CORRADO SEGRE

OPERE

a cura
dell'UNIONE MATEMATICA ITALIANA
e col contributo del
CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOLUME I

EDIZIONI CREMONESE
ROMA 1957

XV.

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA SOPRA UN ENTE ALGEBRICO SEMPLICEMENTE INFINITO

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie II, tomo XXII, 1894, pp. 41-142.

A ENRICO D'OVIDIO *ed* EUGENIO BERTINI
in segno di gratitudine ed affetto. (*)

La *geometria sopra una varietà algebrica*, semplicemente infinita (curva), doppiamente infinita (superficie), ecc., cioè quella che studia le proprietà invariabili per trasformazioni birazionali della varietà (v. § 3), conduce naturalmente (§ 4) a considerare su questa delle *serie lineari* (di gruppi di punti, di curve, ecc.). Una tal serie è definita sulla varietà da un'equazione che contenga linearmente uno o più parametri. In altri termini se la serie è ∞^1 ogni suo elemento si compone di tutti quei punti della varietà nei quali una determinata *funzione razionale* delle coordinate prende uno stesso valore. Geometricamente si rappresenta con vantaggio una serie lineare ricorrendo ad una particolare varietà su cui essa vien segata dagl'iperpiani del suo spazio: ad es. una serie lineare di gruppi di punti sull'ente algebrico semplicemente infinito mediante una curva, una serie lineare di curve (di dimensione > 1) di un dato piano o di una superficie qualunque mediante una superficie, ecc.

La geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ed in particolare lo studio delle funzioni razionali dell'ente ossia delle serie lineari di suoi gruppi di punti, fondata dal RIEMANN [1], si è poi svolta secondo vari indirizzi: quello funzionale che deriva appunto da quel sommo matematico; quello algebrico-geometrico che è dovuto

(*) Questa dedica non esiste nel volume degli Annali di matematica qui indicato, ma solo negli estratti della presente Memoria, ed è stampata in una pagina apposita (N. d. R.).

[1] *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal für Math., 54, 1857).

principalmente all'importante lavoro dei sig^{i}. BRILL e NOETHER (2); quello algebrico-aritmetico seguito dal KRONECKER (3) da un lato e dai sig^{i}. DEDEKIND e WEBER (4) da un altro. — Ora, nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle rigate algebriche, e in generale sulle varietà composte di ∞^1 spazi, avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella Memoria BRILL-NOETHER, mi accorsi come ricorrendo invece alle rigate ed alle dette varietà di spazi, e rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali nel senso già accennato, si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali che occorrono per stabilire il teorema del NOETHER fondamentale per quella Memoria. Così dalla considerazione di due curve in corrispondenza univoca (imagini di due serie lineari di uno stesso ente algebrico) e della rigata delle congiungenti i loro punti omologhi, giungevo a qualche caso particolare del *Restsatz* di BRILL e NOETHER, vale a dire dei teoremi sulle serie complete, residue, ecc. (§ 14) (5). E poi da una formola fondamentale relativa ad una varietà algebrica composta di ∞^1 spazi e ad una curva segnata su essa (§ 13) (6) ottenevo qualche proposizione che si collega al teorema RIEMANN-ROCH (§ 19), come il teorema di CLIFFORD, ecc. (7). Poco dopo il mio amico sig. CASTELNUOVO, entrando più di proposito nell'argomento, esponeva in modo assai più completo e sistematico una trattazione geometrica delle serie lineari sopra una curva algebrica (8).

---

(2) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., VII, 1873). Qui è fondamento il considerare la *curva piana* come imagine dell'ente algebrico, come pure l'applicazione di un teorema del sig. NOETHER relativo alle condizioni perchè una curva si possa rappresentare con $A\varphi + B\psi$, ove φ e ψ son curve date.

(3) Specialmente nelle sue lezioni. V. la Nota: *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln* (Journal für Math., 91, 1881).

(4) *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* (Journal für Math., 92, 1882).

(5) V. le *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (Atti Acc. Torino, XXI, 1886), ad es. i n.^{i} 3, 8; le *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (1.^{e} Partie, Math. Ann., XXX, 1887; 2.^{e} Partie, Math. Ann., XXXIV, 1887), ad es. i n.^{i} 6 e seg. della 1.^{a} Parte [V. pp. 56, 80, 125 di questo volume].

(6) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (Rend. Acc. Lincei, luglio e ottobre 1887) [V. pp. 110, 114 di questo volume].

(7) *Sulle curve normali di genere* p *dei vari spazi* (Rend. Ist. Lomb., aprile 1888) [V. p. 119 di questo volume].

(8) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti Acc. Torino, XXIV, 1889). V. anche il lavoro, di poco anteriore, *Geometria sulle curve ellittiche* (ibid., XXIV, 1888).

Nella Memoria attuale io espongo appunto il metodo geometrico che si è formato mediante questi lavori, quale è stato poi elaborato per un corso di lezioni di geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito svolto nell'anno 1890-91 (9). In questo metodo non occorrono considerazioni funzionali, nè sviluppi algebrici: unico modo con cui compare l'algebricità degli enti è col principio di corrispondenza per le forme semplici razionali. L'esposizione verrà fatta principalmente con la mira di divulgare certe considerazioni geometriche che, se anche non sono più nuove, pure non sono abbastanza diffuse; sebbene in questi ultimi tempi, specialmente per opera del sig. CASTELNUOVO e di qualche altro giovane valoroso, abbiano dato alla scienza risultati essenzialmente nuovi ed importanti. Tali considerazioni e mezzi di ricerca possono ancora rendere grandi servigi, e non solo per la geometria sull'ente algebrico semplicemente infinito, ma anche per la geometria sopra una superficie, ecc. È in vista di ciò che nel 1.° dei tre capitoli in cui questo lavoro si può dividere si dànno le generalità spettanti alla geometria su una varietà di qualunque dimensione, anzi che limitarsi a quelle relative

---

(9) In quelle lezioni, a lato del metodo geometrico qui esposto, furono pure svolti il metodo Riemanniano e quello di BRILL e NOETHER. L'argomento in fatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. Ond'è che l'aver io qui preso ad esporlo dal punto di vista geometrico non va interpretato nel senso di una preferenza che a mio avviso si debba dare a questo metodo rispetto agli altri. Tutti meritano di essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso degli altri. Ma il metodo geometrico sul quale mi permetto di richiamare l'attenzione è appunto quello meno conosciuto finora. Quanto agli altri, oltre che nei lavori originali, qualcuno fu nuovamente esposto assai recentemente nel 1.° vol. (1890) delle *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* del KLEIN (e FRICKE), non che nelle Lezioni litografate dello stesso KLEIN (1892) sulle RIEMANN *'sche Flächen*; e nel 2.° vol. (1893) del *Traité d'Analyse* del sig. PICARD. In particolare il metodo algebrico-geometrico fondato da BRILL e NOETHER viene ora di nuovo svolto con opportuni ampliamenti e modificazioni dal chiar. prof. BERTINI (i cui amichevoli incitamenti hanno pure influito nel risolvermi all'attuale publicazione), in una Memoria che uscirà in questi *Annali* insieme con questa mia. Grazie a tale combinazione, da noi espressamente desiderata, ed accolta gentilmente dal chiar. Direttore degli *Annali*, i lettori di questi potranno vedere in pari tempo un argomento trattato con due metodi ben diversi. Ma affinchè ciascuno dei due scritti si possa studiare indipendentemente dall'altro, non abbiam creduto di dover rimandare dall'uno all'altro per quelle cose — poche del resto — che occorrevano ad entrambi: ognuno di noi ha esposto per proprio conto ciò che gli poteva servire.

agli enti semplicemente infiniti (10). Nel 2.° Cap. si espongono varie proprietà e formole relative a questi enti: anche qui alcune cose, come il § 11 sui punti multipli di una serie lineare ed il § 12 sul principio di corrispondenza CAYLEY-BRILL, pur riguardando questioni di lor natura importantissime, non sarebbero necessarie pel seguito. Nel 3.° Cap. si ricorre anzitutto (§ 15) alle curve aggiunte di una curva piana per la costruzione effettiva delle diverse serie lineari sull'ente algebrico ∞^1 di genere p e per ottenere il noto limite minimo $n-p$ della dimensione di una serie lineare completa d'ordine n. In base poi a due proposizioni fondamentali (§§ 13 e 14) del 2.° Cap. si possono ottenere tutte le principali proprietà delle serie lineari (v. specialmente i §§ 17 e 19).

L'indice seguente servirà a dar subito un'idea più precisa dell'ordinamento del lavoro.

Torino, autunno 1893.

---

(10) Ond'è che il lettore il quale avesse urgenza di veder trattati in particolare gli enti ∞^1 potrebbe sorvolare su quel 1.° Cap.: nel quale poi vi sono talune cose forse troppo note, ma che conveniva presentare riunite con altre meno conosciute. — Valgano alcune di queste ultime (specialmente il § 1) a richiamar l'attenzione di qualche geometra su certi lavori aritmetico-algebrici, sulla teoria generale dell'eliminazione, ecc. del KRONECKER e della sua scuola; i quali lavori mi pajono d'importanza capitale per fondare solidamente l'edifizio geometrico (degli enti algebrici).

INDICE

Capitolo I.

Capitolo II.

Capitolo III.

CAPITOLO I.

§ 1. Le varietà algebriche.

1. Per ben definire il nostro argomento occorre stabilire: 1.° quali sono gli enti di cui ci occuperemo; 2.° quali sono le trasformazioni di essi che fissiamo come *fondamentali*; cosicchè le proprietà degli enti stessi che intenderemo studiare siano quelle che non mutano per tali trasformazioni ([11]).

2. Gli *elementi* delle varietà che considereremo saranno rappresentabili mediante *gruppi di numeri* (numeri complessi), e potranno ricevere, oltre all'interpretazione puramente *analitica* (aritmetica) che così se ne ha, infinite forme d'interpretazioni *geometriche*, se quei gruppi di numeri si assumono come *coordinate* ([12]) di enti geometrici, punti, rette, ..., curve, superficie, ecc. Noi prescindiamo in generale da ogni scelta speciale d'interpretazione. Solo, per comodità, adotteremo il linguaggio geometrico degl'iperspazi; sicchè ad esempio in luogo di *elemento* diremo *punto*, ecc. Ma così facendo non intendiamo escludere l'interpretazione puramente analitica della parola «*punto*»; e pur accogliendo d'altra parte tutte le possibili interpretazioni geometriche, ci asteniamo dal far dipendere l'essenza delle nostre ricerche dai postulati della geometria.

3. Per *varietà algebriche* si potrebbe pensar di definire quelle composte di tutti i punti le cui coordinate sono date *funzioni algebriche* di uno o più parametri variabili indipendenti. Ma questa definizione non sarebbe abbastanza generale, cioè non darebbe tutte le varietà che si soglion chiamare algebriche; ed inoltre non sarebbe invariantiva per trasformazione di coordinate ([13]). Si dovrebbe modi-

---

([11]) Cfr. il Programma del sig. F. KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872; ristampato nei Math. Ann., XLIII); o la traduzione italiana del sig. FANO nel tom. (2) 17, 1890, degli Annali di Matematica.

([12]) Alle volte considereremo anche coordinate *omogenee*: ciò si capirà sempre dal discorso.

([13]) Si pensi ad esempio ad una curva sghemba dello spazio ordinario. Se essa fosse definita dal dare per le coordinate dei suoi punti tre funzioni algeficarla aggiungendo che i valori da assumersi per quelle funzioni algebriche in corrispondenza ad ogni gruppo di valori di parametri siano legati da una o più equazioni algebriche date.

Il modo più generale di definire le varietà algebriche (14) consiste invece nel considerar come tale *l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfanno ad un numero qualunque di date equazioni algebriche, nelle quali possono anche comparire razionalmente dei parametri indeterminati* (15).

Rientrano evidentemente in questa definizione generale, oltre a quella accennata da prima, le due seguenti definizioni particolari. 1.° Come *intersezione* di varietà rappresentate ognuna da un'equazione algebrica fra le sole coordinate; vale a dire, se è S_d (di dimensione d) lo spazio che si considera, di varietà algebriche M_{d-1} di dimensione $d-1$. 2.° Come luogo dei punti le cui coordinate sono date funzioni razionali di un certo numero di parametri legati fra loro da un'equazione algebrica.

4. Data una varietà algebrica definita nel modo più generale suddetto, essa può comporsi di *parti* aventi diverse dimensioni (16). Con opportune trasformazioni appartenenti alla teoria generale dell'eliminazione si riesce (17) a rappresentare staccatamente quelle par-

---

briche [generiche], non tutte razionali, di un parametro, vi sarebbe almeno un punto fondamentale dal quale la curva sarebbe projettata *più volte*; cioè la curva ammetterebbe almeno un *cono di corde* (o trisecanti, ecc.).

(14) Suggeritomi dallo studio del *Festschrift* del KRONECKER: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Journal für Math., 92, 1881, pp. 1-122). V. anche MOLK: *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination* (Acta Math., 6, 1885, pp. 1-166).

(15) Questa definizione ha evidentemente carattere invariantivo per trasformazione di coordinate. — Inoltre da essa segue che *projettando* una varietà algebrica da un punto (ad es. un punto fondamentale) si ha ancora una varietà algebrica (rappresentata dalle stesse equazioni, nelle quali però una coordinata — quella corrispondente al detto punto fondamentale — non si consideri più come *coordinata*, ma come *parametro*). — E segue pure che l'*intersezione* di due o più varietà algebriche è (se esiste) una varietà algebrica.

(16) Non occorre avvertire che il concetto di *dimensione* a cui noi alludiamo è quello che derivò dalle ricerche di G. CANTOR; che si basa non solo sul numero dei parametri che determinano gli elementi, ma anche sulla *continuità* della corrispondenza fra questi e quelli.

(17) V. KRONECKER, loc. cit., p. 28; e MOLK, p. 147.

ti [18]. Si dimostra allora [19] che una tal parte, cioè una varietà algebrica di dimensione determinata, quando questa sia $= d - 1$, cioè inferiore di un'unità a quella dello spazio ambiente, si può rappresentare con un'equazione unica fra le coordinate; ed in generale quando la dimensione ha un valore qualsiasi si può rappresentare come l'intersezione *completa* di $d + 1$ varietà M_{d-1} rappresentate da singole equazioni [20]. — Così pure, sempre con procedimenti algebrici della stessa natura, si dimostra che una M_k algebrica si può rappresentare, *e ciò ha la massima importanza per noi*, come la trasformata *birazionalmente* (cfr. il § 2) di una M_k di S_{k+1} (la 2.ª delle definizioni particolari con cui finiva il num. prec.) [21]. Ciò si può

---

[18] Nel seguito una varietà (sottint. *algebrica*) di dimensione determinata k s'indicherà brevemente con M_k. Così M_0 potrà indicare un gruppo (di un numero finito) di punti.

[19] Cfr. KRONECKER, p. 30; MOLK, p. 163.

[20] Si può ad esempio rappresentare una curva dello spazio ordinario come l'intersezione completa di 4 suoi coni projettanti. Ed in generale *una M_k di S_d con $k < d - 1$ è l'intersezione completa di $d + 1$ coni M_{d-1} che la projettino da spazi S_{d-k-2}, purchè questi siano presi in posizione conveniente (generale)*. In fatti suppongasi che già si abbiano i di siffatti coni projettanti, i quali si taglino, oltre che nella data M_k, in una o più varietà irriduttibili M_{d-i}: come già si ha subito per $i = 1$. Un nuovo cono projettante la M_k avrà comuni coi precedenti, oltre la M_k, delle M_{d-i-1}, *a meno che* contenga una di quelle M_{d-i}. Perciò sarebbe necessario che un punto A fissato ad arbitrio su questa (fuori della M_k) stesse in uno spazio S_{d-k-1} generatore del cono; sicchè l'*asse* S_{d-k-2} del cono conterrebbe allora un punto della retta che congiunge il punto A a quel punto della M_k che è projettato dal detto spazio generatore; ossia l'asse S_{d-k-2} incontrerebbe il cono M_{k+1} che da A projetta la M_k: il che si può evitare. Procedendo in questo modo si finirà dunque per avere $d + 1$ coni che all'infuori della M_k non avranno altri punti comuni.

E' facile vedere che *meno* di $d + 1$ varietà M_{d-1} non basterebbero in generale per determinare, come loro intersezione *completa*, una M_k. Veggasi ad es. per le curve sghembe dello spazio ordinario VAHLEN: *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven* (Journal für Math., 108, 1891).

Dal teorema del KRONECKER sopra riferito si può trarre che il numero dei punti d'incontro di una M_k (algebrica) di S_d con un S_{d-k} non muta (in generale, cioè finchè rimane finito) al mutare di questo spazio. Ciò si può anche stabilire per induzione completa osservando che è vero per una M_k di S_{k+1} (come mostra l'equazione); e che la proposizione stessa vale per la M_k di S_d e precisamente pei suoi incontri con due S_{d-k} aventi un punto comune, se ha luogo per la M_k projezione di quella su un S_{d-1} dal detto punto. Il numero, ben determinato, dei punti d'incontro di una M_k di S_d con un S_{d-k} generico si chiama *ordine* della M_k.

[21] Cfr. KRONECKER, p. 31; MOLK, p. 155.

effettuare geometricamente, per esempio, con una projezione della M_k da un S_{d-k-2} (fondamentale) su un S_{k+1} (lo spazio fondamentale opposto), sicchè i punti $(x_1 x_2 \ldots x_d)$ della M_k vengono ad esser legati da equazioni della forma:

$$(1) \qquad f(x_1 \ldots x_{k+1}) = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_{k+2} = \psi_{k+2}(x_1 \ldots x_{k+1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_d \quad = \psi_d(x_1 \ldots x_{k+1}), \end{cases}$$

dove f è funzione *intera*, e le ψ funzioni *razionali* (22). Si possono allora riguardare le (1) e (2) come equazioni di $d-k$ varietà M_{d-1} (la prima *cono*, le altre *monoidi*) che si tagliano secondo la M_k (23). Ma si può anche dire che le (2) fanno corrispondere birazionalmente la M_k primitiva a quella (projezione) che in S_{k+1} è definita dalla (1).

Introducendo coordinate omogenee ($x_0 x_1 \ldots x_d$ pei punti di S_d e $y_0 y_1 \ldots y_{k+1}$ per quelli di S_{k+1}) si può dare ad una tal rappresentazione di una M_k di S_d la forma:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_d = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots : \psi_d(y)$$

con

$$f(y_0 y_1 \ldots y_{k+1}) = 0,$$

essendo le ψ ed f *forme* (algebriche intere) nelle y, tali che ogni punto x corrisponda in generale ad un solo punto y.

5. Fra le varietà algebriche son da distinguere le varietà *razionali* od *omaloidi*. Chiameremo così quelle per le quali le coordinate dei punti son funzioni *razionali* di un certo numero k di parametri indipendenti, *con la condizione* che vi sia corrispondenza univoca in ambi i sensi fra i punti della varietà ed i gruppi di valori di quei k parametri. Vedremo poi (n.° 24) che questa condizione, almeno nel caso di $k = 1$, è superflua.

---

(22) Estensione della nota rappresentazione *monoidale* delle curve sghembe dovuta al CAYLEY: v. HALPHEN: *Recherches de géométrie à* n *dimensions* (Bull. Soc. math. de France, 2, 1873, pp. 34-52). Ivi si troverà pure, dedotto da questa rappresentazione, il teorema che il numero delle intersezioni di una M_k ed una M_{d-k} di S_d è dato dal prodotto dei loro ordini.

(23) La M_k però non è l'intersezione *completa* di quelle varietà (sicchè non vi è contraddizione con un asserto precedente): esse hanno anche comuni tutti quei punti che verificano la (1) e rendono indeterminate le ψ, i quali punti possono non giacere sulla M_k. — È facile vedere che si può render *completa* la rappresentazione in discorso ponendo insieme colle *equazioni* (1) e (2) una *disuguaglianza* a cui debbano soddisfare le coordinate (cfr. MOLK, p. 153).

§ 2. Le corrispondenze algebriche.

6. La nozione di *corrispondenza algebrica* fra due varietà X, Y rientra in quella già definita di *varietà algebrica*: concetto noto, importante e fecondo. Se cioè si considera la *coppia di punti* x, y presi su X, Y come *elemento*, una varietà algebrica di tali elementi darà origine a ciò che diremo appunto una *corrispondenza algebrica* fra X, Y. Questa è dunque definita da un sistema di equazioni algebriche fra le coordinate dei punti x, y, sistema che abbraccia anche le equazioni che definiscono rispettivamente X ed Y. La definizione della corrispondenza può esser tale che nelle sue equazioni compajano (razionalmente) oltre ai punti x, y, anche dei parametri variabili. Ma per quanto sopra (n.º 4) s'è detto si potranno sempre eliminare tali parametri.

Se ad ogni punto y di Y corrisponde un numero finito $\alpha > 0$ di punti x su X, si potrà dal sistema dato di equazioni ricavare le coordinate di x come funzioni algebriche ad α valori delle coordinate di y, vale a dire si potrà ottenere per ciascuna coordinata di x un'equazione di grado α i cui coefficienti son funzioni razionali delle y: e ciò con semplici eliminazioni (operazioni di massimo comun divisore). Invero se il campo X è determinato da *una* variabile x (X è una *retta*) avremo per definire la corrispondenza un certo numero di equazioni fra x e le y; ed è noto che da esse si trae razionalmente (appunto con l'operazione del massimo comun divisore) un'equazione unica di grado α in x, la quale determina appunto nel modo detto tutti i punti x di X corrispondenti ad uno stesso punto y. Se poi i punti x hanno *più* coordinate $x_1 x_2 x_3 \ldots$, basta che nel sistema delle equazioni che definiscono la nostra corrispondenza fra i punti x, y di X, Y si riguardino $x_2 x_3 \ldots$ come *parametri*, per avere una corrispondenza fra l'unica variabile x_1 ed il punto y di Y, sì che ad ogni tal punto y corrispondono α valori di x_1: laonde x_1 sarà funzione algebrica ad α valori delle coordinate y; ed analogamente $x_2, x_3 \ldots$

7. Segue da ciò che una corrispondenza algebrica fra due varietà è *univoca* in un senso, solo quando essa in quel senso è *razionale*, vale a dire quando le coordinate dei punti dell'una varietà si possono esprimere come funzioni algebriche ad un valore, cioè *razionali* di quelle dei punti omologhi dell'altra; sicchè chiamando x ed y le coordinate omogenee dei punti omologhi delle due varietà

si possa porre (le ψ essendo forme):

$$x_0 : x_1 : \ldots = \psi_0(y) : \psi_1(y) : \ldots$$

Sarà *biunivoca* solo se è *birazionale*, sicchè oltre a queste equazioni si possan scrivere le analoghe:

$$y_0 : y_1 : \ldots = \varphi_0(x) : \varphi_1(x) : \ldots$$

Due varietà in corrispondenza birazionale con una terza sono pure in corrispondenza birazionale fra loro.

La definizione algebrica data precedentemente (n.° 5) delle varietà razionali equivale a dire che sono quelle che corrispondono (algebricamente e) biunivocamente a *spazi*. Segue che se una varietà corrisponde biunivocamente ad una razionale sarà essa stessa razionale; e che due M_k razionali sono riferibili fra loro biunivocamente in infiniti modi.

8. Considerando *tra due varietà semplicemente infinite* (M_1) *razionali* una corrispondenza (α, α') (24), risulta dal n.° 6 che essa si può rappresentare con un'equazione di gradi α, α' fra i *parametri* x, x' degli elementi omologhi delle due forme; in particolare che una corrispondenza (1, 1) si può rappresentare con un'equazione *bilineare*, sicchè si riduce ad una *projettività* nel caso che si tratti di due forme fondamentali (mentre se si tratta di forme non fondamentali si può assumere l'univocità — sempre, s'intende, con l'algebricità, — oppure l'equazione bilineare, come *definizione* delle corrispondenze *projettive*). Se nell'equazione di una corrispondenza (α, α') fra gli elementi di una M_1 razionale si suppone che gli elementi omologhi x, x' coincidano si ottengono $\alpha + \alpha'$ *elementi uniti*: noto *principio di corrispondenza* formulato dallo CHASLES (25). È nell'ap-

(24) Nel seguito dicendo una corrispondenza (α, α') fra due varietà s'intenderà una tal corrispondenza che ad ogni punto della *1.ª varietà* corrispondano α' punti nella *2.ª varietà*, e ad ogni punto della 2.ª α punti nella 1.ª.

(25) Cfr. su esso i miei Appunti storici nella Bibl. math., 6, XX, 1892, p. 33 [V. p. 185 di questo volume].

Come si sa, nell'applicare questo principio si deve badare alla *multiplicità* da attribuire ai vari elementi uniti: ed appunto nello stabilire quella multiplicità sta qualche volta il difficile. Un caso semplice noto è il seguente: quando un elemento è tale che, in qualunque delle due varietà sovrapposte lo si consideri, sempre *due* dei suoi omologhi dell'altra varietà cadano in esso, allora lo si deve contare *due* volte (almeno) nel numero complessivo $\alpha + \alpha'$ degli elementi uniti. La proposizione (che non sarebbe più vera se in luogo di *due* si ponesse un numero maggiore) si verifica subito sulle equazioni, ad es. ponendo che l'elemento di cui si tratta corrisponda al valore $x = 0$ del parametro. Essa si può invertire plicazione di questo principio che comparirà nei punti più essenziali del nostro studio l'algebricità degli enti e quindi il *teorema fondamentale dell'algebra.*

§ 3. La geometria sopra una varietà algebrica.

9. Possiamo ora (cfr. n.º 1) definire semplicemente l'oggetto della *geometria sopra una varietà* M_k. Essa è *la geometria che studia le proprietà della* M_k *invariabili per trasformazioni birazionali della varietà stessa* (26).

Le proprietà *projettive* della M_k, cioè quelle che non mutano per trasformazioni projettive o lineari, mutano generalmente per trasformazioni birazionali qualunque della M_k: quindi è solo una parte di esse che costituisce la geometria sulla M_k. Così mutano in generale per trasformazioni birazionali la dimensione dello spazio cui appartiene la M_k, l'ordine di questa, le sue singolarità, ecc.

Si può profittare di ciò, prendendo come rappresentante delle M_k, o meglio di un *corpo* o *classe* di M_k composto di varietà tutte riferibili birazionalmente fra loro, una che stia in uno spazio di opportuna dimensione (abbastanza elevata od abbastanza bassa); o che abbia un ordine conveniente, ad es. minimo; o che abbia singolarità opportune; ecc.

10. Riguardo alla *dimensione dello spazio* della M_k possiamo già enunciare questa proposizione importante (n.º 4): *per la geometria su una* M_k *di un* S_d, *ove* $d > k+1$, *si può sostituire a quella una* M_k *di un* S_{k+1}. E se la M_k è razionale, cioè trasformazione birazionale di un S_k, le si può addirittura sostituire un S_k.

---

quando la corrispondenza è *involutoria* o *simmetrica*; sicchè è condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento unito di una corrispondenza involutoria conti due volte nel numero complessivo degli elementi uniti, che due dei suoi elementi omologhi coincidano con esso.

Una proposizione generale sulla multiplicità degli elementi uniti è stata data dal sig. ZEUTHEN nella *Note sur le principe de correspondance* (Bull. des. sc. math., 5, 1873, p. 186)

(26) A vero dire si usa spesso chiamare « geometria *sulla varietà* » quella che studia gli enti *contenuti* nella varietà, senza preoccuparsi delle trasformazioni che si assumono come fondamentali: così quando si chiama *geometria sulla superficie* la teoria di GAUSS, ecc., delle linee tracciate su questa. Però per brevità di linguaggio, quando si è nel campo algebrico-geometrico ho creduto opportuno (anche in lavori precedenti) di fissare per quella locuzione il senso più ristretto sopra enunciato.

In particolare per la geometria su una curva si può assumere la *curva piana*; e la *retta* se si tratta di curva razionale. Per la geometria sopra una superficie si può assumere la *superficie dello spazio ordinario*; e il *piano* se la superficie è razionale. Ecc.

11. Riguardo alle *singolarità* di una M_k, esse nella geometria sopra la varietà vanno considerate come *decomposte* o *risolte* in *elementi*. Questa risoluzione si effettua geometricamente mediante trasformazioni birazionali della varietà, che la riducano ad altra in cui quella singolarità sia scomparsa (cfr. la nota al n.^{0} 20). Analiticamente la stessa risoluzione trova la sua espressione in opportuni *sviluppi in serie* delle coordinate dei punti della varietà negl'intorni dei punti singolari. Si dimostra che nell'intorno di un punto qualunque della M_k le coordinate dei punti di questa si posson esprimere mediante *uno o più* gruppi di serie di potenze intere di k parametri: ognuno di questi gruppi di serie rappresenta un *elemento* della M_k; e l'intorno di un punto qualunque, singolare o no, di questa varietà è un insieme di siffatti elementi. Nel caso di una curva piana $f(x\,y) = 0$ gli elementi che contengono un suo punto $(x_0\,y_0)$ sono tanti quanti gli sviluppi di $y - y_0$ in serie di potenze di $x - x_0$: la loro considerazione trae origine, come si sa, da (Cauchy e) Puiseux; essi furono poi più ampiamente studiati dal Weierstrass (nelle sue lezioni sulle funzioni abeliane) appunto col nome di *elementi*, dal Cayley che li chiamò *rami, lineari e superlineari*, dall'Halphen col nome di *cicli* (corrispondenti ai *sistemi ciclici* del Puiseux di valori della funzione y di x intorno al punto $x_0\,y_0$), e da tanti altri geometri [27]. Analogamente in un punto qualunque di una superficie si hanno uno o più *elementi*, o *falde* superiori, o *cicli di falde* secondo una denominazione dell'Halphen [28]. — È chiaro che in seguito a trasformazioni birazionali un elemento

---

(27) Nel seguito avremo occasione di fare qualche citazione più precisa.

(28) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (Ann. mat., (2) 9, 1877). I lavori sulle singolarità superiori delle superficie e varietà di maggior dimensione sono finora assai scarsi rispetto a quelli relativi alle singolarità delle curve. Per la scomposizione in elementi (sviluppi in serie) delle superficie e varietà superiori va citato specialmente: G. Kobb: *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de math., (4) 8, 1892), a cui si collega la Nota dello stesso autore: *Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Bull. soc. math. de France, 21, juin 1893). Veggasi pure il § III del lavoro del sig. Del Pezzo: *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rend. Palermo, 6, 1892).

si muta in un elemento, ma posson diventare staccati fra loro gli elementi che dapprima avevan comune (come origine) uno stesso punto singolare. Quindi allorquando studiando la geometria su una varietà si ha in questa un punto (singolare) pel quale passano più *elementi* (rami, falde, ecc.) si dirà che ivi si considera un punto *ben determinato*, solo quando sia fissato *l'elemento* su cui lo si vuol considerare.

§ 4. Le serie lineari e le involuzioni. Varietà imagini.

12. Una grande classe di proprietà relative alla geometria su una varietà X di dimensione k contenuta in S_d si legano alla considerazione delle *serie o sistemi lineari* di M_{k-1} giacenti in X. Chiameremo così la serie di M_{k-1} che su questa M_k si ottiene come sezione con un sistema lineare di M_{d-1}:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0 ;$$

con l'avvertenza che ove questo sistema di varietà avesse su X una M_{k-1} *base*, la quale così verrebbe a comparire come *parte* in tutte le M_{k-1} della serie, si possa ad arbitrio toglierla da tutte, ovvero conservarla in tutte. — Così allorquando una curva C^n (d'ordine n) di S_d si sega con un sistema lineare di M^{ν}_{d-1} il quale abbia l punti base su essa, si ottiene una *serie lineare di gruppi* di $n\nu$ punti con quegli l punti fissi; ovvero, togliendo $1, 2, \ldots, l$ di questi punti, delle serie lineari di gruppi di $n\nu - 1, n\nu - 2, \ldots, n\nu - l$ punti.

In particolare è una serie lineare quella segata su una varietà dagl'iperpiani del suo spazio.

Una serie lineare su X può anche comporsi di *un solo* elemento (M_{k-1}), come il sistema lineare di M_{d-1} che la definisce. Una M_{k-1} qualunque di X costituisce su questa una *serie lineare di dimensione zero.*

13. In generale la *dimensione della serie lineare* che si considera sulla varietà X si collega semplicemente alla *dimensione* h *del sistema lineare di* M_{d-1} ed al *numero delle varietà di questo sistema le quali passano per* X. Se due M_{d-1} segano su X lo stesso elemento M_{k-1} della serie, la varietà del loro fascio che passerà per un punto di X esterno a quella M_{k-1} ed alla base del sistema lineare conterrà X(29). Se dunque per X non passa alcuna M_{d-1} del sistema lineare,

(29) A partir di qui supponiamo X (ed in generale ogni varietà su cui studiamo la geometria) *irriducibile,* cioè non composta di due o più distinte varietà della stessa dimensione.

ogni M_{k-1} della serie lineare sarà segata su X da *una sola* varietà del sistema; sicchè la dimensione della serie lineare sarà evidentemente quella stessa, h, del sistema di M_{d-1}. Se invece per X passano ∞^t varietà M_{d-1} del sistema $(t \geq 0)$, esse formeranno un sistema lineare; e questo, con un'altra M_{d-1} del sistema primitivo ∞^h, determinerà un sistema lineare ∞^{t+1} composto di *tutte* le M_{d-1} che passano per la M_{k-1} segata su X da quella. Prendendo allora entro al sistema ∞^h un sistema lineare ∞^r, ove $r = h - t - 1$, che non abbia alcun elemento M_{d-1} comune col sistema ∞^t, esso avrà comune con ogni sistema lineare ∞^{t+1} passante per questo una sola varietà, sempre diversa quando è diverso il sistema ∞^{t+1}; ed è chiaro che *questo nuovo sistema lineare* ∞^r *di* M_{d-1} *darà da sè su* X *tutta quanta la serie lineare di* M_{k-1}, *ogni elemento una volta sola* (30). La serie sarà dunque di dimensione r.

Da r punti *generici* di X sarà individuato un elemento M_{k-1} della serie lineare. Basterà prendere il 1.° punto fuori dei punti base del sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, onde le varietà di questo sistema passanti per esso formeranno un sistema ∞^{r-1}; poi il 2.° punto fuori dei punti base di questo, onde le M_{d-1} passanti per questi 2 punti formeranno un sistema ∞^{r-2}; poi il 3.° punto fuori dei punti base di questo, ecc. ecc.: e ciò si potrà continuare fino alla fine, perchè mai i punti base dei successivi sistemi invaderanno tutta X, essendo che X non sta in alcuna M_{d-1} del sistema ∞^r.

14. La nozione di *serie lineari* spetta giustamente alla geometria sulla varietà. Trasformando *razionalmente* (non occorre *birazionalmente*, cioè *l'invertibilità*) la varietà X in un'altra varietà X' mediante le formole:

$$x_l = f_l(x'),$$

la serie lineare che su X è segata dalle varietà:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

avrà per corrispondenti su X' le varietà che vi sono staccate dall'equazione trasformata:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i [f(x')] = 0,$$

equazione della forma:

$$\Sigma \lambda_i \Phi_i(x') = 0,$$

(30) Nel seguito si potrà sempre intendere che al sistema primitivo ∞^h di M_{d-1} si sia sostituito un sistema ∞^r così fatto.

ove le Φ sono forme nelle x': equazione dunque di un sistema lineare. La serie lineare di X si muta dunque in una serie lineare di X'. Riguardo ai punti fissi, o punti base, della prima serie, cioè punti x di X pei quali le $\varphi_i(x)$ si annullano, essi si mutano in punti x' di X' per cui le $\Phi_i(x')$ son nulle, cioè in punti base della seconda serie: ma l'inverso esigerebbe qualche considerazione ulteriore (che pel seguito non occorre) nel caso di un punto x' di X' che fosse *fondamentale* per la trasformazione, cioè tale da annullare tutte le $f_l(x')$.

15. Per tal modo le serie lineari vengono a presentarsi spontaneamente nello studio delle trasformazioni birazionali della varietà. Ad esempio alle sezioni iperplanari di questa corrispondono nella varietà trasformata le varietà di una serie lineare.

Viceversa supponiamo data sulla varietà X di dimensione k una serie lineare infinita di M_{k-1}:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0,$$

nella quale non vi siano (si sian tolte) *parti* (di dimensione $k-1$) fisse; e si consideri la varietà Y dei punti y di coordinate:

$$y_i = \varphi_i(x),$$

ove le x son legate dalle equazioni che definiscono X. Essa sarà in corrispondenza razionale (in un senso) con X, per modo che a quella data serie lineare di X corrisponde su Y quella costituita dalle sue sezioni iperplanari. La serie lineare data su X determina dunque una trasformazione razionale di questa varietà in un'altra Y su cui la serie corrispondente è segata dagl'iperpiani.

Si può anche dire che quella trasformazione viene eseguita ponendo una corrispondenza lineare o projettiva fra le varietà che costituiscono la serie lineare $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ e gl'iperpiani $\Sigma \lambda_i y_i = 0$ di uno spazio d'ugual dimensione: allora a quelle varietà che passano per un punto generico x di X corrisponderanno iperpiani passanti pure per un determinato punto y; ed il luogo generato da y sarà appunto la varietà Y.

16. È importante di riconoscere sulla serie lineare data su X quando è che la trasformazione che essa definisce è univoca, ossia razionale, *in ambi i sensi* (birazionale). Se un punto y della varietà trasformata Y corrisponde a *due* punti x', x'' di X, sarà (n.° 15):

$$\varphi_i(x') = \varphi_i(x''),$$

a meno di un fattore. Ciò equivale a dire che le due equazioni:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x') = 0 ,$$

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x'') = 0 ,$$

fra i parametri indipendenti λ sono equivalenti fra loro: ossia che il passaggio di una varietà della serie:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

per l'uno dei due punti x' x'' trae di conseguenza il passaggio per l'altro. Dunque: la serie lineare data su X definirà una trasformazione biunivoca, cioè birazionale, di X in una nuova varietà (nel senso spiegato, cioè che a quella serie corrispondano le sezioni iperplanari della nuova varietà), solo quando essa sia tale che il passaggio di un suo elemento per un punto generico di X *non* tragga di conseguenza il passaggio per altri punti mobili.

Il fatto che così si esclude avverrebbe *necessariamente* quando la dimensione r della serie lineare fosse minore di quella k della varietà X: giacchè allora le ∞^{r-1} varietà M_{d-1} passanti per un punto di X taglierebbero questa secondo una M_{k-r} variabile. Ma può accadere anche se $r \geq k$; quantunque se $r > k$ esso sia da considerarsi come eccezionale, cioè esiga che le varietà φ si prendano in modo particolare rispetto ad X.

17. Se su X il passaggio di un elemento M_{k-1} della serie lineare per un punto mobile trae il passaggio per altri *in numero finito*, $\mu - 1$, i punti di X vengono a raggrupparsi a μ a μ in un particolare aggruppamento tale che ogni punto di X individua il gruppo di μ punti di cui fa parte. Un siffatto aggruppamento lo diremo un'*involuzione di grado* μ fra i punti di X. La serie lineare si dirà *composta* mediante l'involuzione, perchè ogni suo elemento è tutto composto di gruppi dell'involuzione. Quando una serie lineare è composta con un'involuzione di grado μ la varietà Y rappresentante la serie ha la stessa dimensione k di X ed è con questa in corrispondenza $(1, \mu)$.

Data su X un'involuzione qualunque di grado μ si costruiscono subito delle serie composte mediante quell'involuzione. Si rappresentino cioè i gruppi di questa coi punti di una nuova varietà X' di dimensione k [31]. Fra X' e X vi sarà corrispondenza $(1, \mu)$, e

---

[31] Come ben si sa, un gruppo di μ punti $x, y, \dots$ di S_d si può determinare simmetricamente ad es. mediante i valori delle somme (funzioni simmetriche)

quindi alle serie lineari su X' corrisponderanno (n.° 14 applicato con lo scambio di X e X') su X serie lineari, le quali evidentemente saran composte con la data involuzione [32].

Non vi sono differenze sostanziali quando in luogo dell'involuzione, cioè dei *gruppi* di un numero finito μ di punti, si abbiano su X infinite *varietà* M_i tali che per un punto generico di X ne passi una sola, e gli elementi M_{k-1} della serie lineare su X sian composti con quelle M_i per modo che quelli che passano per un punto contengano tutta la M_i passante per quel punto. Data su X un'infinità di varietà M_i così fatta, cioè tale che per ogni punto ne passi una sola (sicchè saranno ∞^{k-i}), si costruiscon subito nel modo anzi detto delle serie lineari composte con esse. — Si noti però che una varietà Y rappresentata da una serie lineare così composta avrà ogni suo punto per imagine di tutti i punti di X situati su una di quelle M_i, sicchè sarà solo di dimensione $k-i$. Si è dunque nel caso in cui una varietà X si trasformi razionalmente in una Y *di dimensione minore.*

18. Se X è uno spazio S_k (e $x_0 \dots x_k$ le coordinate in questo), una serie lineare di M_{k-1} in esso sarà data senz'altro dall'equazione:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i(x) = 0 ,$$

sarà cioè un ordinario sistema lineare di varietà dell'S_k. Essa definirà una trasformazione razionale

$$y_i = \varphi_i(x)$$

di quello spazio in una nuova varietà Y. Se la dimensione r di quel sistema lineare è $\geq k$, la Y sarà in corrispondenza *birazionale* coll'S_k e quindi sarà una varietà razionale, se le M_{k-1} passanti per un punto non passano di conseguenza per altri. Nel caso di $r=k$ la Y è pure un S_k e la corrispondenza fra i due spazi X, Y è birazionale o *Cremoniana* se il sistema lineare considerato di X è *omaloidico*, cioè tale che k varietà generiche di esso si taglino in un

---

$a_{il} \dots = \Sigma x_i y_l \dots$ (in cui la somma s'intende fatta tenendo fissi gl'indici e permutando le lettere $x\, y \dots$) : il che equivale a considerare quel gruppo come un inviluppo di classe μ d'iperpiani. Assunte quelle $a_{il} \dots$ come coordinate di punti si ha che un'involuzione di grado μ su una M_k di S_d vien rappresentata da una M_k del nuovo spazio.

[32] Da una proposizione che stabiliremo al n.° 27 (v. anche una nota ivi) seguirebbe poi subito che in tal modo si ottengono su X *tutte* le serie composte con la data involuzione.

sol punto variabile. — Data nello spazio X un'involuzione qualunque di grado μ (oppure un sistema di varietà M_i tale che per un punto generico ne passi una sola) si còstruiranno subito, nel modo detto superiormente (n.^{0} 17) infiniti sistemi lineari di M_{k-1} composti con essa (o col sistema di M_i).

§ 5. Seguito. Varietà multiple.

19. Abbiam visto come una serie lineare ∞^r di M_{k-1} su una varietà X di dimensione k si possa sempre rappresentare con una varietà Y di S_r, la cui dimensione sarà pure k nel caso che $r \geq k$ e che la serie non sia composta mediante M_i $(i > 0)$ nel senso esposto (n.^{0} 17). Questa rappresentazione è molto importante, servendo la varietà Y per lo studio della serie lineare di X, e viceversa questa serie lineare su X per lo studio di Y. Naturalmente, come già avvertimmo (n.^{0} 15), in questa rappresentazione la serie lineare di M_{k-1} si suppone priva di *parti* fisse. Se no, per averne l'imagine, si dovrà considerare, insieme con la varietà Y le cui sezioni iperplanari corrispondono alla serie lineare di X privata della parte fissa, l'imagine di questa su Y.

20. I caratteri della varietà imagine dànno caratteri della serie lineare, e viceversa. Così abbiam già notato come la dimensione della serie lineare sia pur quella dello spazio cui *appartiene* (o in cui *è immersa*) la varietà imagine Y. Vediamo ora che cosa sia per la serie lineare l'ordine della varietà Y. Quest'ordine è il numero dei punti d'incontro di k sezioni iperplanari indipendenti di Y. A questi punti corrispondono — biunivocamente, se, almeno pel momento, supponiamo che la serie lineare non sia in alcun modo composta, sicchè la corrispondenza fra X e Y sia biunivoca — i punti variabili di X in cui s'incontrano k elementi (M_{k-1}) indipendenti della serie lineare. Onde l'ordine di Y è uguale al numero, che diremo n, di questi punti variabili. Nel caso più semplice di $k=1$, l'ordine della curva Y imagine di una serie lineare sulla curva X è il numero dei punti (variabili) di ciascun gruppo di questa serie.

Se sulla varietà X vi sono μ punti (non fissi per la serie) tali che il passaggio per essi sia *una* sola condizione per gli elementi M_{k-1} della serie (cioè tali che il passaggio per l'uno abbia come conseguenza il passaggio per gli altri), si potranno i k elementi indipendenti su nominati assumere in guisa che passino tutti per quei μ punti: sicchè si taglieranno solo più in $n - \mu$ altri punti. Per tal modo si vede che a quei μ punti corrisponderà su Y *un* solo punto, il quale però conterà come μ intersezioni di k sezioni iperplanari qualunque passanti per esso: onde il punto stesso sarà *multiplo*, μ-plo, per Y (33).

Ora se questo fatto accade *sempre*, per ogni punto di Y, cioè se la serie lineare data su X è *composta* mediante un'involuzione di grado μ, ogni punto di Y verrà ad essere μ-plo, e quindi Y non sarà più d'ordine n come nel caso della serie semplice, ma solo d'ordine $n : \mu$. Però, volendo evitare la distinzione fra serie lineari semplici e composte, potremo dire che sempre l'ordine di Y è n, ma che Y può ridursi ad una *varietà multipla*, doppia, tripla, ... μ-pla, cioè ad una varietà d'ordine $n : \mu$ da contarsi μ volte.

21. *La considerazione delle varietà multiple è utilissima.* Essa permette di riguardare come *biunivoca* anche nel caso che prima si escludeva la corrispondenza razionale fra le due varietà X e Y. Se Y è μ-pla, ogni suo punto va considerato come un gruppo di μ punti generalmente distinti; e la corrispondenza con X viene ad essere biunivoca in quanto i μ punti di X che prima corrispondevano ad uno stesso punto di Y ora invece si considerano come corrispondenti rispettivamente ai μ punti di Y sovrapposti in quello. — Così quando la dimensione r della serie lineare data su X è $= k$, la Y coincide con S_k, ma continua ad essere una M_k d'ordine n ($= \mu$ nel caso attuale): *uno spazio* S_k (*retta, piano...*) *n-plo.* Invece di assumere come limite minimo dello spazio che può contenere una M_k^n l'S_{k+1}, possiamo ora prendere l'S_k e così parlare di curva d'or-

---

(33) Lo stesso fatto accade, almeno in generale, se X ha un punto μ-plo x che non sia punto base per la serie lineare ossia pel sistema lineare di M_{d-1} che la definisce: generalmente gli corrisponderà ancora e per ragioni analoghe un punto μ-plo di Y. Ma se x è punto base, non si hanno immediatamente punti omologhi su Y: per averne bisogna considerare i punti di X che sono infinitamente vicini ad x, vale a dire le *tangenti* ad X in x. Ognuna di queste, quando non sia tangente comune a tutte le M_{d-1} del sistema, ha un determinato punto come corrispondente su Y. E se le M_{d-1} che toccano in x una tangente generica di X non ne toccano di conseguenza altre, avverrà che a tangenti diverse corrisponderanno su Y punti diversi: cosicchè allora le imagini su Y dei punti di X infinitamente vicini ad x formeranno una M_{k-1}. L'ordine di questa sarà il numero delle tangenti variabili in x ad X che son pure tangenti a $k-1$ M_{d-1} generiche: quindi in generale, se il sistema di M_{d-1} passa *semplicemente* pel punto x, sarà uguale alla multiplicità μ di x per X. Ecc. ecc.

dine n distesa sulla retta, di superficie d'ordine n distesa sul piano, ecc. Ed invece di prendere come rappresentanti delle M_k nella geometria su queste varietà le M_k di S_{k+1} (v. n.^0 10) possiamo anche assumere le M_k di S_k, ossia gli S_k multipli (che si otterrebbero ad es. proiettando su un S_k le M_k qualunque che son date) (34).

Riguardo alle varietà multiple aggiungiamo che col loro mezzo si può riguardare come biunivoca una corrispondenza *d'indici qualunque* (μ, μ') fra due varietà: basta che queste si considerino come multiple risp. secondo μ' e μ. Ciò si rende sensibile ad es. considerando come intermediaria la varietà delle rette che congiungono i punti omologhi delle due varietà date (o semplicemente la varietà delle coppie di punti omologhi): ad essa è riferita biunivocamente la 1.ª di queste se i suoi punti si contano μ' volte, e la 2.ª se se ne contano μ volte i punti. — Si avverta poi in generale che quando s'introduce nello studio una varietà multipla, per potersene valere, anzi perchè la cosa abbia un senso ben definito, bisogna che sia sempre data una varietà semplice con cui quella varietà multipla sia in corrispondenza biunivoca determinata: come nell'esempio citato, in cui i μ punti di una varietà μ-pla che occupano uno stesso luogo son rappresentati da μ rette distinte uscenti da questo.

Si potrebbero anche considerare varietà multiple in cui ogni punto va contato *infinite volte*. Così abbiam visto (n.^0 17) che quando la varietà X si trasforma razionalmente mediante una sua serie lineare composta di varietà M_i $(i > 0)$ tali che per un punto generico di X ne passi una sola, la trasformata Y ha i suoi punti che sono imagini ognuno di tutti i punti di X costituenti una M_i; ciascun punto di Y si dovrebbe dunque contare ∞^i volte per poter concepire come biunivoca la corrispondenza fra X e Y. Anche qui può soccorrere la rappresentazione mediante la varietà delle coppie di punti omologhi di X ed Y.

22. Meritano un cenno speciale le *varietà doppie*. Quando una varietà Y di dimensione k si considera come *doppia*, ciò vuol dire che si pensa ad un'altra varietà X con un'*involuzione di 2.° grado* riferita biunivocamente ad Y, ogni punto di Y rappresentando una

(34) Com'è noto, alla rappresentazione delle curve mediante una retta multipla si collega subito la rappresentazione *reale* con *superficie di* RIEMANN: i punti complessi della retta si rappresentano coi punti reali del piano o della sfera reale; ed all'esser la retta n-pla corrisponde il sovrapporsi di n fogli sulla superficie, ecc.

coppia di punti di quell'involuzione su X e viceversa. Mentre le coordinate dei punti y di Y son funzioni razionali di quelle dei punti omologhi x di X, le coordinate di un punto x di X son funzioni algebriche a due valori di quelle del punto omologo y, e quindi del tipo:

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)},$$

ove le funzioni A_i, B_i, R son razionali e si possono anzi, introducendo coordinate omogenee, supporre intere. La $R(y)$ si può supporre priva di fattori multipli; e si può ammettere che sia una stessa funzione per tutti i valori di i, sicchè anche x_k contenga solo il radicale che compare in x_i: giacchè è chiaro che in generale x_k è funzione algebrica ad un valore delle y e della x_i, cioè delle y e di $\sqrt{R(y)}$, e però si esprimerà razionalmente con queste. — L'equazione:

$$R(y) = 0$$

determina sulla varietà Y una varietà M_{k-1} composta di quei punti y (all'infuori eventualmente di punti eccezionali che annullino anche le $A_i(y)$) pei quali coincidono i due omologhi su X: *la varietà limite* o *varietà di diramazione* della varietà doppia Y, o della corrispondenza (1, 2) fra Y ed X. Ad essa corrisponde univocamente su X la M_{k-1} *doppia* dell'involuzione di 2.° grado.

Abbiansi due varietà X, X' che si rappresentino sulla varietà doppia Y con la stessa varietà M_{k-1} di diramazione $R(y) = 0$; per modo che si possan definire risp. con le equazioni:

$$x_i = A_i(y) + B_i(y)\sqrt{R(y)}$$
$$x'_i = A'_i(y) + B'_i(y)\sqrt{R(y)}.$$

È chiaro che esse saranno in corrispondenza algebrica biunivoca, se si considerano come omologhi due loro punti x, x' quando corrispondano agli stessi valori delle y e di $\sqrt{R(y)}$ (oppure anche a valori opposti per $\sqrt{R(y)}$; sicchè si hanno *due* corrispondenze biunivoche). Dunque le varietà semplici che rappresentano una data M_k doppia con una determinata M_{k-1} limite sono tutte equivalenti fra loro (per trasformazioni birazionali) (35). Ha quindi un senso pienamente determinato il dire: la M_k doppia con una data varietà limite. Due va-

(35) Almeno finchè la loro rappresentazione analitica si può far dipendere da un radicale quadratico il cui annullamento non stacchi dalla M_k alcun'altra M_{k-1} che la varietà limite. Questa restrizione vale anche per le linee seguenti.

rietà X, X' di dimensione k, riferite biunivocamente a due varietà *doppie* Y, Y' determinate risp. da due M_{k-1} limiti, si potranno riferire biunivocamente fra loro se si posson riferire biunivocamente le varietà *semplici* Y, Y' in modo che si corrispondano quelle due M_{k-1} (36).

È così che si può parlare della retta doppia con $2p+2$ dati punti di diramazione come rappresentante di una classe ben determinata di curve (*iperellittiche*; cfr. § 16); del piano doppio con conica limite e di quello con quartica limite (37); ecc.

Tutto ciò non si potrebbe estendere senz'altro a varietà μ-ple per $\mu > 2$. Non possiamo cioè asserire che sia ben determinata una tal varietà quando si assegni su essa la varietà limite.

§ 6. Serie lineari contenute in una data.

23. Data sulla varietà X di dimensione k dello spazio S_d una serie lineare ∞^r di M_{k-1}, che possiam supporre vi sia segata da un dato sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, i sistemi lineari minori che son contenuti in questo quando $r > 1$ segano su X delle serie lineari di M_{k-1} contenute nella ∞^r. Rappresentando questa con la varietà Y (di dimensione $\leq k$) di S_r, le serie lineari minori che così si ottengono saran segate su Y dalle forme fondamentali d'iperpiani di S_r. *E la serie lineare* ∞^r *non contiene altre serie lineari minori che queste.* E più in generale possiamo osservare che: *se entro una serie lineare di dimensione* $r > 1$ *di* M_{k-1} *su* X *si ha una serie algebrica infinita* [*di* M_{k-1} *non aventi componenti multiple variabili*] *tale che per* r' *punti generici di* X (38) *passi una sola di queste* M_{k-1}, *questa serie*

---

(36) Se dunque una varietà X ammette un'involuzione di 2.° grado riferibile nel modo detto alla varietà Y, ma non più involuzioni trasformabili birazionalmente fra loro, i suoi *moduli* (cioè numeri che non mutano per trasformazioni birazionali della varietà X) saranno precisamente i moduli che la $M_{k-1}\, R(y) = 0$ ha *sopra la* Y (cioè numeri relativi alla detta M_{k-1} i quali non mutano per trasformazioni birazionali di Y).

(37) Così dal fatto che queste due specie di piani doppi si posson sempre ottenere come imagini (projezioni) di una quadrica (da un punto esterno) o di una superficie cubica (da un punto semplice), e dall'essere queste superficie rappresentabili biunivocamente sul piano, cioè razionali (escluso il cono cubico), segue che quei due piani doppi (il 2.° se la quartica limite non si spezza in 4 rette concorrenti) son riferibili biunivocamente al piano, cioè che son razionali tutte le superficie rappresentabili su quei due piani doppi.

(38) E quindi per i gruppi di punti (o le M_i) collegati ad essi, nel caso che la serie lineare ∞^r sia composta con un'involuzione (o con un sistema di M_i).

sarà una serie lineare di quelle già considerate entro la data. In fatti rappresentando la serie lineare ∞^r su Y, quella serie algebrica M_{k-1} di X avrà per imagine una serie di sezioni iperplanari di Y tale che per r' punti generici di Y ne passerà una sola [39]: donde segue [40] che gl'iperpiani di quelle sezioni costituiscono appunto una forma fondamentale, cioè passano per uno stesso $S_{r-r'-1}$ [41].

24. L'ultima proposizione, generale, trova un'applicazione immediata alle *varietà razionali.* Se X è una M_k razionale e su essa si

---

[39] Anche se Y fosse ***multipla***, sicchè a quegli r' punti corrispondessero su X altrettanti gruppi di punti, od M_i (v. la nota preced.).

[40] Si ha in S_r una serie algebrica $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y passa un solo iperpiano. Si tratta di dimostrare che la serie si compone degl'iperpiani passanti per un $S_{r-r'-1}$.

Sia anzitutto $r' = 1$. Allora se gli ∞^1 iperpiani non formassero un fascio, per un punto generico di S_r ne passerebbe più di uno, onde essi avrebbero un ***inviluppo*** M_{r-1}; e su questo dovrebbe stare Y, perchè per ogni suo punto coincidono gl'iperpiani che lo contengono. Dunque gli ∞^1 iperpiani sarebbero ***tangenti*** ad Y nei punti in cui l'incontrano; sicchè le varietà d'incontro sarebbero ***varietà di contatto*** (come sarebbero ad es. quelle determinate su un ordinario cono quadrico dai suoi piani tangenti), a differenza di quelle segate su Y dagl'iperpiani generici di S_r. Invece l'ipotesi che sopra si ammette è che la serie algebrica $\infty^{r'}$ stia in quella lineare ∞^r ***semplicemente***, cioè senza contar come ***multiple*** le sue varietà. Segue che veramente per $r' = 1$ si hanno gl'iperpiani di un fascio.

Ed ora suppongasi $r' > 1$ e che si sia dimostrato l'asserto per serie (algebriche) d'iperpiani di dimensione $< r'$, sicchè per es. si abbia che una $\infty^{r'-1}$ d'iperpiani tale che per $r'-1$ punti generici di Y ne passi un solo si componga degl'iperpiani uscenti da un $S_{r-r'}$. Data la $\infty^{r'}$ d'iperpiani tale che per r' punti generici di Y ne passi un solo, e preso su Y un punto A (non comune alla $\infty^{r'}$), gl'iperpiani di quella serie i quali passano per A passeranno per un $S_{r-r'}$; mentre gl'iperpiani della stessa serie i quali passano per un nuovo punto B di Y non situato su questo spazio passeranno per un secondo $S_{r-r'}$; e questi due spazi staranno in un $S_{r-r'+1}$ per cui debbon passare gl'iperpiani della serie che contengono in pari tempo A e B. Gl'iperpiani della serie uscenti da un nuovo punto C di Y non posto sull'$S_{r-r'+1}$ congiungente i due $S_{r-r'}$ avranno comune un terzo $S_{r-r'}$ che incontrerà quei due secondo spazi $S_{r-r'-1}$ necessariamente coincidenti (col primo $S_{r-r'-1}$ [comune ai primi $S_{r-r'}$]), giacchè altrimenti l'$S_{r-r'}$ relativo a C starebbe nell'$S_{r-r'+1}$ congiungente i primi due. Dunque movendosi C su Y gl'iperpiani della serie $\infty^{r'}$ passanti per esso passano sempre per un $S_{r-r'-1}$ fisso: come si voleva dimostrare.

[41] Questa proposizione, essenziale pel seguito, fu da me esposta già da alcuni anni pel caso che la varietà X sia una curva. Essa va confrontata con quella, più recente, che esporremo al n.° 27 (v. anche la relativa nota a piè di pag.).

ha una serie infinita algebrica di M_{k-1}, nella rappresentazione birazionale di X su un S_k a quelle varietà corrisponderanno M_{k-1} di un certo ordine: contenute dunque nella serie lineare composta di tutte le M_{k-1} di quell'ordine dell'S_k. Dunque anche la serie algebrica di M_{k-1} di X è contenuta in una serie lineare di M_{k-1}; e però le si può applicare quella proposizione generale, sicchè: *sopra una* $\mathrm{M_k}$ *razionale una serie infinita algebrica di* $\mathrm{M_{k-1}}$ [*non aventi componenti multiple variabili*] *tale che per un certo numero di punti generici ne passi una sola è una serie lineare.*

Così per $k = 1$ si ha che sopra una curva razionale una serie (algebrica) di gruppi di punti [distinti] tale che da alcuni punti generici sia individuato un gruppo è *lineare*, ossia un'*involuzione* ordinaria. — Se una curva si può rappresentare ponendo per le coordinate delle funzioni razionali di un parametro λ, e ad ogni punto della curva corrispondono n valori di λ, in altri termini se la curva è in corrispondenza $(1, n)$ con una retta (su cui si distende il parametro λ), gli ∞^1 gruppi di n punti di questa che corrispondono ai singoli punti della curva saranno tali che ogni punto della retta farà parte di un solo gruppo. Dunque formeranno un'involuzione, cioè una varietà semplicemente infinita razionale, alla quale sarà riferita biunivocamente la curva: sicchè questa sarà *razionale*. Cfr. la definizione del n.° 5 (42).

25. Da quella proposizione del n.° 23 che si riferisce alle serie lineari contenute in una data ∞^r di X, segue che se si cambia (com'è possibile) il sistema lineare di M_{d-1}

$$\Sigma\, \lambda_i\, \varphi_i(x) = 0$$

che sega su X la serie lineare ∞^r di M_{k-1} senza che questa muti, con che cambieranno anche i sistemi lineari di M_{d-1} contenuti in quello, non muteranno però le serie lineari minori di M_{k-1} che questi staccano su X. Cosicchè le relazioni fra le serie lineari minori contenute nella serie lineare ∞^r (riguardo agli elementi M_{k-1} con cui si posson determinare o che esse hanno di comune, ecc.) son le

(42) Appunto ora il sig. CASTELNUOVO è riuscito a dimostrare l'analoga proposizione per le superficie: ogni superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri è rappresentabile biunivocamente sul piano; ossia ogni serie algebrica di gruppi di punti del piano tale che un punto generico stia in un sol gruppo (*involuzione piana*) è razionale: *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Rend. Acc. Lincei, ottobre 1893).

stesse che quelle esistenti fra i sistemi lineari minori contenuti in un sistema lineare ∞^r di M_{d-1}, ossia quelle esistenti fra gli spazi contenuti in un S_r. Inoltre, mutando il sistema lineare di M_{d-1} che stacca su X la data serie, cioè mutando le φ, la varietà Y definita dalle formole:

$$y_i = \varphi_i(x),$$

rimarrà sempre *collineare* a se stessa (sicchè, projettivamente parlando, non muta); giacchè due tali varietà Y saranno dalla corrispondenza con la X riferite fra loro in una corrispondenza algebrica univoca tale che alle sezioni iperplanari dell'una corrispondono le sezioni iperplanari dell'altra, e agl'iperpiani di una forma fondamentale gl'iperpiani di una forma fondamentale: donde una collineazione fra i due S_r e le rispettive varietà Y. Trasformando *birazionalmente* X in una nuova varietà X', e quindi (n.⁰ 14) la serie lineare ∞^r di X in una serie lineare ∞^r di X', avremo che le varietà Y, Y' imagini di queste due serie saranno *collineari* fra loro. *La geometria sulla varietà* X *(geometria delle trasformazioni birazionali) quando su questa si fissi una serie lineare* ∞^r *di* M_{k-1} *equivale alla geometria projettiva della varietà* Y *imagine della serie.*

26. Se la serie lineare ∞^r considerata su X contiene una serie lineare $\infty^{r'}$, esse si potranno (pel n.⁰ preced.) supporre date su X dalle equazioni:

$$\sum_0^r \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

$$\sum_0^{r'} \lambda_l \varphi_l(x) = 0,$$

e quindi le varietà imagini Y, Y' si potranno rappresentare con

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 0, \dots, r)$$

$$y'_l = \varphi_l(x) \qquad (l = 0, \dots, r')$$

(le x essendo legate dalle equazioni che definiscono X). Ora da queste formole riesce evidente che Y' si può riguardare come projezione di Y (dallo spazio $S_{r-r'-1}$ che congiunge i punti fondamentali $r'+1, \dots, r$ di S_r). D'altra parte è chiaro che viceversa se una varietà Y' è projezione di un'altra Y, la serie lineare rappresentata da Y' ha per omologa (è projezione di) quella serie che su Y vien segata dagl'iperpiani passanti per lo spazio centrale di projezione, e quindi è contenuta nella serie rappresentata da Y. *È dunque la stessa cosa dire che una serie lineare è contenuta* [*totalmente*] *in un'al-*

tra e dire che la varietà imagine della 1.ª serie è projezione della varietà imagine dell'altra ([43]).

Riguardo a ciò conviene osservare che la serie lineare $\infty^{r'}$ potrebbe avere dei punti fissi i quali non fossero tali per la serie lineare ∞^r: si ottiene una tal serie lineare contenuta nella ∞^r se si considerano gli elementi M_{k-1} di questa i quali passano per $1, 2, \ldots$ punti dati di X (in modo che esistano elementi siffatti). Questi punti che son fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r possono anche (per $k > 1$) essere infiniti, in guisa da formare una o più varietà; e possono addirittura costituire una M_{k-1} che farà parte di tutte le M_{k-1} elementi della serie $\infty^{r'}$. In tali casi la serie $\infty^{r'}$ è segata su Y da una forma fondamentale $\infty^{r'}$ d'iperpiani il cui sostegno $S_{r-r'-1}$ incontra Y nei punti fissi speciali per quella serie: la varietà Y', essendo la projezione di Y da quel sostegno su un $S_{r'}$, avrà dunque in tal caso un ordine minore di quello di Y, — s'intende finchè sussiste la nozione di *ordine*, cioè finchè $r' \geq k$. — Saranno uguali gli ordini di Y, Y' se lo spazio centrale di projezione $S_{r-r'-1}$ non incontra Y, vale a dire se non vi sono punti su X che sian fissi per la serie $\infty^{r'}$ e non per la ∞^r. Allora (cfr. n.º 20) il numero dei punti d'incontro variabili di k elementi generici della serie ∞^r è lo stesso che il numero dei punti variabili d'incontro di k elementi generici della serie $\infty^{r'}$.

Una serie lineare ∞^r di M_{k-1} sulla varietà X di dimensione $k \leq r$ si può chiamare *completa* (« *Vollschaar* ») se non è contenuta [totalmente] in una serie lineare di maggior dimensione (dello stesso ordine) con lo stesso numero di punti d'incontro variabili di k elementi generici; *parziale* nel caso opposto. D'altra parte dicesi *normale* una varietà M_k di S_r se non è projezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore ([44]). Noi possiamo

---

([43]) Così, per fare sin da ora qualche esempio, dal fatto che sopra una M_1 razionale (o retta) una serie lineare di gruppi di n punti è contenuta in quella ∞^n composta da *tutti* i gruppi di n punti segue che una curva razionale d'ordine n (o minore) è sempre projezione della curva d'ordine n appartenente ad S_n. Similmente si vede che le superficie razionali rappresentate sul piano da sistemi lineari di curve d'ordine n sono projezioni di quella superficie, d'ordine n^2, appartenente allo spazio di dimensione $n(n+3)/2$, che è rappresentata dal sistema di *tutte* le curve piane d'ordine n. Ecc. ecc. Cfr. VERONESE: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., XIX, 1881).

([44]) Si dice pure che una data M_k ha per *spazio normale* un S_r quando la varietà *normale* dello stesso ordine di cui essa è projezione appartiene ad S_r.

dunque dire che: *una serie lineare completa ha per imagine una varietà normale, e viceversa.*

27. Credo opportuno di non chiudere questo paragrafo senza prima esporre una proposizione più completa che quella generale del n.⁰ 23: *Sulla varietà* X *di dimensione* $k > 1$ *una serie algebrica* ∞^r *di* M_{k-1} *irriducibili tale che* $r > 1$ *e che per* r *punti generici di* X *passi una sola* M_{k-1} *è certamente una serie lineare* (45).

Consideriamo anzitutto il caso di $r = 2$, sicchè su X si abbia una ∞^2 di M_{k-1} tali che per due punti generici ne passi una sola, o, come diremo più brevemente, una *rete* di M_{k-1}. Per un punto A di X (non fisso per la rete) ne passeranno ∞^1 formanti ciò che diremo un *fascio*. Presa una M_{k-1} nella rete ma non in questo fascio, per ogni punto generico B di essa passerà *un* elemento del fascio; sicchè quella M_{k-1} (non potendo, in causa della supposta irriducibilità, incontrare secondo *parti* M_{k-1} di sè stessa qualche elemento del fascio) dovrà comporsi di ∞^1 varietà M_{k-2} d'intersezione di essa risp. con gli ∞^1 elementi del fascio A. Una tale M_{k-2} d'intersezione di due M_{k-1} della rete ha tutti i suoi punti C su tutte le ∞^1 M_{k-1} della rete che passano per uno di essi, B: giacchè per B e C passano per ipotesi *due* elementi M_{k-1} della rete, e quindi infiniti. Adunque dalle mutue intersezioni degli elementi della rete si ottengono su X infinite M_{k-2} tali che un punto generico di X sta su *una* di esse (l'intersezione di due M_{k-1} passanti per esso) e che le M_{k-1} della rete si *compongono* mediante le M_{k-2}, nel senso in cui alla fine del n.⁰ 17 abbiam parlato di serie di M_{k-1} composte di M_i. Due M_{k-1} della rete si tagliano in *una* M_{k-2}; per due M_{k-2}

(45) Essa è dovuta al sig. ENRIQUES, di cui riproduco pure, un po' modificata, la dimostrazione; v. *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Rend. Acc. Lincei, luglio 1893). — Quasi simultaneamente il sig. CASTELNUOVO ha trattato il caso di $k=1$ dimostrando che: *sopra una curva algebrica una serie* ∞^r, *ove* $r > 1$, *di gruppi di punti tale che* r *punti generici stiano in un sol gruppo è lineare, tolto il caso che i suoi gruppi si compongano raggruppando ad* r *ad* r *i gruppi di un'involuzione semplicemente infinita non razionale* (*di grado* ≥ 1): v. la Nota *Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica* (Atti Acc. Torino, giugno 1893). La dimostrazione è meno semplice che quella relativa al caso $k > 1$ (caso che si potrebbe far derivare, come i due Autori citati hanno osservato, da quello $k = 1$): essa vien basata dal sig. CASTELNUOVO sulla rappresentazione per mezzo d'integrali Abeliani delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva (rappresentazione già abilmente adoperata dal sig. HURWITZ in lavori che avremo da citare più tardi).

passa *una* M_{k-1}. Rappresentando per semplicità queste $\infty^2 M_{k-2}$ biunivocamente sui punti di una superficie F, alle M_{k-1} della rete corrisponderanno su F una ∞^2 *algebrica* di linee tali che due di esse si tagliano in *un* punto e che per due punti ne passa *una*. In particolare dunque (supponendo questi due punti infinitamente vicini) le linee uscenti da un punto generico di F (fascio) corrispondono biunivocamente (ed algebricamente) alle loro tangenti in quel punto e quindi costituiscono una ∞^1 *razionale*. I punti di F potendosi determinare come intersezioni delle linee di due tali fasci, se ne trae subito — come nell'ordinaria costruzione delle collineazioni piane mediante due coppie di fasci omologhi di raggi — che F si può riferire birazionalmente ad un piano in modo che le ∞^2 linee corrispondono alle rette del piano (potendosi anzi prendere ad arbitrio di 4 linee date di F le 4 rette omologhe sul piano). Si può dunque ottenere la rete di M_{k-1} di X trasformando razionalmente la serie delle rette del piano: donde segue (n.⁰ 14) che essa è una serie lineare.

Se poi si ha su X una ∞^r (con $r > 2$) di M_{k-1} irriducibili tale che per r punti generici ne passi una sola, suppongasi già dimostrato per valori di r minori del dato che una serie siffatta è lineare, sicchè si può riferire univocamente agl'iperpiani di uno spazio in guisa che agli elementi della serie passanti per un punto generico di X corrispondano gl'iperpiani di una forma fondamentale (di modo che questo riferimento sarà determinato dando di $r+2$ elementi della serie gli $r+2$ iperpiani omologhi). Si fissino poi su X due punti A, B ed in uno spazio S_r due punti A', B'; e si riferiscano le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B agl'iperpiani di S_r passanti risp. per A', B' in guisa che alle M_{k-1} di quelle due serie passanti per un punto generico di X corrispondano risp. gl'iperpiani di quelle *stelle* passanti risp. per due rette delle stelle stesse; ma di più si faccia in modo che ad ogni M_{k-1} comune alle due serie, cioè passante per A e per B, corrisponda sempre uno stesso iperpiano (per A' e B') in ambe le stelle. Allora accadrà che le due rette delle stelle A', B' che corrispondono nel modo detto ad un punto qualunque P di X s'incontreranno in un punto P', cioè staranno in ∞^{r-3} iperpiani: quelli che in entrambe le stelle corrispondono alle $\infty^{r-3} M_{k-1}$ passanti per A, B e P; sicchè per ogni punto P di X si ha un punto P' in S_r. D'altra parte segando una M_{k-1} fissa non passante per A nè per B con la serie lineare ∞^{r-1} delle M_{k-1} che passano per A (o per B) si ha, come subito si vede, sulla M_{k-1} una *serie lineare* ∞^{r-1} di M_{k-2}: e si posson riferire le due serie lineari ∞^{r-1} delle M_{k-1} passanti risp. per A e per B *prospettivamente* fra loro, riguardando come omologhi due elementi che determinino una stessa M_{k-2} sulla M_{k-1} fissa. La corrispondenza sarà tale che si corrisponderanno pure fra loro le serie lineari minori contenute in quelle due, e che saranno omologhe di se stesse le M_{k-1} comuni alle due serie, cioè passanti per A e per B. Ne deriverà fra le stelle d'iperpiani A' e B' una collineazione in cui saranno uniti tutti gl'iperpiani comuni alle due stelle, cioè una *prospettività*. L'iperpiano in cui si tagliano allora gli elementi omologhi delle due stelle si faccia corrispondere alla M_{k-1} che s'era fissata su X. È chiaro che se questa passa pel punto P prima considerato, l'iperpiano corrispondente passerà per P'. Si saran dunque riferiti univocamente i punti P di X ai punti P' di una varietà di S_r per modo che ai punti di una M_{k-1} della serie ∞^r data su X corrispondono i punti di quella varietà posti in un iperpiano. Dunque (n.^{0} 14) la serie ∞^r è lineare.

Mettendo a riscontro la proposizione ora dimostrata con quelle dei n.^{i} 23 e 24 si vede che in quelle avevamo imposto alla serie che si considerava la condizione di esser *contenuta in una serie lineare* (n.^{0} 23), od in particolare (n.^{0} 24) di stare su una varietà X razionale: ed in tali casi esse valevano anche per serie ∞^1. Qui invece abbiam dovuto porre la condizione dell'*irriducibilità* degli elementi M_{k-1} generici della serie; ed oltre a ciò abbiam dovuto escludere le serie ∞^1: esclusione necessaria poichè è chiaro che si può con una ∞^1 di M_{k-1} generare una M_k per modo che ogni punto di questa stia su una sola M_{k-1} e che quella ∞^1 non sia razionale, e quindi non sia una serie lineare.