FRANCESCO SEVERI

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume secondo

1909-1917

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1974

LXV.

SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE ALGEBRICHE E SUL TEOREMA D'ESISTENZA DI RIEMANN

NOTA I: Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 24_1 (1915), pp. 877-888 (*).

Nel 1901 l'Accademia danese delle Scienze, per iniziativa dello Zeuthen, pose a concorso la questione di ricercare se in ogni famiglia di curve algebriche gobbe, possano esistere forme limiti composte da rette. L'Accademia, nel proporre il tema, aveva di mira soprattutto i problemi numerativi, inerenti alle curve algebriche. Si trattava di dare una base sicura e rigorosa alle formole che erano state ottenute da vari Autorî con spezzamenti delle curve algebriche in curve di ordini inferiori o in rette.

Ma la risoluzione del problema proposto - come del resto accennava l'Accademia danese - avrebbe avuto una portata ben maggiore, giacchè, una volta ottenuta una risposta affermativa alla questione, si sarebbe potuto tentare di ricavarne una classificazione grandemente suggestiva delle curve gobbe, assegnando, come rappresentante tipico di ciascuna famiglia, un sistema *connesso* di rette.

La questione rimase però sinora senza risposta (1). Di essa io intendo occuparmi nel presente lavoro, ove considero il problema anche in relazione alle curve iperspaziali. In questa Nota e nella successiva, riassumo i risultati da me ottenuti in proposito, riserbandomi di tornarvi in seguito, con una Memoria più ampia. Tuttavia do fin d'ora notizia non soltanto dei risultati, ma anche dei procedimenti dimostrativi, per ciascun dei quali indico le argomentazioni essenziali.

Dimostro anzitutto che, per $n \geq p + r$, le C_p^n (d'ordine n e genere p) di S_r, formano *una sola famiglia* (varietà algebrica irriducibile) *di dimensione regolare* $v = n(r + 1) - (p - 1)(r - 3)$ (2). La curva generica di questa

(*) Seduta del 2 maggio 1915.

(1) Tranne che per le curve di genere $p \leq 2$. Vedasi A. BRILL, *Ueber algebraische Raumkurven*, Math. Annalen, 64 (1907), p. 322.

(2) Per $r = 3$ il risultato trovasi in G. H. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (premiata col premio Steiner 1882), Journal de l'École polyt., 52 (1882). Ma l'A., non avendo precisato sufficientemente il concetto di «famiglia di curve gobbe», non si ferma a dimostrare che le C_p^n di S_3, per $n \geq p + 3$, costituiscono una sola varietà algebrica *irriducibile*.

famiglia, è non speciale, e la famiglia stessa dicesi perciò *non speciale*. Anche per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$, le C_p^n formano in S_r una sola famiglia regolare, ma la curva generica è in tal caso speciale e normale.

Questi teoremi son fondati essenzialmente sul fatto che la varietà algebrica delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, è irriducibile (3).

Definito poi che cosa deve intendersi per *n–latero (connesso) di genere virtuale (o effettivo)* $p(\geq 0)$, ne deduco, mediante semplici considerazioni proiettive, che, dato in $S_r(r \geq 2)$ un n–latero L di genere effettivo $p \geq 0$, esistono sempre curve razionali (irriducibili) d'ordine n, infinitamente vicine ad L.

Ciò mi permette di concludere che alla varietà V delle curve piane irriducibili C_p^n, appartiene ogni n–latero piano; e da questo, mediante una delicata analisi topologica, *deduco quali sono tutti i possibili spezzamenti delle curve di* V.

Una conseguenza notevolissima delle considerazioni svolte è *il teorema d'esistenza delle funzioni algebriche d'una variabile, che viene così stabilito con mezzi semplici e luminosi, di carattere algebrico–geometrico, i quali son di certo più appropriati alla natura algebrica della questione, di quanto non lo sieno gli strumenti finora usati per la dimostrazione classica del teorema di Riemann* (funzioni armoniche e problema di Dirichlet) (4). E quando parlo del teorema di esistenza, intendo alludere non soltanto all'arbitrarietà nella scelta dei $2n + 2p - 2$ punti di diramazione della funzione algebrica ad n rami, di genere p, che si vuol costruire, ma anche alla possibilità di assegnare ad arbitrio le sostituzioni fra gli n rami, attorno ai singoli punti di diramazione.

Continuando (Nota II) lo studio delle curve di $S_r(r \geq 3)$, distinguo i punti doppî che possono acquistare particolari curve *di una data famiglia* V, in *proprî* ed *improprî*, secondo che abbassano o no il genere delle curve della famiglia che li acquistano (5). I primi importano lo spezzamento della sviluppabile osculatrice alla curva che li acquista, ma non lo spezzamento della congruenza delle corde; mentre per gli altri accade il contrario.

Nel n. 6 (Nota II) sono finalmente in grado di dimostrare che *ogni famiglia non speciale di* $C_p^n(n \geq p + r)$ *possiede curve limiti così costituite: un* $(n - p)$*–latero connesso attraverso ad* $n - p - 1$ *nodi, insieme a* p *corde generiche di questo.*

Stabilisco quindi, nel n. 8, *l'esistenza di infiniti n–lateri di genere p, in ogni famiglia, anche speciale, di curve irriducibili* C_p^n *di* S_r, rispondendo così alla questione posta dall'Accademia danese.

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche*, ecc., Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 47 (1912), n. 1.

(4) Ved. ad esempio E. PICARD, *Traité d'analyse* (Paris, Gauthier–Villars, 1905, 2ème éd.), tom. II, chap. XVI.

(5) Questa distinzione mi è già stata molto utile nella Nota, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli*, Questi Rendiconti, 23 (1914), p. 527 [Nota LXIII, vol. II, p. 415; N.d.R.].

Cammin facendo, mi si offre il destro di contare in modo rigoroso l'infinità delle g_n^r speciali, esistenti sopra una curva di dato genere p, a moduli generali (n. 3). Questo computo veniva fatto, con Brill e Noether (6), ammettendo implicitamente un postulato.

Alla questione di decidere se un dato n–latero connesso di genere effettivo p, appartenente ad S_r, si possa sempre considerare come il rappresentante tipico d'una famiglia di curve irriducibili di S_r, rispondo in modo affermativo nel n. 9. Ma il risultato non è ancora così espressivo come avrei desiderato, perché può darsi che la famiglia definita sia di genere $q < p$. A proposito delle condizioni complementari cui deve sottoporsi un n–latero di genere effettivo p, perché esso definisca una famiglia di curve, senza punti doppî, di genere esattamente uguale a p, mi sono limitato a riferire le mie induzioni e ad indicare i mezzi per giungere al risultato definitivo, che spero di poter dimostrare in seguito (7).

Termino la Nota II indicando i varî problemi a cui portan nuova luce i risultati precedenti (questioni di postulazione, problemi numerativi, questioni di realtà delle curve algebriche). Quanto ai problemi numerativi, la conclusione è, come si prevedeva, che le formole ottenute mediante gli spezzamenti delle curve, non soffrono eccezioni o limitazioni.

1. *Preliminari.* Parlando di *famiglia* di curve di dato ordine n in S_r, intendiamo di alludere, con Noether, ad una varietà algebrica V di curve, *irriducibile*, come insieme de' suoi elementi (curve) e *completa*, cioè che non sia contenuta in una più ampia di curve dello stesso ordine. Una *sottofamiglia* è una varietà irriducibile V' di curve d'ordine n, *completa relativamente* ad un'assegnata proprietà delle sue curve.

Due famiglie di curve dello stesso ordine hanno generalmente in comune una o più sottofamiglie.

Dalla definizione di famiglia di curve, segue subito che *ogni sistema continuo, cui appartenga una curva scelta genericamente entro una famiglia V, giace interamente in V.*

2. *Irriducibilità della varietà di tutte le curve irriducibili di dato genere p e della varietà di tutte le curve piane irriducibili di ordine n con*

(6) A. BRILL–M. NOETHER, *Ueber die algebraischen Funktionen*, ecc., Math. Annalen, 7 (1873), §§ 9-12; M. NOETHER, *Zur Graudlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (premiata col premio Steiner 1882), Berlin. Abh. (1882), p. 18. Ved. pure E. PICARD, *op. cit.*, p. 570.

(7) Avrei potuto rinviare a più tardi la pubblicazione del presente lavoro, in modo da inserirvi anche la dimostrazione di questo risultato, se non avessi creduto che la situazione politica che si va maturando pel nostro Paese, non consentirà fra breve a molti di noi di poter attendere con tranquillità alla ricerca scientifica. Avendo comunicato al sig. Zeuthen, nel marzo scorso, i risultati delle mie ricerche, ne ebbi l'incitamento a pubblicarle subito. Lo Zeuthen anzi, in risposta alla mia comunicazione, mi scriveva in data 29 marzo 1915: « Je crois avoir aussi de mon côté trouvé le moyen de démontrer l'existence des courbes dégénérées... mais mes recherches sont encore loin d'être achevées ».

$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ *punti doppî.* Le curve piane di ordine n, con d punti doppî, formano una varietà Σ di dimensione $3n + p - 1$, alla quale appartiene la varietà V delle curve *irriducibili* di ordine n e genere p. Oltre a questa, vi sono d'ordinario in Σ altre varietà ∞^{3n+p-1}, di curve spezzate, con d punti doppî; ma quel che importa di osservare è che *la varietà V, di dimensione $3n + p - 1$, è irriducibile.* Questo fatto, come ho detto, è già stato segnalato da Enriques, il quale, trattando incidentalmente la questione, si è limitato ad esporre le linee essenziali del procedimento dimostrativo, che io mi propongo di sviluppare più ampiamente nella Memoria cui queste Note preludono.

La semplice dimostrazione di Enriques, è strettamente geometrica. Da essa segue subito che *le curve di dato genere p, formano una varietà algebrica H irriducibile* (avente per elementi le classi di curve di genere p birazionalmente identiche).

A questo medesimo risultato si perviene d'altronde facilmente poggiandosi sul teorema d'esistenza di Riemann (8). Basta all'uopo osservare: che ogni curva di genere p, può rappresentarsi sulla retta (sfera complessa) n-pla, con $2n + 2p - 2$ punti di diramazione *semplici*, sempre che sia per esempio $n > 2p$; che ordinati i cappî (o le sostituzioni) inerenti ai singoli punti di diramazione, alla maniera di Lüroth-Clebsch, ne segue subito la possibilità di far circolare il gruppo di diramazione, a partire da una posizione iniziale e ritornandovi, per guisa da scambiare tra loro due diverse distribuzioni delle sostituzioni stesse. Le superficie di Riemann, birazionalmente distinte, costruite a partire da un dato gruppo di diramazione, si possono quindi, per una conveniente circolazione del gruppo, scambiare fra loro. E da ciò segue l'asserita irriducibilità di H.

Ritengo probabile che la varietà H sia razionale o quanto meno che sia riferibile ad un'involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare S_{3p-3}; o, in altri termini, che *nell'equazione di una curva piana di genere p (e per esempio dell'ordine $p + 1$) i moduli si possano far comparire razionalmente.* La considerazione delle curve piane minime di dato genere p, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$ (per $p = 0, 1$ si vede anzi subito che la varietà H è addirittura razionale); la considerazione delle curve sghembe minime di genere p, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di p; ecc.

3. *Curve canoniche. Valutazione rigorosa dell'infinità delle serie lineari g_n^r sopra una curva di dato genere, a moduli generali.* La valutazione dell'infinità d delle g_n^r non speciali, sopra una curva di genere p, si fa notoriamente, in modo

(8) La cosa trovasi già accennata in F. KLEIN, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen* (Leipzig, 1882), p. 66; oppure, *Riemannsche Flächen* (Autogr. Vorlesungen, Göttingen, 1894), I, pag. 117.

completo, colla massima facilità (9), e si trova:

$$d = (r + 1)(n - r) - rp . \tag{1}$$

Si vede anche subito che, sopra una data curva di genere p, le g_n^r *non speciali formano una varietà irriducibile* (che è l'insieme delle coppie di elementi d'una varietà di Jacobi del genere p e della varietà degli S_r, appartenenti ad un S_{n-p}).

Quanto alla valutazione dell'infinità d delle g_n^r speciali, la cosa è assai più delicata. Brill e Noether ragionano in un modo che è sostanzialmente equivalente a questo: Sopra la curva canonica Γ di S_{p-1}, i gruppi G_n speciali, individuanti serie complete di dimensione r, sono staccati su Γ da spazî S_{n-r-1}. Ora, poichè per un S_{n-r-1} di S_{p-1} l'appoggiarsi ad una data curva è condizione $(p - n + r - 1)$-pla, gli S_{n-r-1} n-secanti di Γ, dipenderanno *generalmente* da

$$(n - r)(p - n + r) - n(p - n + r - 1) = n - r(p - n + r) \tag{2}$$

parametri; e siccome gli spazî stessi si distribuiscono in sistemi ∞^r, corrispondenti ciascuno ad una g_n^r completa, d risulterà anche in tal caso espresso da (1) (10).

Ma tutto ciò è subordinato all'ipotesi che le condizioni contate siano fra di loro indipendenti; e quest'indipendenza non può affatto *a priori* giustificarsi colla *generalità* dei moduli di Γ. Per completare in questo punto delicato la valutazione dell'infinità d, io procedo così: le curve canoniche Γ, in virtù di quanto s'è detto al n. 2, formano nello S_{p-1} una sola famiglia, dipendente da $k = (p - 1)(p + 4)$ parametri. Entro questa famiglia vi sono ∞^{k-1} curve irriducibili Γ_0, di genere $p - 1$, con un punto doppio, costituenti una sola sottofamiglia, giacchè ognuna delle Γ_0 è imagine proiettiva della serie staccata sopra una curva piana d'ordine $p + 1$, con $\frac{1}{2}p(p - 3) + 1$ punti doppî, dalle curve d'ordine $p - 2$ passanti per $\frac{1}{2}p(p - 3)$ di questi punti. Una Γ_0 si proietta dal suo punto doppio, sopra un S_{p-2}, secondo una curva canonica del genere $p - 1$. Viceversa, ogni tal curva canonica può considerarsi come proiezione di una (anzi di infinite) Γ_0.

Supposto dimostrata la formola (1) pel genere $p - 1$, si assuma una Γ_0 a moduli generali, col punto doppio O, e si contino i suoi spazî plurisecanti, desumendoli da quelli di una curva canonica del genere $p - 1$, e tenendo conto che, quando una Γ va in Γ_0, la varietà delle corde di Γ ha per limite

(9) Ved. per esempio le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), p. 197. Di queste *Lezioni* era quasi pronta una traduzione tedesca ampliata (edita da Teubner), quando scoppiò la guerra europea. Ora è tutto sospeso.

(10) Se i moduli son generali, l'ordine e la dimensione di una g_n^r speciale completa, soddisfaranno quindi alla $d \geq 0$, la quale, introducendo l'indice di specialità $i = p - n + r$ della g_n^r, può scriversi sotto la forma $n \geq (i + 1)r$. Si ha così *un'estensione del teorema di Clifford, valida sulle curve a moduli generali*. A quali condizioni particolari deve soddisfare la curva, perché una g_n^r speciale completa abbia $n < (i + 1)r$? Per $i = 2$, $n < p - 1$, il Comessatti ha trovato che la g_n^r deve essere composta con una γ_2^1.

la varietà delle corde di Γ_0 (perché O è un punto doppio proprio, ved. n. 5), e che inoltre le sole corde improprie di Γ_0, sono le sue tangenti e le rette del fascio individuato dalle due tangenti in O.

Così ad esempio la curva canonica Γ^8 del genere 5 (in S_4) non può avere alcuna trisecante, perché il gruppo G_3 relativo, individuerebbe una g_3^1, cioè Γ possiederebbe infinite trisecanti, e quando Γ tendesse verso una Γ_0 generica col punto doppio O, si avrebbero, come limiti delle ∞^1 trisecanti di Γ, ∞^1 trisecanti *effettive* di Γ_0 e per un punto generico M di Γ_0 ne passerebbe un numero finito. Facendo avvicinare M ad O, se ne trarrebbe che la più generale curva canonica del genere 4 (in S_3) possiede punti doppî. Similmente Γ non può possedere più che ∞^2 piani quadrisecanti, perché altrimenti la curva canonica del genere 4 possiederebbe più che ∞^1 trisecanti, ecc. (11).

In tal modo dunque si verificherà, in generale, che Γ_0 non possiede più spazî n-secanti di quanti son dati dalla (2), e ne seguirà la validità della (1) per qualunque p.

Quanto alle g_n^r speciali incomplete, la loro infinità è minore di (1); cosicchè la loro aggiunta non altera l'infinità d delle g_n^r contenute in Γ. Se ne trae subito, come hanno fatto Brill e Noether per $r = 3$, che *le curve irriducibili* C_p^n *dello* S_r, *quando* $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$, *dipendono da*

$$\nu = n(r+1) - (p-1)(r-3), \tag{3}$$

costanti.

Per $n \geq p + r$ $(r \geq 2)$ un generico gruppo di n punti sopra una Γ_p (a moduli anche particolari) è non speciale, e individua pertanto una g_n^{n-p} di dimensione $n - p \geq r$, cosicchè le C_p^n di S_r, birazionalmente identiche a Γ_p, formano una varietà irriducibile di curve generalmente non speciali. Se ne deduce (n. 2) che:

Per $n \geq p + r$, *le curve* C_p^n *di* S_r $(r \geq 2)$ *formano una sola famiglia di dimensione* (3), *la cui curva generica è non speciale* (*e normale in* S_{n-p}).

Una tale famiglia si chiamerà una *famiglia non speciale* di curve di S_r.

Per $r + \frac{r}{r+1} p \leq n < p + r$ $(r \geq 2)$, sopra Γ_p ogni g_n^r è speciale ed è generalmente completa. In tal caso però la varietà delle g_n^r su Γ_p *non è sempre irriducibile* (12). Comunque, un procedimento analogo a quello già accennato (passaggio dal genere $p - 1$ al genere p), mostra che, facendo circolare Γ_p nella propria famiglia, si riesce a scambiare fra loro le diverse parti della suddetta varietà. Si può dunque anche in tal caso affermare che:

(11) Naturalmente, nel caso speciale della Γ_5^8, tutto ciò deriva anche dal fatto ch'essa è completa intersezione di 3 quadriche.

(12) Si pensi per esempio alle due g_3^1 distinte esistenti sopra la curva canonica del genere 4.

Per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$ *le* C_p^n *di* S_r *formano una sola famiglia, di dimensione* (3), *la cui curva generica è speciale e normale.*

4. *Sistemi connessi di rette. Dimostrazione geometrica del teorema di esistenza di Riemann.* Un sistema *connesso* di n rette con $n + p - 1$ ($p \geq 0$) intersezioni *semplici* (nodi), si chiamerà brevemente un *n–latero di genere effettivo* p. Gli $n + p - 1$ nodi si considerano come punti in cui si può passare da un lato (ramo) all'altro; si riguardano cioè piuttosto come « punti di diramazione » che come punti doppî. Si dice perciò che essi si considerano come *virtualmente inesistenti*, rispetto alla loro qualità di punti doppî, che non permetterebbe il salto da un ramo all'altro.

Se dei suddetti nodi effettivi, se ne possono considerare come inesistenti soltanto $n + q - 1$ ($q < p$), *senza che per questo lo n–latero divenga sconnesso*, si dirà che q è il *genere virtuale* dello n–latero, in quanto si considerino come *assegnati* i $p - q$ nodi rimanenti.

Abbiasi un n–latero di genere effettivo o virtuale $p > 0$. Se assegnando uno de' suoi nodi, che prima si consideravano inesistenti, si rompe la connessione, lo n–latero non potrà scindersi che in *due* soli pezzi connessi. Se ne deduce facilmente che « si posson sempre scegliere p nodi convenienti, fra quelli che prima stabilivano la connessione, per guisa da ottenere, assegnandoli, un n–latero (si sottintende connesso) di genere virtuale zero ».

Ciò posto, mediante elementari considerazioni geometriche, si prova, col processo d'induzione, che « un n–latero di genere effettivo $p \geq 0$, appartenente ad S_r ($r \geq 2$), è sempre proiezione di un n–latero di genere effettivo zero, appartenente ad S_n ».

La generazione proiettiva delle curve razionali normali mediante stelle omografiche, permette inoltre di provare agevolmente, sempre per induzione, che « esistono curve razionali (irriducibili) di ordine n, infinitamente vicine ad un n–latero di genere effettivo zero, dato in S_n ». Donde poi, a cagione della proposizione precedente, segue che *esiste sempre qualche curva razionale (irriducibile) d'ordine n, infinitamente vicina ad un n–latero L, di genere effettivo* $p \geq 0$, *dato in* S_r.

Un nodo P di L può essere di tre specie, rispetto ad una curva razionale C, infinitamente vicina ad L:

a) P può essere un « punto di diramazione », per guisa che i due lati incrociantisi in P, sieno sostituiti in C da *un sol ramo*. Di tali punti ne esistono $n - 1$ e possono essere scelti *a priori*, purchè sufficienti a stabilire la connessione;

b) oppure P può essere infinitamente vicino ad un nodo di C;

c) o infine i due rami incrociantisi in P possono essere sostituiti in C da *due* rami, colle origini distinte, ma infinitamente prossime a P.

I punti di *una* delle ultime due specie possono anche mancare; mancano simultaneamente solo quando $p = 0$.

Consideriamo, in particolare, il caso di $r = 2$. Assegnando allora $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ degli $\frac{n(n-1)}{2}$ nodi dello n-latero piano L (sempre però in modo che gli $n-1$ punti residui bastino a stabilire la connessione), si avranno curve razionali infinitamente vicine ad L e cogli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppî infinitamente prossimi ai prefissati. Vuol dire che alla varietà (irriducibile, n. 2) delle curve piane razionali d'ordine n, appartengono tutti i possibili n-lateri piani: il che si sarebbe potuto stabilire anche usufruendo della rappresentazione parametrica. E poichè la varietà di tutte le curve piane irriducibili d'ordine n con d punti doppî, contiene la varietà delle curve con $d+1$, $d+2, \cdots$, punti doppî, così si conclude che:

La varietà delle curve piane irriducibili d'ordine n con

$$d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti doppî, contiene tutti i possibili n-lateri piani.

Un'altra conseguenza notevole, la quale del resto potrebbe dimostrarsi anche profittando del teorema riemanniano d'esistenza, è la seguente:

Avendosi un n-latero piano L, si assegnino $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dei suoi punti doppî, per modo che coi rimanenti $\frac{n(n-1)}{2} - d$ nodi si possa stabilire la connessione fra gli n lati. Esiste allora sempre qualche curva irriducibile d'ordine n, infinitamente vicina ad L, la quale possiede d, e soltanto d, nodi, infinitamente vicini agli assegnati.

Ecco la semplice dimostrazione geometrica di questo teorema.

Posto $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, fra gli $n+p-1$ nodi, che si vogliono considerare inesistenti, se ne potranno assegnare p, in modo che lo n-latero resti connesso (e di genere virtuale zero). Dopo ciò si potrà costruire una curva razionale D, infinitamente vicina ad L, e con $p+d$ nodi infinitamente vicini ad altrettanti vertici di L, tra i quali vi sono i d primitivamente assegnati.

Nella varietà V delle curve piane irriducibili C_p^n esistono dunque curve infinitamente vicine ad L, e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati: per esempio la curva D. Queste curve non possono tutte in conseguenza avere $d+1$ (o più) punti doppî, perché entro V gli elementi (curve), infinitamente vicini ad un elemento dato (L), son più numerosi che gli elementi infinitamente vicini ad L, entro una varietà subordinata a V, qual'è quella delle curve irriducibili d'ordine n con $d+1$ nodi.

Dal teorema precedente segue quest'altro:

Alla famiglia V delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, appartiene ogni curva composta da una curva irriducibile di ordine $n-1$ e genere $p-1$ e da una retta.

Prese infatti n rette generiche $a_1, a_2, \cdots, a_n$ del piano, si « assegnino » $d-n+3 \left(d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p\right)$ vertici dello $(n-1)$–latero $a_1, a_2 \cdots a_{n-1}$, per guisa che esso resti connesso, e si chiami K la curva d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$, così ottenuta. Aggiungendo a K la retta a_n, se si assegnano gli $n-1$ punti ove a_n sega K, si ottiene una curva *sconnessa* D_0, d'ordine n e di genere virtuale $p-2$; se invece si assegnano soltanto $n-3$ delle suddette intersezioni, e si considerano come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva *connessa* C_0 d'ordine n e di genere virtuale p. Ora, pel teorema precedente, vi sono curve irriducibili di V, infinitamente vicine a C_0 e *coi d nodi infinitamente prossimi agli assegnati*; e poichè esistono ∞^h $(h = 3n + p - 3)$ curve di V passanti per P, Q, e tra esse v'è C_0, così esisteranno ∞^{h-1} curve di V, passanti per P, Q, infinitamente prossime a C_0 e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati. Ciascuna di queste curve, in quanto passa per P, Q ed è infinitamente vicina a C_0, ha un nodo infinitamente prossimo a ciascuno dei punti P, Q (13), sicchè è una curva infinitamente prossima alla D_0, coi suoi $d+2$ punti doppî assegnati. Ne consegue che D_0 appartiene a V, e precisamente alla totalità Σ delle curve di V con $d+2$ nodi, la qual totalità ha dimensione non inferiore ad h. La Σ potrà ben essere riducibile (anzi, come vedremo, lo è effettivamente); ma comunque D_0 giacerà in una *parte* irriducibile W di Σ, di dimensione almeno uguale ad h. Poichè una particolare curva, D_0, di W, è sconnessa, lo saranno tutte (14): la curva generica D di W risulterà cioè composta da una parte E, d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$ e da una retta a. Dico che E è irriducibile. Invero se E fosse spezzata in λ curve $E_1, E_2, \cdots, E_\lambda$ di ordini $n_1, n_2, \cdots, n_\lambda$ e di generi $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$ con t punti d'intersezione da considerarsi come inesistenti, sarebbe $p-1 = \sum p_i + t - \lambda + 1$, e poichè E è connessa, dovrebbe essere $t > 0$. Ora, una curva irriducibile, d'ordine n_i e genere p_i, dipende da $3n_i + p_i - 1$ costanti; sicchè E dipenderebbe al più da $3\sum n_i + \sum p_i - \lambda$ costanti, e quindi $D = E + a$, al più da $3n + p - 3 - t$ parametri, mentre prima abbiamo trovato che la dimensione di W è almeno $3n + p - 3$. Si conclude che la generica E è irriducibile. D'altra parte la varietà W' di *tutte* le curve spezzate in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, è irriducibile e dipende precisamente da $3n + p - 3$ costanti: dunque W coincide con W' e resta così stabilito il teorema enunciato.

Più in generale si prova in modo analogo, col processo d'induzione, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva spezzata C d'ordine*

(13) Cfr. F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari*, ecc., Rend. del Circolo mat. di Palermo, *20* (1905), nn. 1, 2 [Nota XXIII, vol. I, p. 293; N.d.R.].

(14) Questa considerazione equivale in sostanza ad un ben noto principio di Enriques, che cioè una curva variabile con continuità, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppî. Ved. F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie irregolari*, Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna (dicembre 1904).

n, appartenga alla varietà delle curve irriducibili d'ordine n e genere p, è che si possano scegliere alcuni nodi di C, in tal numero ed in tal posizione, che considerandoli come virtualmente inesistenti, si ottenga da C una curva connessa di genere virtuale p.

Così per esempio alla varietà delle quartiche ellittiche irriducibili appartengono tutte le curve spezzate in una cubica ellittica ed in una retta, mentre queste curve non appartengono alla varietà delle quartiche razionali irriducibili, perché non possono considerarsi in alcun modo come curve connesse di genere virtuale zero.

Da quanto precede risulta che, se in una generica $D = E + a$ di W, si assegnano i $d - n + 3$ nodi di E ed $n - 3$ soltanto delle intersezioni di E con a, considerando come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva «totale» di V ed alla D sono pertanto infinitamente vicine curve irriducibili di V, che hanno i loro d nodi infinitamente vicini agli assegnati.

Queste considerazioni sono importanti, perché, come ho già detto, da esse si trae una *dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di esistenza di Riemann*. Si prova, infatti, anzitutto geometricamente, premettendo il computo del numero dei moduli di una curva di genere p (15), che il gruppo di diramazione $G_{2n+2p-2}$ di una funzione algebrica ad n rami, $u_1, u_2, \cdots, u_n$, di genere p, può assumersi ad arbitrio sulla retta n-pla (sfera complessa) u (16).

Ciò posto, per dimostrare che si possono scegliere arbitrariamente anche le sostituzioni in G (purchè beninteso mediante esse la costruenda funzione risulti connessa), si distribuiscano i punti di G in $\sigma = n + p - 1$ coppie $A_i, B_i (i = 1, \cdots, \sigma)$ permutanti ciascuna gli stessi due rami. Avendo dimostrato la possibilità dell'arbitraria scelta di G, è chiaro che basterà stabilir l'esistenza della funzione algebrica richiesta, quando i punti di due coppie, per esempio $A_1, B_1; A_2, B_2$, tendono rispettivamente alle medesime posizioni limiti H_1, H_2, trascinandosi dietro le relative sostituzioni. Né a cagione dei risultati topologici di Lüroth-Clebsch, i quali sono indipendenti da ogni questione di esistenza, è restrittivo il supporre, finchè $p > 0$, che le coppie A_1, B_1 ed A_2, B_2 permutino entrambe gli stessi rami u_1, u_2, e che questi quattro punti di diramazione sieno anzi i soli operanti su u_1. Astraendo allora da questi punti, i rami $u_2, \cdots, u_n$ restano connessi, e, ammesso dimostrato il teorema per le funzioni di genere $p - 1$ ad $n - 1$ rami, appena sia $n \geq p + 2$, si potrà costruire, in un piano per u, una curva E d'ordine $n - 1$, la quale si proietti da un centro O, sulla retta $(n - 1)$-pla $u \equiv (u_2, u_3, \cdots, u_n)$, diramata nel modo assegnato nei punti $A_3, B_3, \cdots, A_\sigma, B_\sigma$.

(15) Cfr. ad esempio le mie citate *Lezioni*, p. 196. Nell'edizione tedesca ho colmato una lacuna esistente in questo punto e che nelle *Lezioni* non avevo mancato di segnalare in modo esplicito.

(16) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli d'una classe*, ecc. (citata), n. 1.

Conducasi la retta OH_1, e fra gli $n - 1$ punti ov'essa taglia E, scelgasi quello, P, che si proietta sul ramo u_2; e similmente su OH_2 si scelga quel punto Q di E, che corrisponde ad u_2.

Posto $a \equiv PQ$, la curva composta $E + a$ proiettasi da O su u secondo la retta n–pla $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ – ove u_1 è la proiezione di a – ed è diramata secondo il convenuto nei punti $H_1, H_2, A_3, B_3, \cdots, A_\sigma, B_\sigma$. Una curva irriducibile C, d'ordine n e genere p, infinitamente prossima alla $E + a$ (nella quale i nodi P, Q si riguardino come inesistenti), proiettata da O su u, risolve la proposta questione di esistenza.

Si ha così un processo di riduzione da p a $p - 1$, mediante il quale, avendo supposto che sia $n \geq p + 2$, ci si riduce a dimostrare il teorema per le curve razionali. E per queste poi lo si stabilisce usufruendo del fatto che, assegnati su u, $n - 1$ punti di diramazione doppî $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$, e le sostituzioni permutanti in essi i rami $u_1, u_2, \cdots, u_n$, esiste sempre, in un piano per u, un n–latero $L \equiv a_1, a_2, \cdots, a_n$, che si proietta dal centro O su u secondo la retta n–pla $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ diramata nel modo prefissato. Una curva razionale irriducibile, d'ordine n, infinitamente vicina ad L, ove si riguardino come inesistenti i nodi di L, che dànno per proiezioni i punti H, risponde allora alla questione di esistenza.

NOTA II. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, (5) 24₁ (1915), pp. 1011–1020 (*).

5. *Punti doppî proprî ed improprî rispetto alle curve di una data famiglia.* Sia V una famiglia di curve C_p^n nello S_r $(r > 2)$. Si dice che una curva C della famiglia, ha acquistato un (nuovo) *punto doppio proprio* P, quando l'acquisto di tal punto singolare trae seco l'abbassamento di un'unità nel genere effettivo p di C; il nuovo punto doppio P dicesi invece *improprio*, quando la C, che lo ha acquistato ha ancora il genere p.

Se la particolar curva C appartiene ad un'altra famiglia W, rispetto a questa il punto doppio acquistato da C può esser di specie diversa, che non rispetto a V. Un esempio espressivo in proposito, vien dato dalle quartiche sghembe razionali con un punto doppio, in quanto si considerino come forme limiti delle quartiche sghembe ellittiche, o delle quartiche razionali, senza punti doppî.

Rispetto alla varietà delle corde e alla sviluppabile osculatrice della curva variabile nella famiglia V, i punti proprî ed improprî si comportano in modo essenzialmente diverso.

Quando C acquista il punto doppio proprio P, la congruenza delle corde della curva variabile ha per limite la *sola* varietà delle corde della curva

(*) Seduta del 16 maggio 1915.

limite, e la sviluppabile osculatrice ha per limite la sviluppabile osculatrice alla curva limite, insieme al fascio di raggi individuato dalle due tangenti in P, contato doppiamente.

Mentre, allorchè C acquista il punto doppio improprio P, la varietà delle corde della curva variabile ha per limite una congruenza spezzata nella varietà delle corde della curva limite ed in una stella di raggi, di centro P, situata in un S_3, la cui posizione dipende dalla legge colla quale la curva variabile si avvicina alla curva limite. La sviluppabile osculatrice ha invece per limite la *sola* sviluppabile osculatrice della curva limite.

Quando la curva C_p variabile in V, si spezza in 2 parti C'_{p_1}, C''_{p_2}, aventi δ punti comuni, questi punti saranno proprî rispetto a V ogni volta che sia $p = p_1 + p_2 + \delta - 1$. Se invece $p < p_1 + p_2 + \delta - 1$, qualcuna delle intersezioni di C', C'', è un punto doppio improprio.

La condizione che s'impone alle curve di V, volendo che acquistino un nuovo punto doppio proprio in un punto non dato di S_r, è di dimensione 1; mentre l'imposizione di un punto doppio improprio, in un punto non dato, è una condizione $(r-2)$–pla, *sempre che, beninteso, le condizioni suddette sieno compatibili colla definizione della famiglia V.*

6. *Il teorema fondamentale per le famiglie non speciali.* Sia, nello S_r, una famiglia V non speciale di curve C^n_p $(n \geq p + r)$. Dal fatto che alla famiglia V' delle curve piane irriducibili d'ordine n, con $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ nodi, *le quali possono considerarsi tutte come proiezioni delle* C^n_p, appartiene (n. 4) ogni curva spezzata in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, si deduce agevolmente che V contiene curve composte mediante una C^{n-1}_{p-1} irriducibile ed una sua corda. Ma non è perciò detto né che V contenga *ogni* curva così composta, né quindi che le rette che entrano come componenti nelle suddette C^n_p spezzate, sieno proprio corde o non piuttosto i secanti $(i \geq 3)$ delle relative C^{n-1}_{p-1}. Nulla di assurdo ci sarebbe in ciò, perché in tal caso fra questi i punti d'appoggio, $i - 2$ dovrebbero esser punti doppî improprî rispetto alle curve di V.

Per provare che effettivamente V contiene ogni curva spezzata in una C^{n-1}_{p-1} ed in una corda di questa, procediamo così: L'imposizione di 2 punti doppî proprî alle curve di V, equivale a 2 condizioni (al più), sicchè si avranno in $V \infty^k$ curve siffatte, ove

$$k \geq \lambda \ \ (\lambda = n(r+1) - (r-3)(p-1) - 2).$$

La varietà Σ di queste curve, può essere riducibile, e può anche darsi che qualcuna delle sue *parti* sia di dimensione λ, e qualche altra di dimensione $\lambda + 1$. Comunque è certo che una, D, delle curve di V composte con una C^{n-1}_{p-1} e con una corda a di questa (la quale sia eventualmente i–secante), in quanto è appunto una C^n_p con 2 punti doppî proprî (e forse $i-2$ improprî) appartiene ad una varietà irriducibile $W \infty^\lambda$ contenuta in Σ. Ora è facile vedere che ogni curva di W è spezzata.

Infatti le proiezioni piane della D e di una $\overline{D}$ di W ad essa infinitamente vicina, hanno lo stesso numero $h+2$ di punti doppî, sicchè anche la proiezione della $\overline{D}$, e perciò la $\overline{D}$ stessa, pel principio già ricordato di Enriques, è spezzata. Ed è poi chiaro che lo spezzamento di $\overline{D}$ non può aver luogo che in una C_{p-1}^{n-1} ed in una sua corda. Le curve di W sono dunque spezzate tutte come D, e quindi W è contenuta nella varietà W_1 delle curve composte da una qualsiasi C_{p-1}^{n-1} e da una qualsiasi corda di questa. Ma poichè anche W_1 è irriducibile e di dimensione λ, si conclude che W coincide con W_1.

Ricordiamoci ora che un qualunque $(n-p)$–latero di genere effettivo zero in S_r, è contenuto nella varietà delle curve razionali d'ordine $n-p$. Siccome ogni tal curva, insieme ad una sua corda, dà una curva appartenente alla varietà delle curve ellittiche di S_r, se ne trae che a questa varietà appartiene ogni $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, insieme ad una sua corda; e così risalendo dal genere 1 al genere 2, ed in generale da $p-1$ a p, si arriva al teorema fondamentale:

Alla famiglia non speciale V delle C_p^n di S_r $(n \geq p+r)$, appartiene ogni n–latero composto mediante un $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, insieme a p corde generiche di questo.

In particolare si possono prendere $n-p$ rette $a_1, a_2, \cdots, a_{n-p}$, di cui ciascuna sia appoggiata alla successiva, ma l'ultima sia sghemba colla prima, e p corde generiche dell'$(n-p)$–latero $a_1, a_2, \cdots, a_{n-p}$; oppure $n-p-1$ rette generiche $a_2, \cdots, a_{n-p}$, appoggiate ad a_1, e p corde generiche di questo $(n-p)$–latero. Si osserverà che così si ottiene *un n–latero rappresentante tipico della famiglia V, nel quale mai tre lati giacciono in un piano.*

Per ottenere gli n–lateri contenuti in V, si può anche imporre alle curve di V di acquistare $n+p-1$ punti doppî proprî, perché in tal modo la sviluppabile osculatrice di C_p^n, che è d'ordine $2(n+p-1)$, viene a spezzarsi in $n+p-1$ fasci di raggi contati doppiamente, e quindi la curva riducesi ad un sistema connesso di rette. Così s'impongono $n+p-1-\varepsilon\,(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, per guisa che l'infinità degli n–lateri contenuti in V risulta espressa da:

$$k_{n,r} = n(r+1)-(r-3)(p-1)-(n+p-1-\varepsilon) =$$
$$= nr-(r-2)(p-1)+\varepsilon\,.$$

D'altronde, che $k_{n,r}$ non sia inferiore ad $nr-(r-2)(p-1)$, risulta pur da ciò che gli n–lateri di genere effettivo p in S_r, dipendono almeno da tante costanti, perché la condizione d'incidenza di due rette è di dimensione $r-2$. Vedremo al n. 8 *che la varietà degli n–lateri contenuti in V è spezzata e che in essa vi sono generalmente parti di diverse dimensioni*; ma possiamo subito provare che *tuttavia* in *V vi è sempre una famiglia completa di n–lateri, che ha la dimensione regolare $nr-(r-2)(p-1)$.*

La cosa si dimostra per induzione, a partire da un $(n-p)$–latero di genere effettivo zero, costituito da $n-p-1$ rette incidenti ad una medesima ed osservando che l'aggiunta di una corda generica ad un $(n - p + 1)$-latero $(i = 0, 1, \cdots, p - 1)$, aumenta l'ordine ed il genere effettivo di un'unità ed il numero dei parametri di 2 unità.

7. *Come una famiglia speciale si possa considerare parzialmente contenuta in una non speciale.* Abbiasi in S_r una famiglia speciale $(n < p + r)$ di C_p^n irriducibili. Dal n. 4 risulta che la generica proiezione piana C' di C_p^n, insieme a δ rette del piano, ove $n + \delta \geq p + r$, qualora si consideri come inesistente, per ogni retta aggiunta, uno dei punti ov'essa incontra C', appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili d'ordine $n + \delta$ e genere p. E poichè ognuna di queste curve è proiezione di qualche $C_p^{n+\delta}$ di S_r, se ne trae agevolmente che *la curva speciale C_p^n di S_r insieme a δ sue rette secanti, ove $\delta \geq p + r - n$, può considerarsi con un elemento della famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ irriducibili di S_r.*

Alla stessa conclusione si perviene nel modo seguente, dal quale risulta di più che le δ secanti, da aggiungersi a C_p^n, non secano altrove la curva. Si consideri un S'_r sghembo con S_r, e pongasi un'omografia fra S_r, S'_r. La curva C_p^n viene mutata in una $C_p'^n$ di S'_r, e le congiungenti delle coppie di punti omologhi di C, C', generano una rigata F, di genere p e ordine $2n$, rispetto alle cui generatrici le C, C' sono unisecanti. Si prova, senza difficoltà, che su F le C, C' appartengono ad un medesimo fascio $|C|$, di grado 0. Se pertanto s'aggiunge a $|C|$ una serie lineare g_δ^ϱ $(\varrho > 0)$ di generatrici di F, il sistema lineare somma, di curve unisecanti, d'ordine $n + \delta$ e genere p, sarà irriducibile. Proiettando in S_r, e tenendo conto dell'osservazione con cui si chiude il n. 1, si conclude col teorema enunciato.

Un'analisi ulteriore proverebbe anzi che le δ rette secanti possono scegliersi ad arbitrio.

8. *Il teorema fondamentale per le C_p^n di una famiglia qualunque.* Sia in S_r una famiglia V di C_p^n. Se $n < \frac{r+1}{r} p + r$, le curve di questa famiglia sono a moduli particolari (n. 3). Per valutare la dimensione x di V, si può ripetere il ragionamento svolto da Noether per le curve gobbe [17], e si trova così per x il limite inferiore (3) (n. 3).

Dunque: *Una famiglia qualunque di C_p^n, nello S_r, ha dimensione non minore di $n(r + 1) - (r - 3)(p - 1)$.*

L'eccesso e di questa dimensione, sul limite inferiore (3), lo chiameremo l'*irregolarità* di V. Per $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$ la famiglia è di certo *regolare*.

Sia ora δ un intero per cui sia soddisfatto il teorema del num. prec.; e sia inoltre W la famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ di S_r. Con un ragionamento analogo a quello esposto nel n. 6, si prova che le curve composte

(17) M. NOETHER, *loc. cit.*, p. 19. Trattandosi qui di trovare un limite inferiore per x, non occorre alcuna considerazione del tipo di quelle esposte al n. 3, ove si soleva pervenire ad un'uguaglianza (valida per le famiglie di curve a moduli generali).

mediante una C_p^n di V, alla quale vengono aggiunte δ rette secanti generiche, costituiscono una *parte* della varietà formata dalle curve di W dotate di δ punti doppî proprî. Si perviene così alla relazione

$$x + r\delta = (n + \delta)(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - \delta + e \qquad (e \geq 0),$$

donde si trae di nuovo $x = n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) + e$.

Imponiamo ora alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppî proprî, cioè di spezzarsi in n rette. Si può subito osservare che *queste condizioni son compatibili colla definizione di V*. Infatti il cono Γ che proietta una generica C_p^n da un punto O, fuori di S_r, contiene un sistema lineare ∞^{r+1} di sezioni iperpiane, fra cui c'è la C_p^n data ed i gruppi di n generatrici staccati su Γ dagl'iperpiani (di S_{r+1}) uscenti dal vertice O. Proiettando tutto sullo S_r primitivo, da un generico punto P di S_{r+1}, si ha in S_r un sistema irriducibile ∞^{r+1}, di curve C_p^n, cui appartengono la curva data ed ∞^r n–lateri. Poichè questo sistema è contenuto in V (n. 1), si conclude che V contiene effettivamente curve degenerate in gruppi di n rette distinte.

Gli $n + p - 1$ punti doppî proprî imposti, equivalgono ad $n + p - 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, cosicchè esistono in V infiniti n–lateri dipendenti da $nr - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$ parametri. Ciascuno di questi punti n–lateri, insieme a δ sue rette secanti, fornisce un $(n + \delta)$–latero di W. Si ottiene in tal modo in W una varietà di $(n + \delta)$–lateri, di dimensione $(n + \delta) r - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$, e si prova così che *ad una famiglia non speciale W, la quale contenga parzialmente una famiglia irregolare di curve, appartengono due o più varietà irriducibili di n–lateri, di cui alcune di dimensione regolare e le altre di dimensione irregolare.*

Ci resterebbe da mostrare che gli n–lateri esistenti in V son privi di punti doppî improprî, cioè che il loro genere effettivo coincide col genere virtuale p. Rimandiamo al n. 9 per talune induzioni in proposito, riservandoci di completare questo punto nel lavoro più esteso. Enunceremo concludendo che:

In ogni famiglia V di curve C_p^n dello S_r, esistono almeno $\infty^{rn-(r-2)(p-1)}$ n–lateri di genere p. L'irregolarità di V non supera la massima irregolarità d'una famiglia completa di n–lateri di genere p in S_r.

Un'altra disuguaglianza cui soddisfa e, è la seguente, che si ottiene con semplici considerazioni di geometria sopra una curva:

L'irregolarità di V non supera $(r - 2) i$, i essendo l'indice di specialità della generica C_p^n.

9. *Sull'inversione del teorema fondamentale.* Dato in S_r un n–latero (connesso) $L \equiv a_1, a_2, \cdots, a_n$, di genere effettivo $p \geq 0$, è possibile costruire una famiglia di curve irriducibili C_p^n di S_r, cui appartenga L? Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che *tutti gli n–lateri aventi lo stesso schema di connessione, formano una varietà irriducibile.*

Dicendo che due n–lateri hanno lo stesso *schema di connessione* o che sono *isomorfi*, intendiamo che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale, che a due lati incidenti dell'uno rispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa.

Per dimostrare la proposizione enunciata, si può profittare ad esempio del fatto che, dato un n–latero L di genere $p \geq 0$, è sempre possibile di scegliere $n - 1$ vertici, i quali bastino a stabilire la connessione fra i lati di L, per guisa che, dopo ciò, L possa considerarsi come proiezione di un n–latero L_0 di genere effettivo zero, appartenente ad S_n, ed avente p corde appoggiate al centro di proiezione (n. 4). L'affermazione enunciata, si riconduce allora all'altra, pressochè evidente, che in S_n gli n–lateri isomorfi fra loro, costituiscono una sola varietà.

Premesso questo, ricordiamoci (n. 4) che, dato in S_r lo n–latero L, esiste sempre qualche curva razionale C, ad esso infinitamente vicina, la quale possiede $q \leq p$ nodi infinitamente prossimi ad altrettanti vertici di L. Ne deriva che esiste una sottofamiglia V di curve razionali con q punti doppî, alla quale appartengono tutti gli n–lateri isomorfi con L.

Proiettiamo genericamente la C sopra un piano. Poichè la proiezione C' appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili, d'ordine n e genere q, se ne deduce, se $n \geq q + r$, che C appartiene alla famiglia W delle C_q^n di S_r. La sottofamiglia V è pertanto contenuta in W, ed a W appartengono perciò tutti gli n–lateri isomorfi con L. Rispetto a W, $n + q - 1$ nodi di L son proprî, e gli altri $p - q$ improprî.

Se poi $n < q + r$ si giunge ad una conclusione analoga, usufruendo del teorema di Riemann–Roch, per le *curve non aggiunte* (18). Dunque:

Dato in S_r un n–latero (connesso) di genere effettivo $p \geq 0$, esso definisce sempre qualche famiglia di curve irriducibili d'ordine n e genere $q \leq p$, prive di punti multipli. Rispetto alle curve di questa famiglia, $p - q$ nodi del dato n–latero sono da considerarsi come improprî. Due n–lateri isomorfi, definiscono la stessa famiglia.

È appena necessario di avvertire che deve esistere qualche condizione complementare, affinchè un n–latero di genere effettivo p, definisca, in S_r, una famiglia di C_p^n irriducibili, senza punti multipli, e di genere uguale a p. È ben noto infatti che il genere delle C_p^n irriducibili, senza punti multipli, di S_r, non può sorpassare un certo massimo, assegnato, per r qualunque, da Castelnuovo; e che d'altra parte, come ha provato Halphen (per $r = 3$), anche al disotto di questo massimo, vi sono lacune nei valori possibili di p.

Ritengo per certo che la risposta a tale importante questione debba ottenersi mediante il teorema di Riemann–Roch per le curve spezzate (19);

(18) M. NOETHER, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven*, Math. Annalen, *15* (1879), p. 507.

(19) M. NOETHER, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, Acta math., *8* (1886), p. 161.

ma su ciò, come ho detto, mi propongo di ritornare. Il risultato definitivo dovrebbe esser questo:

« La condizione necessaria e sufficiente perché un n–latero L, di genere effettivo $p \geq 0$, definisca in S_r una famiglia di C_p^n irriducibili (senza punti multipli), quando $n < p + r$, è che per gli h punti doppî della generica proiezione piana L' di L, provenienti dai punti doppî apparenti di L, passino almeno $\infty^{p+r-n-1}$ curve d'ordine $n - 4$, le quali non contengano come parte alcuna retta di L'. Per $n \geq p + r$, non si richiede alcuna condizione ».

Una volta provato questo, si potrà completare il teorema del n. prec., perché ne deriverà la possibilità di costruire in S_r un n–latero di genere *effettivo* p, isomorfo con un n–latero M di genere virtuale p, contenuto in una data famiglia V di C_p^n, ove beninteso l'isomorfismo fra L, M, si ponga astraendo dagli eventuali punti doppî improprî di M. Si concluderà così che a V appartiene anche lo n–latero L.

Non va inoltre taciuto che *due n–lateri non isomorfi posson anche definire la stessa famiglia*. Questa circostanza si verifica pure nel caso più semplice delle curve razionali. Così, per esempio, nello spazio ordinario, i quadrilateri $a_1 a_2 a_3 a_4$ collo schema di connessione (12), (23), (34) - in cui cioè a_2 appoggiasi ad a_1, a_3 ad a_2, a_4 ad a_3 - ed i quadrilateri collo schema (12), (13), (14), definiscon entrambi la famiglia delle quartiche di 2ª specie. Ciascuno dei due schemi suddetti dà luogo ad una famiglia regolare di quadrilateri, che contiene 13 costanti.

Quando i due n–lateri dipendono dallo stesso numero di parametri, un criterio sufficiente, per decidere s'essi definiscono o no famiglie distinte, è dato dalla considerazione delle superficie (o forme) del minimo ordine a cui essi appartengono.

Per esempio nel caso $n = 9$, $p = 10$, le due famiglie distinte di curve gobbe, incontrate per la prima volta da Halphen, son definite da due 9–lateri dei tipi seguenti:

1) Sei lati son generatrici di una schiera rigata e gli altri 3 generatrici della schiera rigata incidente.

2) I 9 lati son le intersezioni di una superficie generale del 3° ordine, con 3 de' suoi piani tritangenti.

I 9–lateri di questi due tipi dipendono ciascuno da un numero regolare, 18, di costanti, e definiscon famiglie distinte, perché per quelli del tipo 1) le superficie minime son quadriche, mentre per gli altri son superficie del 3° ordine.

10. *Applicazioni a questioni di postulazione.* La degenerazione delle curve algebriche in sistemi di rette, si applica utilmente alle questioni di postulazione; e si posson così ottenere, in questo campo, molti risultati nuovi.

Mi limiterò ad un esempio, calcolando la postulazione offerta alle forme d'ordine l di S_r, da una C_p^n generica, con $n \geq p + r$.

Poichè, appena sia $l \geq 2$, l'ordine della $g_{nl}^{r_l}$, staccata su una C_p^n dalle forme di ordine l, è non speciale, sarà $r_l \leq nl - p$, e quindi la postulazione P_l non supererà $nl - p + 1$. D'altronde, quando C_p^n degenera in un $(n-p)$-latero di S_r, collo schema $(12), (13) \cdots (1, n-p)$, ed in p corde generiche di questo $(n-p)$-latero, si trova subito che la postulazione è esattamente $nl - p + 1$; e poichè, particolarizzando C_p^n nella propria famiglia, la postulazione non può crescere, così si conclude che $P_l = nl - p + 1$. Dunque:

L'ordine minimo delle forme di S_r che contengono una generica C_p^n, quando $n \geq p + r$, è il minimo intero λ per cui $\binom{\lambda + r}{r} + p \geq n\lambda + 2$. Le forme d'ordine $l \geq \lambda$ staccano su C_p^n una serie completa non speciale.

Naturalmente, quando C_p^n si particolarizza entro la propria famiglia, l'ordine minimo suddetto potrà abbassarsi e potrà perciò non valer più il teorema precedente. Così, ad esempio, per una generica quintica gobba razionale, è $\lambda = 3$; ma, come si sa, vi sono anche quintiche razionali (irriducibili) tracciate su quadriche.

11. *Applicazioni alla geometria numerativa.* Dalla possibilità che una C_p^n di S_r, variando nella propria famiglia, possa degenerare in un n-latero di genere p, si deduce *la completa giustificazione dei metodi di spezzamento parziale o totale, usati da varî Autori per la determinazione di numeri inerenti alle curve algebriche, nonchè la legittimità delle applicazioni del metodo funzionale di Cayley.*

È vero che non si potrà sempre ricorrere allo spezzamento totale in rette, perché potrà darsi che il numero che si ricerca divenga infinito, per inevitabili legami sussistenti fra i lati di un n-latero, appartenente ad una data famiglia. Così, ad esempio, chi voglia l'ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba, non potrà senz'altro ricorrere alla degenerazione in rette, perché potrebbe darsi che, nella famiglia di C_p^n, ogni n-latero dovesse avere di necessità tre o più rette in un piano. È appunto questo il caso della C_{10}^9 del tipo 2) considerato alla fine del n. 9.

Ma comunque, profittando dei teoremi dei nn. 6, 7, si potrà sempre pervenire rigorosamente al risultato, nel modo che ora indichiamo, riferendoci per brevità alla rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba.

Se $n \geq p + 3$, la C_p^n può degenerare in un n-latero L, di genere effettivo p, tale che mai più di due lati di L stanno in un piano (n. 6). L'ordine della rigata delle trisecanti si valuterà quindi subito, riferendosi alla *rigata* delle trisecanti di L. Si troverà così per quest'ordine l'espressione ben nota $\varphi(n, p)$, che non occorre qui trascrivere, bastandoci di avvertire ch'essa risulta evidentemente funzione soltanto di n, p. Dopo ciò si supponga che la C_p^n sia qualunque, anche con $n < p + 3$.

Si potranno allora aggiungere ad essa δ rette secanti, per guisa da ottenere una $C_p^{n+\delta}$, appartenente alla famiglia delle curve gobbe irriducibili d'ordine $n + \delta \geq p + 3$. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, si otterrà allora togliendo da $\varphi(n + \delta, p)$, δ volte l'ordine della rigata formata dalle corde di C_p^n appoggiate ad una sua secante; $\binom{\delta}{2}$ volte l'ordine della rigata formata dalle rette appoggiate a C_p^n e a 2 delle sue δ secanti; e infine $\binom{\delta}{3}$ volte l'ordine della schiera rigata costituita dalle rette appoggiate a 3 delle δ secanti di C_p^n; i quali ordini sono evidentemente funzioni delle sole n, p. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, risulterà dunque, in ogni caso, funzione delle sole n, p, e dovrà pertanto coincidere colla funzione $\varphi(n, p)$ prima trovata.

Come ho detto, con procedimenti di questo genere, si giustifica in ogni caso anche l'applicazione del metodo funzionale di Cayley. Né fanno eccezione i problemi relativi a coniche plurisecanti di curve gobbe (Berzolari, Severi), giacchè in questi casi, qualora, per la ragione detta sopra, non serva lo spezzamento in rette, si potrà ricorrere ad uno spezzamento misto della C_p^n in rette, coniche, cubiche gobbe, spezzamento la cui legittimità si stabilisce, per $n \geq p + 3$, con procedimenti analoghi a quelli già sviluppati (n. 6). E si osserverà poi che l'aggiunta di convenienti rette o coniche o cubiche, ad una qualunque $C_p^n (n < p + 3)$, dà luogo ad una $C_p^m (m > n)$ appartenente ad una famiglia non speciale (cfr. col. n. 7).

Queste considerazioni fanno senz'altro prevedere come sia possibile assurgere rigorosamente alla seguente conclusione generale:

Ogni numero inerente ad una C_p^n di S_r, in quanto sia relativo ad una condizione algebrica che abbia senso per una curva qualunque di ordine e genere dati, è una funzione razionale delle sole variabili n, p.

12. *Applicazioni alle questioni di realità.* Dirò in proposito soltanto poche parole, perché applicazioni di questo genere si prevedono senz'altro, quando si tenga presente il metodo cosidetto della «piccola variazione», che si usa nelle questioni di realità per le curve piane.

Dato un n–latero reale L di genere effettivo o virtuale p, appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r, a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P. Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P, e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L, ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purché si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L, che non contenga nodi proprî, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q, si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano «paralleli» a due semiraggi opposti, situati sullo stesso lato a di L, ed aventi per origini due diversi nodi proprî, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).