpha_1\varphi_1+\ldots+\alpha_{q+1}\varphi_{q+1}):(\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_{q+1}y_{q+1})$ debba avere un valore indipendente dalle $\alpha$, si dedurrà subito il sistema delle equazioni:

$$y_1:y_2:y_3:\ldots:y_{q+1}=\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3:\ldots:\varphi_{q+1},$$

le quali effettueranno la voluta riduzione dell'equazione $f(x_1, x_2, x_3)=0$ alla sua forma normale. La curva che si ottiene mediante una simile trasformazione, è evidentemente dell'ordine Q, e giace in uno spazio a $q$ dimensioni. Il numero $q$ lo riterremo $\geqq 2$, e osserveremo che i gruppi $G_Q$, essendo determinati da $q+\varepsilon$ punti arbitrari, converrà aggiungere $\varepsilon$ parametri a quelli da cui dipendono le curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che debbono individuare i gruppi stessi. È poi chiaro che la suddetta curva normale è del minimo ordine.

Per $q=2$ si ha (v. il quadro del § IX) $Q=p-\pi+2$, quindi la curva normale del minimo ordine è in questo caso una curva piana dell'ordine $p-\pi+2$ e del genere $p$, e possiede perciò un numero di punti doppi uguale ad

$$\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi)-p.$$

Qui è $p=3\pi$ o a $3\pi+1$ o a $3\pi+2$, ed $\varepsilon$ rispettivamente uguale a 0, 1, 2.

Per $q=3$ si ha (§ IX) $Q=p-\pi+3$, quindi la curva normale del minimo ordine è in questo caso una curva dell'ordine $p-\pi+3$, posta nell'ordinario spazio a tre dimensioni. Qui è $p=4\pi$ o a $4\pi+1$ o a $4\pi+2$ o a $4\pi+3$ ed $\varepsilon$ rispettivamente uguale a 0, 1, 2, 3. Soltanto dunque nel caso di $p=4\pi$ si potrà, astrazione fatta dalle trasformazioni lineari nello spazio, operare la suddetta riduzione della curva $f$ in un numero finito di modi.

Termineremo osservando, che la formola per la determinazione dei gruppi minimi $G_Q^{(q)}$, nella ipotesi che sieno necessari $q+\varepsilon$ punti per individuare uno di questi gruppi, non è data nella Memoria dei signori Brill e Nöther, studiata da noi in questo scritto; e questi due Autori dichiarano ch'essa non è per anco stabilita.

La formola (B), da noi indicata in nota al § X, vale, se $\varepsilon=0$, per qualsivoglia valore di $p>1$. Essa può ritenersi valevole per $p=m\pi$, dove $m=2,3,4,\ldots$, $\pi=1,2,3,\ldots$, e però in particolare per $q=6,7,8$. Tuttavia, se $\varepsilon$ ha un valore positivo intero, diverso da zero, le equazioni cui conduce il problema relativo ai gruppi $G_Q^{(q)}$, saranno analoghe a quelle date nel § IX, e la difficoltà consisterà solo nello stabilire una formola, che permetta l'enumerazione delle soluzioni del problema. Del resto questa formola generale, che pur deve esistere, sarà analoga alla (B) ora ricordata; e poichè essa deve condurci alle formole finora note, esprimerà un numero che evidentemente dovrà godere delle stesse proprietà di quelli che si riferiscono ai problemi particolari che già si sanno risolvere, appunto perchè questa formola generale si ridurrà a quella nota, colla semplice supposizione che la quantità $\varepsilon$ abbia in essa il valore zero. Si può poi pensare che sia sempre possibile ottenere i numeri relativi al problema per curve particolari; e allora questi numeri varranno anche pei casi più generali. Per la riduzione, cui è consacrato il presente §, come osservammo nel § VI rispetto ai gruppi di punti che potevano impiegarsi a stabilire una trasformazione univoca, si può ammettere che sia possibile indicare curve particolari, sulle quali esistono serie di gruppi che hanno le proprietà necessarie, perchè se ne possa assumere una a base di una simile riduzione, come ad es. la proprietà che corrisponde a quella, che le rette hanno riguardo alla curva normale.

## XIII.

### I moduli di una classe di curve algebriche. Metodo di determinazione di Riemann.

Le curve algebriche del genere $p$, furono dal Riemann divise in classi; e Riemann chiamò curve di una stessa classe tutte quelle curve del genere $p$, che si possono trasformare univocamente una nell'altra, ovvero che si possono ricavare da una qualunque di esse, mediante univoca trasformazione. Le curve di una medesima classe sono quindi in corrispondenza puntuale univoca, e, come ora mostreremo, dipendono tutte da un determinato numero di parametri, continuamente variabili, ai quali lo stesso Riemann ha dato il nome di *moduli* della classe considerata (Riemann, *Abel'sche Functionen*, N. 12 nel Vol. 54 del Giornale di Crelle-Borchardt).



I moduli di una classe si ottengono, quando un procedimento di calcolo (che secondo Riemann può includere operazioni trascendenti) si applichi ad una curva della classe stessa. Inversamente, per mezzo di tali moduli s'individuerà una classe di curve, il numero delle quali sarà sempre limitato. I moduli di una classe sono i medesimi per tutte le curve della classe, e ciò mostra il carattere invariantivo di essi per le univoche trasformazioni. Siccome poi i moduli hanno origine da un complesso di operazioni di calcolo, così quando queste operazioni saranno ben definite, si otterrà un determinato sistema di quantità come moduli; e a diversi complessi di operazioni di calcolo corrisponderanno diversi sistemi di moduli. L'indicato processo di calcolo si riferirà, come in seguito sarà mostrato, alla relazione in cui si trova la curva considerata $f$ rispetto alle sue curve aggiunte dell'ordine $n-3$, il carattere invariantivo delle quali si scorge nelle cose dimostrate nel § VI.

Esporremo qui il metodo di Riemann per la determinazione dei moduli di una classe di curve algebriche.

Per comprendere in che questo metodo consista, giova ricordare, che le curve aggiunte dell'ordine $n-3$ soddisfano a $k$ condizioni (Introd.), e perciò sono individuate da $p-1$ punti arbitrari della $f$. Quelle dunque di queste curve che passeranno per $p-2$ punti arbitrari ma fissi: $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$ della $f$, formeranno un fascio, del quale supporremo che $\varphi-\lambda\varphi_1=0$ ne sia l'equazione. Ora l'accennato metodo di Riemann è fondato sulla relazione che ha la curva $f$ colle curve $\varphi-\lambda\varphi_1=0$. Queste curve determinano sulla $f$ una serie $g_p^{(1)}$ di gruppi di $p$ punti, la quale dipenderà evidentemente dai $p-2$ punti $x$, e quindi da altrettanti parametri. Due serie $g_p^{(1)}$ ottenute nel modo ora detto, saranno distinte una dall'altra, e i loro gruppi non corresidui, quando per esse vi sarà diversità anche in uno solo dei punti $x$, quindi i fasci che le separano non saranno equivalenti.

Nel fascio $\varphi-\lambda\varphi_1=0$, le curve che sono tangenti alla $f$ hanno i loro punti di contatto con questa curva sulla Jacobiana delle tre curve $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $f=0$, la cui equazione è rappresentata da:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Quest'equazione, del grado $3(n-3)$, mostra subito, che la suddetta Iacobiana passa due volte per ciascuno dei $p-2$ punti $x$, e tre volte per ogni punto doppio della $f$; quindi essa ha, nei punti base del fascio $\varphi-\lambda\varphi_1=0$, $6k+2p-4$ punti in comune colla $f$, e però sega la $f$ in altri $3n(n-3)-6k-2p+4=4p-2$ punti. Dunque nel fascio stesso vi sono $4p-2$ curve tangenti alla $f$. Fra i parametri di queste curve del fascio esistono soltanto $4p-5$ rapporti anarmonici indipendenti fra loro (V. Witzschel-*Grundlinien der Neueren Geometrie*, p. 32), che indicheremo con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{4p-5}$. Questi rapporti debbono evidentemente essere indipendenti da qualunque trasformazione lineare delle coordinate dei punti delle curve $\varphi-\lambda\varphi_1=0$, ma dovranno in generale variare al variare dei $p-2$ punti $x$. Se ora ricordiamo che la curva $f$ ammette $p$ curve aggiunte dell'ordine $n-3$ : $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, che sono linearmente indipendenti fra loro (§ IV), e supponiamo che nella serie :

$$(1) \qquad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots\ldots + \lambda_p\varphi_p = 0$$

esistano curve che soddisfacciano a $p-1$ condizioni lineari tali, che presi $p-2$ dei punti d'intersezione d'una di queste curve colla $f$ per base di un fascio di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, delle $4p-5$ funzioni $\mu$ delle coordinate di questi punti ve ne sieno $p-2$ che le sono funzioni indipendenti di queste stesse coordinate, eliminando allora per mezzo di queste $p-2$ equazioni, e di quelle che derivano dalla $f=0$, cui esse coordinate debbono soddisfare, le coordinate medesime da ciascuna delle rimanenti funzioni $\mu$, si otterranno $4p-5-(p-2)=3p-3$ funzioni dei rapporti anarmonici $\mu$, le quali saranno indipendenti dalla particolare scelta del fascio, che ci ha condotto ai rapporti anarmonici stessi. Queste $3p-3$ funzioni delle quantità $\mu$ saranno dunque determinate appena si supponga data la curva $f$, e saranno le medesime (§ VI) per tutte le curve che corrispondono projettivamente alla $f$. Denoteremo con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{3p-3}$ queste funzioni, e dimostreremo ch'esse sono i moduli di una classe di curve.

Le curve di una medesima classe potendo infatti ricavarsi da una qualunque di esse mercè univoca trasformazione, così la $f$ potrà sempre ottenersi da due curve $f_1, f_2$ della sua classe, per mezzo di due simili trasformazioni. Ma in tal caso è chiaro che le corrispondenti funzioni di trasformazione debbono essere ordinatamente proporzionali, quindi (§ VI) nelle formole di trasformazione, che dalla curva $f$ conducono alle curve della classe, di cui la $f$ fa parte, le funzioni di trasformazione vi rappresenteranno curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che passano per $p-3$ punti della $f$. Ora, se si vuole che le quantità $\tau$ individuino una classe di curve, e ne siano perciò i moduli, conviene ammettere, che date queste quantità è pur dato il modo con cui si debbono scegliere sulla curva $f$ i $p-3$ punti suddetti. E perchè questi stessi punti debbono evidentemente giacere anche sopra curve della serie (1), così il modo della scelta di quei $p-3$ punti, dovrà determinare su quali di queste curve essi debbono essere presi. Ma dati i moduli $\tau$, un numero (necessariamente limitato) di curve della serie (1) che soddisfano alle predette $p-1$ condizioni è determinato; sono adunque queste le curve che coi loro punti d'intersezione colla $f$ fissano il modo della scelta degli anzidetti $p-3$ punti. Dunque le quantità $\tau$ sono i moduli di una classe, composta di un numero limitato di curve; c. d. d

In casi particolari può darsi che il numero dei moduli, che si ottengono col



metodo precedente da una data curva, sia maggiore di $3p-3$. Sarebbe così, per es., quando le coordinate dei $p-2$ punti $x$, che abbiano più sopra considerato, entrassero soltanto in $p'$ delle quantità $\mu$, e fosse $p' < p-2$. Che il numero dei moduli corrispondenti ad una data curva, possa infatti modificarsi in casi particolari, lo mostra l'esempio delle curve iperellittiche. E difatti, se la $f$ è una tal curva, tutte le curve aggiunte dell'ordine $n-3$ che passano per $p-2$ punti arbitrari della $f$, passeranno anche per altri $p-2$ punti completamente determinati da quelli.

Nel fascio formato da queste curve aggiunte vi sono $4p-2-2(p-2)=2p+2$ curve tangenti alla $f$, e fra i parametri di quest'ultime curve, esistono $2p-1$ rapporti anarmonici indipendenti uno dall'altro. Ma in questo caso sono equivalenti tutti i fasci di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, perchè (§ VI) esiste sulla $f$ una sola serie di gruppi $g_2^{(1)}$; e quindi tutti i predetti rapporti anarmonici sono indipendenti dai $p-2$ punti arbitrari della $f$, e rappresentano perciò i moduli per la curva iperellittica $f$.

## XIV.

### Attuazione di un metodo algebrico per la determinazione dei moduli.

Nel presente § sarà stabilito un metodo algebrico per la determinazione di quei $3p-3$ parametri, che sull'esempio datoci dal Riemann sono stati considerati nel precedente quali moduli di una classe di curve.

Si consideri a tale scopo il fascio $\varphi-\lambda\varphi_1=0$ formato di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che passano per $p-2$ punti arbitrari della $f$, e sia $I=0$ l'equazione della Iacobiana delle curve $\varphi=0$, $\varphi_1=0$, $f=0$.

I punti nei quali la $f$ è toccata da curve di questo fascio, sono i punti mobili d'intersezione di essa colla curva I. Ora sia $R=0$ l'equazione che si ottiene eliminando due delle quantità $x_1, x_2, x_3$ (per es. $x_2, x_3$) dalla $f=0$, $I=0$: se si vuole che dei detti punti d'intersezione delle curve $f$ ed I, $p$ coincidano in un punto P, dovranno verificarsi in questo punto le equazioni di condizione :

$$R=0\,, \quad \frac{dR}{dx_1}=0\,, \quad \frac{d^2R}{dx_1^2}=0\,, \ldots\ldots, \quad \frac{d^{p-1}R}{dx_1^{p-1}}=0.$$

Il fascio $\varphi-\lambda\varphi_1=0$ non potrà dunque prendersi ad arbitrio, ma dovrà scegliersi in guisa, che ad esso appartenga una delle curve della serie :

$$(1) \qquad \varphi_1+\frac{\lambda_1}{\lambda}\varphi_2+\frac{\lambda_2}{\lambda}\varphi_3+\ldots\ldots+\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda}\varphi_p=0$$

(formata colle $p$ curve aggiunte dell'ordine $n-3$ linearmente indipendenti), che hanno riuniti in un punto P della $f$ $p$ dei loro punti d'intersezione con questa curva, cioè in guisa che la curva $\varphi_1$ vi rappresenti una di queste curve.

Scelto in questo modo il fascio suddetto, delle $4p-2$ curve di esso, che sono tangenti alla $f$, $p-1$ coincideranno in una medesima curva aggiunta $C_{n-3}$; quindi dei $4p-5$ rapporti anarmonici indipendenti, che hanno luogo fra i parametri delle curve del fascio stesso, tangenti alla $f$, $p-1$ avranno il medesimo valore, il quale evidentemente dipenderà da quei $p-2$ punti, nei quali la curva $C_{n-3}$ (oltre in P) sega la $f$, e che abbiamo assunto per formare la base del fascio medesimo. Mediante i $p-1$ rapporti anarmonici ora indicati, si otterranno $p-2$ equazioni fra le coordinate di questi $p-2$ punti, le quali equazioni, unitamente a quelle che derivano dalla $f=0$, alla quale esse coordinate debbono soddisfare, serviranno alla determinazione delle coordinate stesse. E perchè uno dei detti $p-1$ rapporti anarmonici dev'essere anche considerato fra i rimanenti, cos' il numero di questi sarà uguale a $3p-3$; dai quali eliminandovi le coordinate dei $p-2$ punti $x$, risulteranno quelle $3p-3$ funzioni dei rapporti anarmonici $\mu$ (accennate nel § precedente), che rappresentano i moduli della classe di curve, cui appartiene la $f$. Da quanto poi abbiamo altrove dimostrato risulta chiaramente, che i moduli $\tau$ che si sono ora ottenuti, si riferiscono ad una classe composta di un numero limitato di curve, tale essendo quello delle curve (1), che soddisfano alla suindicata condizione (*).

La via che qui ci ha condotto alla determinazione dei moduli $\tau$, fu da lungo tempo indicata dal sig. Weierstrass, come lo fanno osservare i sigg. Brill e Nöther.

## XV.

### Altro metodo per la determinazione dei moduli.

Un altro metodo per determinare un complesso di quantità, che si possono considerare quali moduli di una classe di curve, si basa sulle considerazioni seguenti.

Sia la serie $\infty^{q'}$:

(1) $$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots\ldots + \lambda_{q'+1}\varphi_{q'+1} = 0$$

(*) Il numero di queste curve si ricava dalla formola:

$$\alpha_r = (r+1)(M + rp - r) \qquad \text{per} \qquad r = p-1\ ,\ M = 2p-2\ ,$$

formola che si può dimostrare con considerazioni geometriche, e della quale si legge una elegante dimostrazione algebrica in una Memoria dovuta al sig. Brill (v. il volume IV. dei Math. Annalen).



formata con curve aggiunte dell'ordine $n-3$. Sia poi $q \leqq q'$, e inoltre i numeri $q$ e $q'$ soddisfacciano l'equazione:

(2) $$p - (q'+1)(q+1) = 0.$$

Il problema che consiste nel determinare sulla curva $f$ gruppi $G_{Q'}$ tali, che le curve della serie (1) che passano pei punti di uno di questi gruppi formino una serie $\infty^q$, è stato trattato in altri § di questo scritto, nei quali fu dimostrato, che il problema stesso ha sempre un determinato numero di soluzioni, che ora indicheremo con N. Dunque, dalla serie (1) si otterranno N gruppi $G_{Q'}$; e considerato uno $(L_{Q'})$ di questi gruppi, le curve di detta serie che passano pei suoi punti, formeranno la serie $\infty^q$;

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \ldots\ldots + \alpha_{q+1}\psi_{q+1} = 0\ ,$$

nella quale vi sono $(q+1)(2p-2+qp-q-Q')$ curve, che hanno un contatto $q$-punto colla curva $f$ (*). Quindi il numero dei rapporti anarmonici indipendenti formati coi parametri che individuano quest' ultime curve, sarà uguale a

$$q(q+1)(2p-2+qp-q-Q')-3.$$

Per $q=1$, il numero di questi rapporti si riduce a $2(3p-3-Q')-3$, e questi saranno i moduli della curva $f$, e di tutte le curve che sono generate da due fasci di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, pei quali i punti mobili delle basi coincidono rispettivamente con quelli di due degli N gruppi $G_{Q'}$. In questo caso $p$ sarà un numero pari, come si rileva subito dalla considerazione dell'equazione (2); quindi posto $Q' = \frac{3p}{2} - 3$, il numero dei moduli di questa classe di curve si ridurrà a $3p-3$.

Per $q=2$, il numero dei predetti rapporti diviene uguale a $6(4p-4-Q')-3$, e questi rappresentano i moduli della curva $f$, e di quelle che si ottengono trasformando univocamente la $f$ con un sistema $\infty^2$ di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che passano per uno degli N gruppi $G_{Q'}$. In questo caso sarà $p=3\pi$; quindi supposto $Q' = \frac{4p}{3} - 4$, il numero dei moduli di questa classe di curve si ridurrà a $16p-3$.

Finalmente, se in luogo dell'equazione (2) si assume l'altra:

$$\varepsilon = p - (q'+1)(q+1)\ ,$$

(*) V. la nota al § precedente.

e si suppone che per $q=1$ sia $\varepsilon=1$, sarà $p$ un numero dispari, e quindi posto $Q'=\frac{3p-1}{2}-3$, si otterranno $3p-2$ moduli per la curva $f$, e per quelle che si ottengono nel modo suindicato mediante due fasci di curve aggiunte dell'ordine $n-3$. Qui però potremo fare in modo, che due dei $3p-2$ moduli abbiano lo stesso valore, ciò che ridurrà il numero di questi moduli a $3p-3$. Ma si può anche riguardare uno dei $3p-2$ moduli come rappresentante il parametro che individua la serie dei gruppi, dalla quale si sono ricavati gli N gruppi $G_{Q'}$.

Se $q=2$ ed $\varepsilon=1$ oppure 2, sarà $p$ un numero della forma $3\pi+1$ o $3\pi+2$, quindi posto rispettivamente $Q'=\frac{4p-1}{3}-4$ o a $\frac{4p-2}{3}-4$, si otterranno nel primo caso $16p-1$ moduli, e nel secondo $16p+1$, che apparterranno alla curva $f$, e a quelle che si ottengono nel modo più sopra indicato mediante una serie $\infty^2$ di curve aggiunte dell'ordine $n-3$. Riguarderemo poi uno o due di questi moduli, secondochè si tratterà del primo o del secondo di questi due casi, come rappresentante il parametro o i parametri, che individuano la serie dei gruppi da cui derivano gli N gruppi $G_{Q'}$.

Giova tuttavia osservare, che anche nel caso $q=2$, per la classe di curve che vi corrisponde si può fissare a $3p-3$ il numero dei moduli. E infatti si supponga che $p$ sia un numero della forma $3\pi$ o $3\pi+1$ o $3\pi+2$, e $Q'=p+\pi-4$; e si trasformi la curva $f$ mediante una serie $\infty^2$ di curve aggiunte dell'ordine $n-3$, che passano per uno dato degli N gruppi $G_{Q'}$. Così si otterrà una curva F dell'ordine $p-\pi+2$, punteggiata proiettivamente alla $f$, e l'equazione della F conterrà ancora:

$$\frac{1}{2}(p-\pi+5)(p-\pi+2)-\left\{\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi)-p\right\}=4p-3\pi+5.$$

costanti.

Ma operando una trasformazione lineare fra le coordinate dei punti della curva F, cioè esprimendo queste coordinate mediante funzioni lineari di tre variabili omogenee, si potranno assegnare ad 8 delle suddette costanti dei determinati valori, e così ne rimarranno arbitrarie $4p-3\pi-3$, cioè un numero che è uguale rispettivamente a $3p-3$, $3p-2$, $3p-1$, secondochè è $p=3\pi$, $3\pi+1$, $3\pi+2$. Presi ora ad arbitrio $4p-3\pi-3$ punti fissi sulla $f$, ad essi ne corrisponderanno altrettanti sulla F, e si otterranno così $4p-3\pi-3$ equazioni per determinare le costanti ancora arbitrarie di questa curva. Le $4p-3\pi-3$ quantità che si ottengono in questo modo, si potranno sempre considerare come i moduli della classe di curve accennata più sopra, quando si parta però da una determinata curva F della classe, e questa classe si supponga data. Dobbiamo poi far notare, che dei $4p-3\pi-3$ punti fissi presi sulla curva $f$, uno o due serviranno alla determinazione della serie dei gruppi $G_{Q'}$, secondochè sarà $p=3\pi+1$ o $p=3\pi+2$; e così nei tre casi $p=3\pi$, $3\pi+1$, $3\pi+2$, il numero dei moduli che si sono ora ottenuti, si potrà sempre riguardare come uguale a $3p-3$.



## XVI.

## Curve a doppia curvatura che corrispondono ad una data classe di curve.

Nei §§ precedenti abbiamo fissato a $3p-3$ il numero dei moduli di una classe di curve piane; si tratta ora di determinare tutte quelle curve dello spazio, che sono di un dato ordine Q; punteggiate proiettivamente alla $f$, e quindi di un genere $p$ uguale a quello di questa curva. Tali curve dello spazio si considereranno come corrispondenti ad una data classe di curve piane, della quale fa parte la $f$.

S'immagini una serie $\infty^3$ di curve aggiunte, e si supponga che dei punti mobili d'intersezione di tre curve qualunque di questa serie colla curva $f$, un unico punto sia comune a tutte e tre, e sia:

(1) $$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\alpha_3\varphi_3+\alpha_4\varphi_4=0$$

l'equazione di una tal serie. Le curve di essa si potranno sempre far corrispondere univocamente ai piani:

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3+\alpha_4y_4=0$$

dello spazio, e così si otterranno le formole di trasformazione:

$$y_1:y_2:y_3:y_4=\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3:\varphi_4,$$

che dalla curva $f=0$ conducono ad una curva a doppia curvatura F, la quale sarà di un certo ordine Q, e del medesimo genere $p$ della $f=0$. Il numero delle curve F, che corrispondono univocamente alla $f$, si dovrà quindi dedurre dal numero delle costanti contenute in queste formole di trasformazione. Ora se le $\varphi$ saranno dell'ordine $n-3$, siccome Q soddisfa all'equazione (§ VIII):

$$Q-(q'+1)q-q=p-(q'+1)(q+1),$$

che per $q=3$ dà $Q=p+2-q'$, si dedurrà subito che dev'essere $Q\leqq p+2$. In quest'ipotesi il numero delle suddette costanti deve coincidere con quello che esprime da quante condizioni è individuata la serie $g_Q^{(3)}$, che separano sulla curva $f$ le curve (1); al quale si potrà poi aggiungere quello delle costanti (in numero di 15), che si ottengono trasformando le $y$ mediante funzioni lineari omogenee di quattro variabili $z$. Ma detto $\varepsilon$ il numero delle condizioni che individuano una serie $g_Q^{(q)}$ separata sulla $f$ da curve aggiunte dell'ordine $n-3$, si ha (§ VIII):

$$\varepsilon=Q(q+1)-q(q+p+1),$$

quindi per $q=3$ sarà $\varepsilon=4Q-3(p+4)$; e aggiungendo 15 a questo numero, si otterrà il numero $4Q-(3p-3)$.

Se poi è $Q>p+2$, si considereranno le curve della serie (1) d'un ordine $>n-3$; e perchè dei punti mobili d'intersezione di una curva aggiunta d'ordine $>n-3$ colla $f$, $p$ sono completamente determinati dai rimanenti (§ III), e però un gruppo $G_Q$ separato sulla $f$ da una di dette curve aggiunte è determinato da $Q-p$ punti arbitrari della $f$ stessa, così potremo far passare la curva $\varphi_1$ della serie (1) per un gruppo di Q punti arbitrari della $f$, e ciascuna delle $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ per $Q-p$ punti scelti ad arbitrio su questa curva, e diversi dall'una all'altra di queste tre curve $\varphi$. E potendo poi dare ad ognuna delle funzioni $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ una costante arbitraria per fattore, si avranno in tutto:

$$Q+3(Q-p)+3=4Q-(3p-3)$$

costanti.

Nelle predette formole di trasformazione entreranno quindi $(Q-3)+3(Q-p-3)$ costanti arbitrarie, a cui si potranno in seguito aggiungere altre 15 costanti provenienti da una trasformazione lineare delle coordinate. Si giunge così al teorema:

*Una serie* $\infty^{4Q-(3p-3)}$ *di curve a doppia curvatura del genere* p *e dell'ordine*

$$Q\left(Q \geqq p-\pi+3 \qquad \text{ovvero} \qquad Q \geqq \frac{3}{4}(p+4)\ (\S\ \text{IX})\right),$$

*corrisponde sempre ad una medesima classe di curve piane algebriche, i cui moduli hanno i più generali valori.*

Osservando finalmente che fra le $4Q-(3p-3)$ costanti suindicate, $3p-3$ non sono altro che i moduli della classe di curve accennata in questo teorema, così, prescindendo da questa classe di curve, si concluderà che:

*Esiste una serie* $\infty^{4Q}$ *di curve a doppia curvatura, dell'ordine* Q *e del genere* p $\leqq \frac{4}{3}Q-4$.

## XVII.

### Gruppi particolari di punti nel piano.

Accade in molte applicazioni, fra le quali è notevole quella che riguarda la rappresentazione univoca delle superficie sul piano, di dover considerare nel piano dei sistemi di un numero finito di punti, talmente situati, che fatte passare per essi curve di un dato ordine, per le quali un certo numero dei punti stessi sia costituito da altrettanti punti semplici, e il rimanente da punti multipli fissi su tutte queste curve, si ottenga una serie di gruppi di punti, che si renderà nota mediante la diretta enumerazione. I teoremi dei §§ III e IV offrono il modo di costruzione di siffatte serie di curve, mercè le proprietà di una delle curve, appartenente ad una di queste serie. E difatti, se si considera una curva di una tal serie, oppure una parte $f$ (dell'ordine $n$) di una curva decomponibile della serie stessa, le rimanenti curve di questa serie determineranno sulla curva $f$ una serie di gruppi di punti, che si considererà come una serie particolare di gruppi $G_Q$; e il problema attuale si ridurrà a quelli trattati in altri §§ di questo scritto. Vi sarà poi da tener conto delle condizioni inerenti alla serie di gruppi ora considerata, le quali non dipendono affatto dai punti che la $f$ ha in comune con tutte le curve della serie suddetta.



Si supponga che i gruppi $G_Q$, separati sulla curva $f$, formino ivi una serie $\infty^q$. Noi abbiamo dimostrato nel § III, che questi gruppi si possono ottenere sulla curva $f$ col mezzo delle curve aggiunte dell'ordine $s$ $(s \geqq n)$ d'una serie $\infty^q$, e, se essi sono gruppi particolari, col mezzo delle curve aggiunte dell'ordine $s=n-\mu$ $(\mu \geqq 3)$ d'una serie $\infty^q$ (§ IV). Potremo dunque, secondo il teorema del § IV considerare la serie delle curve, i cui punti base fissi sono sulla curva $f$, e l'ordine delle quali è $s$, come equivalente ad una serie lineare di curve aggiunte dell'ordine $s$. Ora indicata con $C_s$ una qualunque curva aggiunta dell'ordine S, l'equazione d'una curva dell'ultima serie qui nominata sarà della forma (§ III):

$$E_s \equiv C_s + A_{s-n}\cdot f = 0\,,$$

dove $A_{s-n}=0$ è l'equazione d'una curva algebrica arbitraria dell'ordine $s-n$. Così qualunque sia la posizione dei punti fissi sulla $f$, pei quali debbono passare tutte le curve dell'anzidetta serie, noi potremo sottoporre queste curve a soddisfare ancora a:

$$t=\frac{1}{2}(s-n+1)(s-n+2)$$

condizioni lineari; e per mezzo delle equazioni che vi corrispondono si potranno considerare come determinati i valori di altrettante delle costanti, da cui dipende ancora la serie stessa. Il numero delle condizioni lineari che ci vorranno ancora per individuare una curva della serie, sarà dunque, rispetto alla curva $f=0$, il grado $q$ d'infinità della serie medesima.

Supponiamo ora che sian qualunque le curve $E_s$, e solo sottoposte a dover passare per certi punti fissi della $f$. Allora le condizioni che potranno ancora prescriversi per queste curve $E_s$, si possono supporre di tale natura, che le curve stesse abbiano in un punto $i^{\text{uplo}}$ della $f$ un punto $k^{\text{uplo}}$ $(k \geqq i)$. Sia P questo punto della $f$; dalla dimostrazione che abbiamo dato al § I, a proposito del teorema dei resti, si dedurrà subito, che quel teorema conserva la sua validità, se si suppone che le curve aggiunte che vi sono considerate seghino ciascuno dei rami della curva $f$, che passano per un punto $i^{\text{uplo}}$ di questa curva in $k$ punti, dei quali $k-i$ sono infinitamente vicini, ed $i$ cadono nel punto $i^{\text{uplo}}$ stesso. Quindi alle curve $E_s$ sarà applicabile il teorema dei resti, se supporremo ch'esse abbiano nel punto P della $f$ un punto $i^{\text{uplo}}$, e seghino inoltre ciascuno dei rami della $f$, che passano per P, in $k-i$ punti infinitamente vicini. Volendo dunque che nel punto P abbiano luogo per le curve $E_s$ tutte le condizioni che equivalgono a quelle di un punto $k^{\text{uplo}}$, converrà sottoporre le curve stesse a soddisfare ad altre:

$$\rho = \frac{1}{2} k(k+1) - \left\{ \frac{1}{2} i(i+1) + i(k-i) \right\} = \frac{1}{2}(k-i)(k-i+1)$$

condizioni lineari.

Sia ora $\Sigma\rho$ il numero totale delle condizioni, che si ottengono in questo modo col considerare tutti i punti multipli della curva $f$; se sarà $\Sigma\rho \leqq t$ si potrà sempre fare che le curve $E_s$ soddisfacciano a tutte le $\Sigma\rho$ condizioni, senza però che queste abbiano alcuno influsso nè sui punti fissi comuni alle $E_s$ e alla $f$, nè sui punti mobili comuni alle $E_s$ e alla $f$. Le curve $E_s$ formeranno allora una serie $\infty^{q-t+\Sigma\rho}$. Ma se $\Sigma\rho > t$, le curve $E_s$ che soddisfano alle $\Sigma\rho$ condizioni, formeranno una serie lineare, il cui grado d'infinità sarà uguale a $q-(\Sigma\rho-t)$, serie che potrà sempre riguardarsi come risultante da una serie analoga $\infty^q$.

L'equazione di tutte le curve $E_s$, che soddisfano alle $\Sigma\rho$ condizioni suddette, è della forma:

$$C_s + A_{s-n} \cdot f = 0 ,$$

dove ora supporremo che la curva $C_s$ abbia in ogni punto $i^{\text{uplo}}$ della $f$ un punto multiplo d'un certo ordine $k$ di moltiplicità ($k \geqq i$), ma che può variare da uno all'altro dei punti multipli della $f$, e la $A_{s-n}$ sia la più generale curva dell'ordine $s-n$, la quale abbia in ciascuno dei medesimi punti della $f$ un punto $(k-i)^{\text{uplo}}$. Nel caso di $\Sigma\rho > t$, la funzione $A_{s-n}$ si ridurrà a zero, e le curve $E_s$ (o $C_s$) formeranno una serie $\infty^{q-\Sigma\rho+t}$.

Ammettiamo (per esempio) che la $f$ sia una curva iperellittica del 6° ordine, e del genere $p=3$, la cui equazione sia della forma $\Sigma c_l c_{l'} \alpha_{ll'}$ $(l, l' = 1, 2, 3)$, dove $\alpha_{ll'}$ significano delle costanti, e le $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=0$ sono le equazioni di tre curve del 3° ordine con 7 punti in comune $a_1, a_2, \ldots, a_7$.

Le cubiche aggiunte formano una serie $\infty^2$, definita dall'equazione:

$$c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0 ,$$

e determinano sulla curva $f$ una serie $g_4^{(2)}$ di gruppi di 4 punti.

Si possono ora sulla $f$ determinare i punti base per serie particolari di curve $C_7$ del 7° ordine.



Conveniamo d'indicare una curva $C_7$, che abbia il punto $a_1$ per punto doppio, ed ivi le medesime tangenti della $f$; il punto $a_2$ per punto triplo, e i punti $a_3, a_4, \ldots, a_7$ per punti semplici, colla notazione $\{[a_1^2]\, a_2^3\, a_3 \ldots a_7\}$; allora le seguenti curve $C_7$:

$$\{[a_1^2]\, a_2 a_3 \ldots a_7\} \ ; \ \{[a_1^2][a_2^2]\, a_3 \ldots a_7\} \ ; \ \{[a_1^2][a_2^2][a_3^2]\, a_4 \ldots a_7\} \ ;$$
$$\{[a_1^2][a_2^2][a_3^2][a_4^2]\, a_5 a_6 a_7\}$$

formeranno delle serie, che saranno rispettivamente:

$$\infty^{24} \ , \ \infty^{20} \ , \ \infty^{16} \ , \ \infty^{12} ;$$

e le altre curve $C_7$:

$$\{a_1^3 a_2 \ldots a_7\} \ ; \ \{a_1^3 a_2^3 a_3 \ldots a_7\} \ ; \ \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4 \ldots a_7\} \ ; \ \{a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7\}$$

delle serie, che saranno rispettivamente:

$$\infty^{23} \ , \ \infty^{18} \ , \ \infty^{13} \ , \ \infty^{8} .$$

Ora per le prime delle $C_7$ sono $\Sigma\rho=0$, $t=3$, quindi per mezzo della $f=0$ queste curve formeranno delle serie rispettivamente:

$$\infty^{21} \ , \ \infty^{17} \ , \ \infty^{13} \ , \ \infty^{9} .$$

Per le seconde delle $C_7$ sono rispettivamente $\Sigma\rho=1$, $\Sigma\rho=2$, $\Sigma\rho=3$, $\Sigma\rho=4$, e per tutte $t=3$; quindi per mezzo della $f=0$, queste curve formeranno delle serie rispettivamente:

$$\infty^{21} \ , \ \infty^{17} \ , \ \infty^{13} \ , \ \infty^{7} .$$

Per esempio le curve $C_7 \{a_1 a_2 \ldots a_7\}$, che passano inoltre per 24 punti fissi della $f$, formano una serie $\infty^4$, la quale per mezzo della curva $f=0$ si riduce ad una serie $\infty^1$.

Parimente le curve $C_7 \{a_1 a_2 \ldots a_7\}$, che passano inoltre per 22 punti fissi della $f$, formano una serie $\infty^6$, che per mezzo della $f=0$, si ridurrà ad una serie $\infty^3$.

I gradi d'infinità di queste serie rimarranno i medesimi, anche se alcuni dei punti fissi delle curve $C_7$ che le formano, colla $f=0$, cadranno nei punti $a_i$, purchè per le serie stesse rimanga sempre $\Sigma\rho=0$. Inoltre non varieranno i punti di intersezione di queste curve $C_7$ colla $f=0$, anche se cadendo alcuni dei punti fissi comuni a queste curve e alla $f$ nei punti $a_i$, il valore di $\Sigma\rho$ cesserà di essere uguale a zero, purchè però si mantenga sempre inferiore a quattro.