FRANCESCO SEVERI

TRATTATO

DI

GEOMETRIA ALGEBRICA

VOLUME I - PARTE I

GEOMETRIA DELLE SERIE LINEARI

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi - XII-1926

PREFAZIONE

Con questo volume inizio la pubblicazione di un ampio Trattato, nel quale — se il tempo e le forze mi basteranno — vorrei raccogliere, coordinare, completare dove occorra, tutto quanto vi è d'importante nel campo della geometria algebrica.

Seguiranno un volume dedicato ai sistemi continui di curve piane, sghembe e iperspaziali ed alle relative questioni d'esistenza, di classificazione, di postulazione; ed altri in cui verranno esposte la teoria riemanniana delle curve e dei loro integrali; la geometria sopra una superficie e sopra una varietà e le teorie degl'integrali ad esse appartenenti, nonchè le proprietà fondamentali delle funzioni (abeliane e automorfe) collegate colle funzioni algebriche; e infine la geometria numerativa.

Il programma è vasto; ma credo tornerà utile anche se riescirò a svolgerne soltanto una parte.

Io desidero che il Trattato sia metodico e che ogni questione venga sviluppata in modo esauriente e rigoroso, anche perchè occorre sfatar la leggenda che nella geometria algebrica la mancanza di rigore e di determinatezza sia quasi una necessità.

Non disconosco tuttavia che il proceder innanzi per rapide visioni, in cui si prospettino le linee essenziali dei singoli problemi, può, sotto altri aspetti, esser vantaggioso.

Io procedo invece coi piedi di piombo e il lettore accurato lo constaterà e noterà quante volte mi vien fatto di arrestarmi a dimostrar proprietà, che di solito si ammetton come evidenti.

Per esempio chi legge il capitolo sulle corrispondenze troverà i fondamenti di questa teoria svolti con ampiezza inusitata; e, una volta richiamatavi la sua attenzione, credo si convincerà *facilmente della necessità che, in un assetto rigoroso, sia ben fissato il valore dei principii di corrispondenza, nei riguardi delle molteplicità dei punti uniti.*

Questo volume si distacca alquanto dalle mie Lezioni *litografate del 1908 e dalle* Vorlesungen *del 1921, come può verificarsi con un' occhiata all' indice.*

Chi voglia esporre la parte essenziale della geometria sopra una curva in breve corso di lezioni, trova qui i mezzi adatti. Lo scioglimento delle singolarità d'una curva e le proprietà fondamentali che culminano nel teorema di Riemann-Roch, si conseguono col « metodo rapido », occorrendo soltanto il concetto generale di trasformazione birazionale e quello di gruppo jacobiano di una serie lineare. Ma anche gli altri metodi algebrico-geometrici (quello iperspaziale e quello più strettamente algebrico) sono esposti in modo che ciascuno di essi possa con facilità isolarsi dagli altri.

Roma, novembre 1926. FRANCESCO SEVERI

Nozioni introduttorie.

1. Funzioni algebriche di una variabile. — Le operazioni algebriche si distinguono in *razionali* ed *irrazionali*. L'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione sono operazioni razionali; mentre è irrazionale l'operazione di estrazione di radice d'indice qualunque; e, più in generale, l'operazione da eseguirsi sopra i coefficienti di un'equazione algebrica di grado $n > 1$ per risolverla. Ogni operazione razionale equivale alla risoluzione di un'equazione di primo grado.

Si dice che una variabile y è *funzione algebrica di una variabile* (indipendente) x, quando, per ogni dato valore di x, il od i corrispondenti valori di y si costruiscono mediante un numero finito di operazioni algebriche.

Tanto le variabili che i coefficienti delle equazioni, che rappresentano le operazioni algebriche da eseguirsi sulle variabili indipendenti, si supporranno di regola appartenenti al campo complesso, salvo espresso avvertimento in contrario. In questo campo, il teorema fondamentale dell'Algebra ci assicura che un'operazione algebrica rappresentata da

$$f(x, y) = 0,$$

ove f è un polinomio in x, y a coefficienti costanti, di grado n in y, fa passare da un valore qualunque di x ad n valori generalmente distinti di y.

Sicchè, qualunque sia la catena di operazioni algebriche, che conduce dalla variabile indipendente x alla funzione y, ad ogni x risponderà sempre un *numero finito* di valori di y. La funzione y dicesi *uniforme* o *monodroma* o *univoca* o *ad un valore*, se ad ogni x risponde un solo y; *poliforme* o *polidroma* o *polivoca* o *a più valori*, se ad ogni x rispondono più valori di y.

La successione di un numero finito di operazioni algebriche, è ancora un' operazione algebrica (rappresentabile cioè con una sola equazione); o, in altri termini, il legame fra la variabile x e la y, funzione algebrica di x, può sempre rappresentarsi eguagliando a zero un polinomio in x, y, a coefficienti costanti.

Se, invero, dalla x si passa ad y mediante una catena di operazioni algebriche, la prima delle quali conduca da x ad x_1, la seconda da x_1 ad $x_2, \ldots$, la s-esima da x_{s-1} ad x_s, l'ultima da x_s ad y, queste operazioni saranno rappresentate da equazioni algebriche della forma:

$$\varphi_1(x, x_1) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = 0, \ldots, \quad \varphi_s(x_{s-1}, x_s) = 0, \quad \varphi(x_s, y) = 0,$$

dove le φ denotano polinomi.

Eliminando le variabili intermediarie $x_1, x_2, \ldots, x_s$, si ottiene un'equazione risultante della forma

$$f(x, y) = 0,$$

dove f è ancora un polinomio.

Una funzione algebrica uniforme y di una variabile indipendente x, è necessariamente una funzione razionale di x.

Sia infatti

$$(1) \qquad f \equiv a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0$$

l'equazione algebrica che esprime il legame fra x ed y, le a_i essendo polinomi in x. Se ad un qualunque x risponde un solo y, due casi possono presentarsi:

1. L'equazione (1) è di grado $n = 1$, e allora ne segue senz'altro:

$$y = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

cioè y è funzione razionale di x.

2. L'equazione (1) ad ogni x fa corrispondere una radice n-pla y. In questo caso le $n-1$ equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0,$$

dei rispettivi gradi $n-1, n-2, \ldots, 1$ in y, per ogni x sono soddisfatte da quella medesima radice y, che soddisfaceva alla (1). Ma poichè:

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = n!\, a_0(x)y + (n-1)!\, a_1(x),$$

così risulta

$$y = -\frac{a_1(x)}{n a_0(x)},$$

cioè anche in tal caso y è funzione razionale di x.

II. **Funzioni algebriche di più variabili.** — Il concetto di funzione algebrica si estende alle funzioni di più variabili.

Si dice che y è *funzione algebrica delle variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se da ogni gruppo di valori attribuiti alle x, si passa al od ai corrispondenti valori di y, mediante operazioni algebriche. In altre parole: il legame fra y e le x deve essere espresso da un certo numero di equazioni algebriche, in cui posson comparire talune variabili intermediarie. Una volta eliminate queste ultime, il legame fra y e le x vien espresso da una relazione della forma:

$$a_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)y^n + a_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)y^{n-1} + \ldots + \\ + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

Come per le funzioni di una variabile, si dimostra il teorema:

Una funzione algebrica uniforme delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_m$ è una funzione razionale di queste variabili.

Un' applicazione immediata di tale proposizione conduce al *teorema fondamentale della teoria delle funzioni simmetriche.*

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le n radici di un' equazione algebrica $f(x) = 0$, di grado n, e $v = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sia una qualunque funzione razionale simmetrica delle radici. Essa è manifestamente una funzione algebrica dei coefficienti di f, perchè il legame fra questi coefficienti e v è espresso dalle equazioni algebriche:

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 0, \ldots, \quad f(x_n) = 0, \quad v = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Ed essendo v simmetrica, ad ogni gruppo di valori dei coefficienti corrisponde un sol valore di v. Perciò *v si esprime razionalmente mediante i coefficienti di $f(x) = 0$.*

III. Funzioni algebriche di un punto variabile sopra una curva o ipersuperficie algebrica. — Il concetto di funzione algebrica si può ulteriormente estendere, come segue. Sia

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

l'equazione di una curva algebrica di ordine n [1]. Si dice che una variabile z è funzione algebrica della coppia (x, y) soddisfacente alla (2), o, più brevemente, *funzione algebrica del punto variabile sulla curva* $f = 0$, quando da ogni soluzione (x, y) della (2) si passa al od ai corrispondenti valori di z, mediante operazioni algebriche. Da quanto precede risulta che la dipendenza tra z ed il punto variabile sulla curva può esprimersi aggiungendo alla (2) una relazione del tipo:

$$\varphi(x, y; z) = 0, \tag{3}$$

ove φ è un polinomio nei tre argomenti x, y, z.

Ne deriva al solito che *una funzione algebrica uniforme di un punto variabile sopra una curva algebrica, è una funzione razionale del punto stesso (cioè delle sue coordinate).*

Si potrà parlare più generalmente di funzioni algebriche di un punto variabile sopra una superficie algebrica o sopra un' *ipersuperficie* o *forma algebrica*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0,$$

di un iperspazio (lineare) ad r dimensioni S_r, in cui $x_1, x_2, \ldots, x_r$ denotino coordinate (non omogenee) di punto ed f sia ancora simbolo d'un polinomio nelle x [2]. E per tali funzioni algebriche varranno proprietà analoghe a quelle indicate per le funzioni di un punto d'una curva.

(1) Suppongo che il lettore conosca già la teoria proiettiva elementare delle curve algebriche piane e delle superficie dello spazio.

(2) Per la teoria proiettiva degli spazi (lineari) a più dimensioni il lettore potrà consultare il trattato del BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (2ª ed. Messina, Principato, 1923). Questo trattato verrà in seguito citato colla sola parola « *Iperspazi* ».

Un' ipersuperficie algebrica di S_r è l'insieme dei punti di S_r le cui coordinate $x_1, \ldots, x_r$ soddisfanno a un'equazione algebrica $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$. Introducendo le coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$, l'equazione della ipersuperficie si ottiene eguagliando a zero una certa forma algebrica nelle $x_0, \ldots, x_r$: donde la denominazione di *forma*, che si dà a un' ipersuperficie.

Vale anche il seguente teorema: *Una funzione algebrica di un punto variabile sopra una curva o superficie o ipersuperficie algebrica, la quale non diventi mai infinita (o nulla), si riduce ad una o più costanti.*

Trattiamo anzitutto il caso di una funzione algebrica y della variabile x, che sia definita dall' equazione (1). Possiamo supporre che i polinomi a non abbiano alcun divisore comune. Se a_0 dipende effettivamente da x, ad ogni radice dell' equazione $a_0(x) = 0$ risponde uno o più valori infiniti di y.

Pertanto, se y non diventa mai infinita, a_0 dovrà ridursi ad una costante. Ne deriva che anche le altre a dovranno essere indipendenti da x, perchè in caso diverso per $x = \infty$, essendo $a_0 \neq 0$, almeno una radice y diverrebbe infinita. In simil guisa si prova che, se y non si annulla mai, deve essere a_n una costante non nulla ed anche le altre a debbon ridursi a costanti, se no per $x = \infty$, essendo $a_n \neq 0$, almeno una radice y assumerebbe il valore zero. La conclusione è che ogni valor di y è costante.

Consideriamo ora il caso d'una funzione z di un punto variabile p. es. sopra la curva algebrica (2), e definita dall' equazione (3). Eliminando y fra le equazioni (2) e (3), si ottiene z come funzione della sola variabile x; e tale funzione per ogni x resta finita (o diversa da zero). Ne deriva che per ogni valor di x la z è costante.

Ci limitiamo a questi pochi cenni sulle proprietà generali delle funzioni algebriche, giacchè essi ci bastano per la materia da trattarsi al principio. In seguito ritorneremo su tali proprietà generali, considerandole dal punto di vista più elevato e fecondo della teoria delle funzioni analitiche.

IV. Trasformazioni razionali e birazionali. — Sieno Σ, Σ' due spazi ad r dimensioni (ora e nel seguito, quando non si avverta il contrario, sottintendiamo *lineari*), e $(x_1, \ldots, x_r)$, $(X_1, \ldots, X_r)$ sieno le rispettive coordinate non omogenee di punto.

Dicesi che fra i due spazi intercede una *trasformazione* o *corrispondenza razionale*, quando un punto variabile in uno determinato di essi, p. es. in Σ', è funzione razionale del punto variabile nell'altro, Σ. Una siffatta corrispondenza è definita cioè da relazioni del tipo:

$$X_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, \ldots, r), \tag{4}$$

ove le φ son funzioni razionali delle x, che possiamo anche supporre ridotte allo stesso denominatore. Ad un punto x di Σ, che non annulli questo comune denominatore, corrisponde un punto ben determinato X di Σ'.

Il determinante jacobiano J delle φ rispetto alle x, risulta manifestamente una funzione razionale delle x, la quale, in generale, non è identicamente nulla. Il suo denominatore è quello stesso delle φ, elevato però alla potenza $2r$. I punti di Σ in cui J si annulla o diventa infinito si distribuiscono in due forme algebriche. La teoria della indipendenza funzionale ci dice che, se $\bar{x}$ è un punto di Σ fuori delle forme suddette, ed $\bar{X}$ è il punto omologo di Σ', mentre il punto x di Σ descrive l'intorno ad r dimensioni di $\bar{x}$, il punto omologo X descrive in Σ' *tutto* l'intorno ad r dimensioni di $\bar{X}$. Dunque *nel caso che va considerato come generale, mentre il punto x descrive Σ, il punto omologo X, costruito mediante le* (4), *descrive tutto* Σ'.

Le cose procedon diversamente se J è identicamente nullo. Allora le φ sono funzionalmente dipendenti; cioè tra di esse passano una o più relazioni, che, per la natura algebrica della questione, si posson ricondurre ad essere razionali intere. Ma di ciò più tardi. Per ora ci basti avvertire che *nel caso particolare in esame, mentre x descrive Σ, il punto X descrive una varietà (algebrica*; ved. VI*) subordinata a* Σ'.

Nel caso generale, il generico punto x di Σ è funzione algebrica del punto X di Σ', ad un certo numero $n \geq 1$ di valori; cioè, mercè le (4), ad un generico x corrisponde un solo X, mentre un generico X proviene da n distinti punti x. La corrispondenza fra Σ, Σ' si dice in tal caso d'*indici* $(n, 1)$.

Se $n = 1$, anche x risulta funzione algebrica ad un valore, cioè funzione razionale di X. Le (4) si posson pertanto invertire razionalmente e scrivere:

$$x_i = \psi_i(X_1, \ldots, X_r) \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

ove le ψ son funzioni razionali delle X. Si dice allora che tra i due spazi intercede una *trasformazione birazionale* o *cremoniana*. L. Cremona [1] pel primo considerò siffatte trasformazioni da un punto di vista generale (nel piano e nello

[1] Cfr. Bologna Mem. 2_2, 621 (1863); 5, 3 (1864) e Giornale di Mat. 1, 305 (1862); 3, 214, 363 (1865).

spazio), ponendone in rilievo la loro importanza per lo sviluppo della Geometria algebrica.

L'introduzione delle coordinate omogenee si presta bene allo studio delle più riposte proprietà delle trasformazioni razionali e birazionali. Indicate con $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, $(X_0, X_1, \ldots, X_r)$, le coordinate omogenee di punto in Σ, Σ', una trasformazione razionale vien rappresentata da relazioni del tipo:

$$X_i = \Phi_i(x_0, \ldots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) \tag{4'}$$

ove le Φ son forme (polinomi omogenei) *dello stesso ordine* nelle x. Gli omologhi di un punto $\bar{x}$ di Σ che annulli tutte le Φ [*punto base* del *sistema lineare* $\lambda_0\Phi_0 + \ldots + \lambda_r\Phi_r = 0$ individuato dalle Φ [1]], si ottengono come limiti dei punti di Σ che si approssimano ad $\bar{x}$, lungo le diverse direzioni spiccate da $\bar{x}$. In generale ad $\bar{x}$ corrisponde così una varietà (algebrica) ad $r-1$ dimensioni; ma vi può corrispondere anche una varietà ad un minor numero di dimensioni o addirittura un punto ben determinato. I punti come $\bar{x}$ (punti base del sistema delle Φ) diconsi *punti fondamentali* della trasformazione, perchè le trasformazioni razionali sono da essi appunto caratterizzate nelle loro proprietà essenziali; così come le funzioni analitiche son caratterizzate dalle loro singolarità.

Le varietà corrispondenti ai singoli punti fondamentali, diconsi *varietà fondamentali*.

Due punti $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, $(x_0', x_1', \ldots, x_r')$, che non sieno fondamentali, e dieno luogo al medesimo punto X, son due punti per cui si verificano le relazioni

$$\Phi_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) = \sigma\Phi_i(x_0', \ldots, x_r') \qquad (i = 0, \ldots, r),$$

ove σ è un fattore non nullo di proporzionalità. Pertanto tutte le forme del sistema lineare $\lambda_0\Phi_0 + \ldots + \lambda_r\Phi_r = 0$, che passano per uno di quei punti, passano anche per l'altro. Viceversa, se x, x' son due punti non fondamentali, siffatti che le forme del nostro sistema lineare che passano per l'uno, passino in conseguenza per l'altro, i due legami fra i parametri λ:

$$\lambda_0\Phi_0(x_0, x_1, \ldots, x_r) + \ldots + \lambda_r\Phi_r(x_0, \ldots, x_r) = 0,$$
$$\lambda_0\Phi_0(x_0', x_1', \ldots, x_r') + \ldots + \lambda_r\Phi_r(x_0', \ldots, x_r') = 0,$$

[1] Cfr. Bertini, *Iperspazi*, p. 255. Vedi anche il successivo n. 4 del presente volume.

dovranno essere identici, cioè i coefficienti delle λ nelle due relazioni dovranno esser proporzionali; e perciò ai due punti x, x' corrisponderà il medesimo X.

Ne consegue che *affinchè le formule (4') definiscano tra Σ, Σ' una corrispondenza razionale siffatta che, mentre x si muove in Σ, il punto omologo descriva tutto Σ', occorre e basta:*

1. che le Φ sieno linearmente indipendenti;

2. che le forme $\lambda_0\Phi_0 + ... + \lambda_r\Phi_r = 0$ che passano per un punto generico di Σ, passino in conseguenza per un numero finito $n - 1$ (≥ 0) di ulteriori punti non fondamentali.

In particolare *la trasformazione sarà birazionale allora e solo allora che il sistema lineare $\lambda_0\Phi_0 + ... + \lambda_r\Phi_r = 0$ sia omaloidico, cioè quando r forme generiche del sistema si taglino soltanto in un punto con esse variabile.*

Le (4') definiranno una trasformazione fra Σ e una varietà *subordinata* a Σ', quando le forme Φ sieno linearmente dipendenti o quando, anche essendo esse indipendenti, tutte le forme $\lambda_0\Phi_0 + ... + \lambda_r\Phi_r = 0$, che passano per un punto x generico, si tagliano in infiniti altri punti non fondamentali (¹), i quali, come risulterà dal seguito, costituiscono una varietà algebrica.

Tutte queste circostanze saranno lumeggiate con maggior diffusione in un successivo Capitolo, ove studieremo le trasformazioni cremoniane fra piani. Per ora ci limitiamo a questi accenni preliminari e aggiungiamo soltanto qualche parola sulle trasformazioni cremoniane più semplici, che sono le *omografie* e le *trasformazioni quadratiche.*

Effettivamente le omografie sono particolari trasformazioni cremoniane, per cui i secondi membri delle (4') sono forme lineari delle x. Ma, appena sia $r > 1$, esistono trasformazioni cremoniane diverse dalle omografie, e le più semplici sono appunto le trasformazioni quadratiche, le quali fanno corrispondere a un iperpiano generico una quadrica (forma di 2.° ordine).

La più generale trasformazione cremoniana quadratica fra Σ, Σ' è rappresentata da formule che possono ricondursi al

(¹) Un esempio di un siffatto sistema lineare ∞^3, di superficie dello spazio ordinario, è fornito dalle quadriche passanti per due date rette a, b (con quadrici col vertice nel punto ab, quando le due rette sieno complanari). Fra esse, tutte quelle che passano per un generico punto P, contengono in conseguenza la retta uscente da P e appoggiata alle a, b.

tipo:

$$\rho X_0 = \varphi(x_1, x_2, ..., x_r), \ \rho X_i = x_0 x_i \quad (i = 1, 2, ..., r),$$

dove φ è una forma quadratica nelle $x_1, x_2, ..., x_r$.

Le inverse delle formule precedenti sono:

$$\sigma x_0 = \varphi(X_1, X_2, ... X_r), \ \sigma x_i = X_0 X_i \quad (i = 1, 2, .., r),$$

ove ρ, σ son fattori di proporzionalità (¹).

Invece *le trasformazioni birazionali fra due rette si riducon alle sole omografie.*

Se, invero,

$$X = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

rappresenta una trasformazione birazionale fra due rette, sulle quali x, X son coordinate di punto, e f, φ son due polinomi in x, detto n il maggior grado di questi due polinomi e posto:

$$\varphi \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \quad f \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n,$$

l'equazione:

$$F(x, X) \equiv (a_0 X - b_0)x^n + (a_1 X - b_1)x^{n-1} + ... + (a_n X - b_n) = 0,$$

o dovrà essere di grado $n = 1$ o dovrà per ogni X avere una radice x n-pla. Ma allora questa radice spetterà anche all'equazione

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} = n!(a_0 X - b_0)x + (n-1)!(a_1 X - b_1) = 0,$$

e quindi in ogni caso il legame fra x, X si potrà esprimere con un'equazione bilineare.

V. Curve algebriche sghembe. — Dicesi *curva algebrica sghemba irriducibile* un luogo di punti C tale che il punto (X, Y, Z) in esso variabile, sia funzione razionale del punto (x, y) variabile sopra una curva algebrica piana irriducibile D, di equazione $f(x, y) = 0$, colla condizione che, reciprocamente, il punto variabile su D sia funzione razionale del punto variabile su C. Insomma C si ottiene da D mediante una tra-

(¹) Bertini, *Iperspazi*, p. 455.

sformazione birazionale

$$X = \varphi_1(x, y), \quad Y = \varphi_2(x, y), \quad Z = \varphi_3(x, y); \tag{5}$$

$$x = \Psi_1(X, Y, Z), \quad y = \Psi_2(X, Y, Z), \tag{6}$$

ove φ, Ψ son funzioni razionali dei rispettivi argomenti.

Naturalmente la corrispondenza birazionale tra C, D non si estende necessariamente, come tale, a punti dello spazio (X, Y, Z) e del piano (x, y) esterni alle due curve. Se facciamo variare (x, y) in tutto il piano, le (5), qualora le φ siano funzionalmente indipendenti, rappresentano una superficie algebrica, luogo del punto (X, Y, Z), sulla quale è tracciata la curva C; ma neppure fra il piano e questa superficie la corrispondenza è necessariamente birazionale, potendo benissimo accadere che il punto variabile sulla superficie provenga da un certo numero finito di punti del piano, con esso variabili.

Curva algebrica sghemba riducibile è l'insieme di un numero finito di curve irriducibili.

Se, in particolare, la curva C definita dalle (5) è contenuta in un piano, facendo precedere un'opportuna trasformazione di coordinate — con che non si altera il tipo della nostra rappresentazione — si può supporre che il piano su cui giace la curva sia $Z = 0$. Allora il numeratore della $\varphi_3(x, y)$ contiene a fattore $f(x, y)$ ed eliminando x, y fra le prime due delle (5) e la $f(x, y) = 0$, otteniamo un'equazione algebrica in X, Y soddisfatta da tutti i punti di C. La stessa equazione può ottenersi sostituendo nella $f(x, y) = 0$ le (6), dopo avervi posto $Z = 0$. Sicchè C è una curva algebrica piana nel significato consueto della parola.

In coordinate omogenee le (5), (6) diventano

$$\rho X_i = \Phi_i(x_0, x_1, x_2) \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{5'}$$

$$\sigma x_i = \Psi_i(X_0, X_1, X_2, X_3) \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{6'}$$

le ρ, σ essendo fattori di proporzionalità, le Φ forme (polinomi omogenei) dello stesso grado nelle x e le Ψ forme dello stesso grado nelle X. S'intende che (x_0, x_1, x_2) denotano le coordinate omogenee di un punto variabile sulla curva D, che avrà ora l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, F essendo una forma nelle x, e (X_0, X_1, X_2, X_3) son le coordinate omogenee di un punto variabile sulla C.

Gli omologhi dei punti della curva D che annullano tutte le Φ, si costruiscono come limiti dell'omologo di un punto

generico, che tenda su D verso l'uno o l'altro di quelli. E similmente dicasi degli omologhi dei punti della curva C, che annullino tutte le Ψ.

Una superficie algebrica, che abbia infiniti punti comuni con una curva algebrica irriducibile sghemba C, la contiene per intero. Se, invero, la superficie $H(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0$ contiene infiniti punti di C, la curva algebrica piana $H(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0$ contiene infiniti punti della D, e, poichè questa è irriducibile, la contiene tutta; il che significa che ogni punto di C soddisfa all'equazione $H = 0$.

Proviamo ora che *l'intersezione di due superficie algebriche, prive di parti comuni, è una curva algebrica, irriducibile o no.*

Indicate con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate omogenee di punto nello spazio, siano

$$\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \beta(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

le equazioni delle due superficie, ove α, β son due forme, prime fra loro, degli ordini m, n.

Sia Γ la curva comune ad α, β, O un punto generico dello spazio e π un piano generico per O (cioè, in ultima analisi, un piano generico dello spazio). Il cono algebrico Δ d'ordine mn, che da O proietta Γ [1], si scinda in più parti, e sia Δ_1 una di queste, irriducibile e contata una volta sola, s'essa è multipla per Δ.

Sia Γ_1 l'insieme dei punti di Γ appartenenti a Δ_1. Il piano π sega α, β secondo due curve, che s'intersecano, fra gli altri, nei punti comuni a π e a Γ_1. Attesa la genericità di O e di π, in ognuno P di questi punti le due curve hanno molteplicità d'intersezione eguale alla molteplicità della generatrice OP pel cono Δ [2]. Sicchè la generatrice OP non contiene altri punti del luogo Γ_1, diversi da P.

[1] L'equazione di questo cono si costruisce razionalmente. Si può p. es. trasportare in O il punto $(x_0 = x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1)$ ed eliminare x_3 fra $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

[2] È appena necessario di avvertire che ciascuna P delle intersezioni di Γ_1 con un piano π andrà contata tante volte quant'è la molteplicità d'intersezione, lungo OP, di π col cono Δ_1, che proietta Γ_1 da un punto generico O di π. Ci riserbiamo di trattar più tardi del concetto di *molteplicità d'intersezione* dal punto di vista della teoria dei rami delle curve algebriche. Per ora può bastare la conoscenza elementare del punto di vista algebrico di tale concetto, quale ad es. si trova metodicamente esposto nella Memoria di SEGRE, *La molteplicità nelle intersezioni delle curve algebriche piane*, ecc. Giorn. di Mat. **36**, 1 (1898).

E poichè, data la generatrice generica di Δ_1, il punto P si individua con operazioni algebriche (razionali), così P è funzione razionale del punto M variabile sopra una sezione piana (irriducibile) di Δ_1; e similmente M è funzione razionale di P. Onde il luogo Γ_1 è una curva algebrica irriducibile.

Si conclude che Γ si scinde in tante curve algebriche irriducibili, quante sono le parti in cui si spezza il cono Δ.

La parte Γ_1 è segata da π in tanti punti quant'è l'ordine ν_1 del cono Δ_1. Variando O nello spazio, le parti di Δ variano con continuità, conservando lo stesso ordine e la stessa molteplicità. Dunque da ogni punto generico dello spazio Γ_1 è proiettata secondo un cono d'ordine ν_1, e quindi essa è tagliata in ν_1 punti da un piano generico dello spazio.

Questa conclusione vale per ogni curva algebrica irriducibile C, giacchè essa può sempre considerarsi come intersezione parziale di due superficie algebriche.

Escludiamo infatti che la data curva C, rappresentata dalle (5), giaccia in qualcuno dei piani coordinati. Allora ad un generico X corrisponde un numero finito di punti di C, che hanno quel dato X. Tali punti si costruiscono con ovvie operazioni algebriche, sicchè le coordinate Y, Z di un punto variabile su C risultano funzioni algebriche di X, definite da due equazioni algebriche

$$R(X, Y)=0, \quad S(X, Z)=0, \tag{7}$$

le quali s'ottengono eliminando x, y una volta fra le prime due delle (5) e la $f=0$, e un'altra volta fra la prima e la terza delle (5) e la $f=0$.

Le (7) rappresentano due cilindri algebrici passanti per C e non aventi parti comuni, perchè le loro generatrici non son parallele.

Pertanto C è intersezione, parziale o totale, di due superficie algebriche e quindi ad essa può applicarsi quel che sopra si è detto per la curva Γ_1.

Si arriva così al concetto di *ordine* di una curva algebrica sghemba e si può enunciare che:

Una curva algebrica sghemba irriducibile è segata da un piano qualunque dello spazio in un numero costante n di punti (ordine della curva) ed è proiettata da un punto generico dello spazio secondo un cono algebrico d'ordine n.

La generatrice generica del cono che proietta C dal punto generico O, non contiene che un punto della curva.

La molteplicità d'intersezione di C e di un piano π qualunque, in un punto P ad essi comune, eguaglia la molteplicità d'intersezione nel punto P', proiezione di P, della curva piana C', proiezione di C da un punto generico O di π, colla traccia di π sul piano di C'.

Così il teorema precedente, relativo alla costanza del numero n, viene ad acquistare un preciso significato in relazione a concetti, che, per le curve piane, si presuppongono già acquisiti.

Un punto P di C, tale che un piano generico per esso abbia colla curva molteplicità d'intersezione 1 (e che si proietti quindi in un punto semplice di C') è un *punto semplice* di C. *Punto multiplo* in caso contrario. *Un punto generico della curva irriducibile C è semplice*, perchè tale è il punto generico di C'.

Proviamo ora che:

I punti eventualmente comuni a più superficie algebriche $\alpha_1=0, \ldots, \alpha_h=0$, prive di parti comuni, si distribuiscono in un gruppo d' un numero finito di punti isolati ed in una curva irriducibile o no.

Poichè il teorema è vero per $h=2$, lo supporremo dimostrato per $h-1$ superficie. Se le $\alpha_1=0, \ldots, \alpha_{h-1}=0$ non hanno parti comuni, l'insieme delle loro intersezioni consterà dunque di una curva algebrica Γ, eventualmente scissa in più curve irriducibili $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, e in un gruppo di un numero finito di punti P isolati. I punti comuni alle h superficie date si devono tutti ritrovare in questo insieme. D'altronde $\alpha_h=0$ non può contenere infiniti punti di una delle $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ senza contenerla per intero; dunque, se si prescinde da alcune delle $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ eventualmente comuni a tutte le α, ciò che resta dell'insieme dei punti comuni a tutte le α, è un gruppo di un numero finito di punti.

Se dalle $\alpha_1=0, \ldots, \alpha_{h-1}=0$ si stacca una superficie comune $\gamma=0$, le superficie $\beta_1=0, \ldots, \beta_{h-1}=0$, ottenute dalle precedenti astraendo da $\gamma=0$, e la superficie $\alpha_h=0$, soddisfanno nel loro complesso al teorema. Ulteriori punti comuni a tutte le α son quelli comuni a $\gamma=0$ e ad $\alpha_h=0$. E poichè queste due superficie non hanno parti comuni, così anche le ulteriori intersezioni si distribuiscono in una o più curve algebriche.

Terminiamo questi preliminari sulle curve algebriche sghembe, dimostrando che:

Una curva C, che sia rappresentata parametricamente dalle formule

(8) $X = \varphi_1(x, y), \ Y = \varphi_2(x, y), \ Z = \varphi_3(x, y), \ f(x, y) = 0,$

ove f è una curva algebrica piana irriducibile e le φ son funzioni razionali, è algebrica.

In altri termini:

Per affermare che una curva sghemba C è algebrica, basta sapere che il punto in essa variabile è funzione razionale del punto variabile sopra una curva algebrica piana f, senza che, necessariamente, il punto di questa sia funzione razionale del punto di quella.

Se le (8) son tali che il punto (X, Y, Z) variabile su C proviene da un sol punto (x, y) variabile su f, siamo senz'altro nell'ambito della definizione già data di curva algebrica sghemba. In ogni caso, in corrispondenza ad un punto (X, Y, Z) di C, le (8) diventano compatibili nelle variabili (x, y) ed hanno pertanto un certo numero $\nu (\geq 1)$ di soluzioni comuni; cosicchè fra C ed f havvi una corrispondenza algebrica di *indici* $(1, \nu)$.

Eliminiamo x, y fra la prima, la seconda e la quarta delle (8). Si otterrà un'equazione algebrica risultante $F_1(X, Y) = 0$, che, nello spazio, rappresenta il cilindro proiettante C dal punto all'infinito dell'asse Z. Similmente, eliminando x, y fra la seconda, la terza e la quarta delle (8), otteniamo l'equazione $F_2(Y, Z) = 0$ del cilindro algebrico, che proietta C dal punto all'infinito dell'asse X. Questi due cilindri, non avendo le generatrici parallele, non posson avere parti comuni. La loro intersezione consta perciò di curve algebriche; e C, che ne fa parte, è dunque algebrica.

VI. Curve e varietà algebriche iperspaziali. — I concetti e le conclusioni relative alle curve algebriche sghembe si estendono agevolmente, imitando il procedimento indicato per le curve sghembe, alle curve e varietà algebriche iperspaziali.

Per *varietà algebrica irriducibile V_k, di dimensione k*, di uno spazio S_r $(k \leq r-1)$, si intende un luogo di punti che si possa porre in corrispondenza birazionale con una ipersuperficie algebrica irriducibile di uno spazio lineare a $k+1$ dimensioni. Una varietà *riducibile* è l'insieme di un numero finito di varietà irriducibili.

In particolare, quando sia $k = r-1$, si verifica subito che una V_{r-1} così definita non è che una ipersuperficie algebrica dello spazio S_r; cioè essa è rappresentabile con una sola equazione algebrica.

Quando sia $k = 1$, si ha una *curva algebrica iperspaziale.*

Si dimostra inoltre che *l'insieme dei punti dello S_r comuni a più ipersuperficie algebriche, si distribuisce in un numero finito di varietà algebriche, eventualmente di dimensioni differenti fra di loro.*

S'intende che qui chiamiamo varietà algebrica V_0, di dimensione 0, un gruppo di un numero finito di punti isolati (una V_0 irriducibile è un punto).

Estendendo il ragionamento esposto per le curve sghembe, si deduce, come corollario del precedente teorema, che è algebrica ogni varietà il cui punto sia funzione razionale del punto variabile sopra una forma algebrica.

Il teorema sulla varietà intersezione di più forme è stato dimostrato, nella sua completa generalità, da L. KRONECKER. Ad esso collegasi il concetto di *ordine* di una V_k algebrica irriducibile. Un S_{r-k} può bensì, nel caso $k > 1$, incontrare V_k in infiniti punti, senza contenerla, ma contenendo invece una varietà algebrica infinita *subordinata* a V_k (cioè appartenente a V_k). Però un S_{r-k} *generico* taglia V_k in numero finito costante di *punti semplici* (generalmente distinti), che è appunto l'ordine della V_k. La valutazione della molteplicità d'intersezione della V_k con un S_{r-k} che non ne contenga infiniti punti, si riconduce, mediante proiezione da un S_{r-k-2} generico, sopra un S_{k+1}, alla valutazione della molteplicità d'intersezione di un'ipersuperficie irriducibile e di una retta, non contenuta in essa, in un loro punto comune. Uno spazio *generico* S_{r-k+l} $(l \geq 1)$ taglia la V_k irriducibile in una varietà algebrica pure irriducibile, di dimensione l. Un iperpiano non contenente la V_k irriducibile, la taglia in una varietà, che può esser riducibile, ma che in ogni caso non può che constare di parti di dimensione $k-1$.

Tutto ciò il lettore potrà meglio approfondire nel citato trattato del BERTINI [1]. Per gli immediati nostri scopi bastano

[1] *Iperspazi*, Cap. 9°. Ved. pure cenni un po' più diffusi di quelli sopra esposti in ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, Bologna, Zanichelli, vol. 1, pag. 134 (citato in seguito brevemente come « Teoria geometrica »). Per notizie bibliografiche ved. l'articolo di C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume* (Encyklopädie der math. Wissen., Leipzig, Teubner, III, 2, Heft 7, pag. 808).

i concetti generali introdotti, su alcuni dei quali torneremo, precisandoli in ogni dettaglio, quando se ne presenterà il bisogno.

Qui aggiungeremo soltanto che, quando la V_k sia la trasformata birazionale di un' ipersuperficie lineare dello S_{k+1}, cioè d' uno spazio lineare S_k, essa chiamasi una *varietà razionale* od *omaloide*.

VII. **Geometria sopra un ente algebrico.** — Possiamo adesso caratterizzare le proprietà che formeranno oggetto dei nostri sviluppi ulteriori, come l' insieme delle proprietà di una V_k algebrica irriducibile, le quali si trasmettono immutate ad ogni trasformata birazionale di V_k; o, come anche brevemente si dice, ad ogni varietà *birazionalmente equivalente* alla data.

Per lo studio di tali proprietà è indifferente considerar l' una o l' altra delle varietà di una classe di varietà birazionalmente equivalenti. Si può cioè considerare l' astratto di questa classe e chiamarlo un *ente algebrico di dimensione k*, di cui ogni varietà della classe è un *modello proiettivo*, nel senso che, una volta fissatala, ne sono anche fissate le particolarità proiettive (spazio d' appartenenza, ordine, ecc.).

Allora le proprietà di cui è questione, e che ci occuperanno nella maggior parte di questo Trattato, costituiscono quella che si chiama *geometria sopra l' ente algebrico*. Nel presente volume ci limiteremo alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito [1].

La geometria sull' ente algebrico è un' estensione della geometria proiettiva (insieme delle proprietà invarianti per trasformazioni omografiche), come questa è un' estensione della geometria elementare (insieme delle proprietà invarianti di fronte al gruppo delle similitudini).

VIII. **Geometria numerativa.** — Tra le proprietà proiettive e tra quelle che spettano alla geometria sull' ente algebrico, ve ne sono che riferisconsi al numero delle soluzioni di determinati problemi algebrico-geometrici; mentre le altre hanno un significato più spiccatamente funzionale.

[1] Un' ampia bibliografia in proposito trovasi nello articolo di L. Berzolari, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (Encyklopädie der Math. Wissen., Leipzig, Teubner, III, 2, Heft 3, pag. 405).

Geometria numerativa è quella parte della geometria algebrica, che s' occupa appunto di trovare il numero delle soluzioni di siffatti problemi e di valutare la molteplicità delle singole soluzioni.

Di essa ci occuperemo di proposito nell' ultimo volume del presente Trattato. Tuttavia proprietà numerative avremo occasioni frequenti d' incontrare anche prima — ed in particolare in questo stesso volume — non di rado come opportuni strumenti per la deduzione di proprietà funzionali.

CAPITOLO PRIMO

Sistemi lineari di curve piane.

§ 1. - Generalità sopra i sistemi lineari di curve piane.

1. **Definizioni e proprietà elementari. Sistema congiungente e sistema intersezione di due dati sistemi.** — Consideriamo l'equazione

$$(1)\quad \lambda_0 f_0(x_0, x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_0, x_1, x_2) + \dots + \lambda_r f_r(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

ove le f_i denotano forme dello stesso ordine n nelle x, e le λ_i son parametri non tutti nulli. In un piano, in cui x_0, x_1, x_2 si assumano come coordinate omogenee di punto, l'equazione (1), per dati valori delle λ_i, rappresenta una curva algebrica d'ordine n. Se le λ_i assumono tutti i possibili valori (complessi), non simultaneamente nulli, si ottiene così una famiglia di curve algebriche, che chiamasi un *sistema lineare*, perchè i parametri, che determinano la posizione di una curva entro al sistema, compaiono linearmente nella (1).

Sia f la curva del sistema che corrisponde ai valori $(\lambda_0', \lambda_1', \dots, \lambda_r')$ dei parametri λ_i; allora essa corrisponde anche ai valori $(\rho\lambda_0', \rho\lambda_1', \dots, \rho\lambda_r')$ $(\rho \neq 0)$. Perciò la determinazione di f entro al sistema dipende essenzialmente dai valori dei rapporti di r qualunque dei parametri λ_i allo $(r+1)$-esimo (supposto non nullo).

Vediamo sotto quali condizioni, viceversa, data la curva sono determinati i valori dei suddetti rapporti. All'uopo, supponiamo che una curva del sistema corrisponda a due diversi gruppi di valori delle λ, e cioè ai gruppi $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$, $(\lambda''_0, \lambda''_1, \dots, \lambda''_r)$. Allora le due equazioni

$$\lambda_0' f_0 + \dots + \lambda_r' f_r = 0, \quad \lambda_0'' f_0 + \dots + \lambda_r'' f_r = 0$$

hanno le stesse soluzioni x e perciò i loro primi membri differiscono soltanto per un fattore costante ρ; cioè si ha la seguente identità nelle x:

$$(2)\quad \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r \equiv 0,$$

dove si è posto $\alpha_i = \lambda_i' - \rho\lambda_i''$. Ora due casi posson presentarsi: o tutte le α_i son nulle ed allora si ha $\lambda_i' = \rho\lambda_i''$ per ogni i, oppure esiste qualche α non nulla.

Supposto p. es. $\alpha_0 \neq 0$, risulta

$$f_0 \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} f_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} f_2 - \dots - \frac{\alpha_r}{\alpha_0} f_r,$$

cioè una delle forme date si esprime come combinazione lineare delle rimanenti. In questo caso dicesi che le forme date son *linearmente dipendenti* od anche che son linearmente dipendenti le curve $f_0 = 0$, $f_1 = 0, \dots, f_r = 0$.

Le curve stesse diconsi *linearmente indipendenti*, quando non esiste alcuna combinazione delle f, a coefficienti costanti, la quale sia identicamente nulla nelle x, senza che siano nulli tutti quei coefficienti. Si ha così il teorema:

Se le curve $f_0 = 0, \dots, f_r = 0$ son linearmente indipendenti, ogni curva del sistema (1) *determina univocamente i rapporti di r qualunque dei parametri λ_i allo* $(r+1)$*-esimo* (*supposto non nullo*).

In questo caso le curve del sistema sono pertanto in corrispondenza biunivoca continua coi gruppi di valori di r numeri. Il sistema dicesi perciò di *dimensione* r o ∞^r.

Una sola curva verrà considerata come un *sistema lineare di dimensione zero*.

Se, sempre nell'ipotesi che le $f_0 = 0, \dots, f_r = 0$ sieno linearmente indipendenti, si assumono $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ come coordinate omogenee di punto di uno spazio lineare S_r, nasce una corrispondenza biunivoca senza eccezione e continua, fra le curve del sistema (1) e i punti di S_r.

Consideriamo ora il caso generale che esistano fra le f relazioni identiche del tipo (2), per valori non tutti nulli delle α. Scegliamo anzitutto una qualunque forma f_0 tra le $f_0, f_1, \dots, f_r$. Due casi posson presentarsi: o tutte le altre f sono linearmente dipendenti da f_0, cioè differiscono da f_0 per un fattore costante; oppure è possibile trovare nel gruppo

$f_1, f_2, \dots, f_r$ una forma, e sia f_1, indipendente da f_0. Anche adesso due casi son possibili: o tutte le altre f sono linearmente dipendenti da f_0, f_1; oppure è possibile trovare tra le $f_2, f_3, \dots, f_r$ una forma, e sia f_2, linearmente indipendente da f_0, f_1; ecc. Così proseguendo, riusciremo a trovare tra le $f_0, \dots, f_r$ certe $h+1$ forme $f_0, f_1, \dots, f_h$, linearmente indipendenti tra loro, e tali che le $r-h$ rimanenti forme si esprimono come combinazioni lineari di quelle, con identità del tipo:

$$(3)\quad \begin{cases} f_{h+1} \equiv \varepsilon_0' f_0 + \varepsilon_1' f_1 \dots + \varepsilon_h' f_h, \\ f_{h+2} \equiv \varepsilon_0'' f_0 + \varepsilon_1'' f_1 \dots + \varepsilon_h'' f_h, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r \quad \equiv \varepsilon_0^{(r-h)} f_0 + \varepsilon_1^{(r-h)} f_1 + \dots + \varepsilon_h^{(r-h)} f_h, \end{cases}$$

dove le ε denotano costanti.

Se si sostituiscono queste espressioni delle $f_{h+1}, \dots, f_r$ nella (1), s'ottiene un'equazione della forma:

$$(4)\qquad \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h = 0,$$

cioè ogni curva del sistema lineare (1) appartiene al sistema (4). Viceversa, è chiaro che ogni curva di (4) appartiene ad (1), giacchè l'equazione (1) riducesi appunto alla forma (4) ponendovi $\lambda_{h+1} = \lambda_{h+2} = \dots = \lambda_r = 0$. Le equazioni (1) e (4) rappresentano cioè il medesimo sistema di curve.

Ma il sistema (4) è un sistema lineare ∞^h e i suoi elementi (curve) si possono rappresentare biunivocamente coi punti di un S_h, in cui $\mu_0, \dots, \mu_h$ siano coordinate omogenee di punto; dunque:

Le curve di un sistema lineare, considerate come elementi, si possono in ogni caso porre in corrispondenza continua e biunivoca senza eccezioni, coi punti di uno spazio lineare, la cui dimensione è eguale a quella del sistema.

Questa corrispondenza è tale che *curve linearmente indipendenti vengon rappresentate da punti linearmente indipendenti e viceversa.*

Infatti, se le curve

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{h} \mu_i' f_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{h} \mu_i'' f_i = 0, \dots, \quad \sum_{i=0}^{h} \mu_i^{(s)} f_i = 0$$

del sistema (4), sono indipendenti, non esiste, per valori non tutti nulli delle η_i, alcuna identità della forma

$$\eta_1 \Sigma \mu_i' f_i + \eta_2 \Sigma \mu_i'' f_i + \dots + \mu_s \Sigma \mu_i^{(s)} f_i \equiv 0,$$

cioè della forma:

$$f_0 \sum_{j=1}^{s} \mu_0^{(j)} \eta_j + f_1 \sum_{j=1}^{s} \mu_1^{(j)} \eta_j + \dots + f_h \sum_{j=1}^{s} \mu_h^{(j)} \eta_j \equiv 0.$$

Poichè le curve $f_0, f_1, \dots, f_h$ sono linearmente indipendenti, un'identità di questa forma implica le relazioni

$$\begin{gathered} \mu_0' \eta_1 + \mu_0'' \eta_2 + \dots + \mu_0^{(s)} \eta_s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_h' \eta_1 + \mu_h'' \eta_2 + \dots + \mu_h^{(s)} \eta_s = 0, \end{gathered}$$

che risultano dunque impossibili per valori non tutti delle η; cioè i punti $(\mu_0', \mu_1', \dots, \mu_h')$, $(\mu_0'', \mu_1'', \dots, \mu_h'')$, ...$(\mu_0^{(s)}, \mu_1^{(s)}, \dots, \mu_h^{(s)})$ son linearmente indipendenti. Se, viceversa, questi punti sono indipendenti, invertendo il ragionamento si conclude che son indipendenti le curve (5).

Questo teorema rende possibile di trasportare tutte le proprietà degli spazi lineari ai sistemi lineari di curve: anzi *esso identifica addirittura un sistema lineare di curve piane con uno spazio lineare, bastando assumere come punti (elementi) di questo spazio le curve del sistema.*

Così, al fatto che uno spazio S_k, che sia individuato da $k+1$ punti indipendenti di un $S_h (k \leq h)$, giace completamente nello S_h, corrisponde il teorema:

Un sistema lineare, il quale sia individuato da un certo numero di curve linearmente indipendenti di un dato sistema lineare Σ, appartiene completamente a Σ.

In particolare si vede che *in un sistema lineare ∞^h non posson trovarsi più di $h+1$ curve linearmente indipendenti ed il sistema può essere individuato da $h+1$ qualunque delle sue curve, purchè tra loro indipendenti.*

Del resto queste proprietà posson anche dimostrarsi direttamente, senza profittare del linguaggio iperspaziale.

Un altro teorema che deriva senz'altro dalla considerazione dello *spazio d'intersezione* e dello *spazio congiungente* di due spazi $S_k, S_{k'}$, cioè dello spazio lineare di massima dimensione, che è contenuto in entrambi, e dello spazio lineare di dimensione minima, che li contiene, è il seguente:

Se c è la dimensione del sistema lineare di minima dimensione, che contiene due dati sistemi lineari Σ, Σ', di dimensioni k, k' (sistema congiungente), ed i è la dimensione del sistema lineare di massima dimensione, che è contenuto in entrambi (sistema intersezione), vale la relazione

$$k + k' = c + i,$$

dove deve porsi $i = -1$, se non esiste alcuna curva comune a Σ, Σ' (1).

Se p. es. si considerano due fasci di coniche

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0, \quad \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 = 0,$$

in mutua posizione generica, non esistendo alcuna curva ad essi comune, bisogna porre $i = -1$, e il loro sistema congiungente è il sistema ∞^3:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 = 0.$$

Quando invece gli 8 punti base dei due fasci giacciono sopra una medesima conica, bisogna porre $i = 0$, e perciò il sistema congiungente viene ad aver la dimensione $c = 2$ (le funzioni f_0, f_1, φ_0, φ_1 non son più linearmente indipendenti).

Il sistema lineare più ampio di curve d'ordine n, è il sistema di tutte le curve d'ordine n del piano; esso è effettivamente un sistema lineare, perchè nell'equazione di una curva d'ordine n i coefficienti, che sono in questo caso i parametri, compaiono linearmente. Questo sistema ha la dimensione $N = \frac{n(n+3)}{2}$. Lo denoteremo di solito con $[N]$, e collo stesso simbolo, quando non vi sia ambiguità, denoteremo anche uno spazio lineare S_N rappresentativo del sistema (2).

2. Condizioni algebriche e lineari. — Una *condizione* c imposta alle curve piane di ordine dato n, dicesi *algebrica*, quando può rappresentarsi completamente con un sistema di equazioni

(1) Una dimostrazione diretta di questo teorema (la quale devesi a SEGRE) si trova nella nota a pie' di pag. 8 della Monografia di BERTINI, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico*, Ann. di Mat. 22_2, 1, (1894) (citata brevemente in seguito come: « Geometria delle serie lineari »).

(2) Il simbolo $[r]$, per indicare uno spazio lineare S_r, è stato introdotto da SCHUBERT.

algebriche (omogenee) negli $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti (omogenei) della curva variabile; cioè quando le curve di $[N]$, che soddisfanno ad essa, costituiscono una varietà algebrica V, che si chiama più precisamente, in tal caso, un *sistema algebrico di curve* (Nozioni introd. VI).

La varietà V può scindersi in un numero finito di *parti irriducibili* V_1, V_2, ..., che possono avere anche dimensioni differenti h_1, h_2, ...

Se V è irriducibile e di dimensione h od è spezzata in parti irriducibili della stessa dimensione h, si dice che *la data condizione c ha la dimensione $d = N - h$*. Se V è spezzata in parti di diverse dimensioni h_1, h_2, ..., si conviene di solito di assumere come dimensione della condizione data c il minore dei numeri $N - h_1$, $N - h_2$, ...; cioè come dimensione di V la massima fra le dimensioni delle sue parti.

La condizione c può esser suscettibile di variare con continuità, e ciò quando nelle equazioni che la definiscono compaiano parametri variabili. P. es. la condizione perchè una conica tocchi una retta, è suscettibile di variare con continuità colla retta. Essa è rappresentata da un'equazione di 2° grado $\Phi = 0$ nei 6 coefficienti (omogenei) dell'equazione della conica; e nella $\Phi = 0$ compariscono come parametri variabili i coefficienti dell'equazione della retta.

Quando la condizione c è suscettibile di variare con continuità e la si lascia indeterminata dentro al sistema continuo in cui è capace di variare, può accadere che le curve che soddisfanno ad una particolarizzazione c_0 di c, col tendere di c a c_0, non provengano tutte come *posizioni limiti* da quelle che soddisfanno alla generica c. Un esempio espressivo, che esamineremo dettagliatamente in seguito, è il seguente:

Le quartiche piane, che toccano un gruppo G di 12 rette del piano, condotte genericamente per un punto, sono tutte spezzate, ma vi sono posizioni particolari G_0 di G, per cui, oltre alle predette quartiche spezzate, se ne hanno di irriducibili. Quando G tende a G_0 vi sono dunque al limite curve che soddisfanno alla voluta condizione, relativa a G_0, e che non son limiti di quelle che soddisfanno alla condizione generica.

Occorre pertanto andar cauti nelle deduzioni concernenti condizioni algebriche variabili. Finchè non sarà possibile di sviscerare come si conviene la questione (¹), noi supporremo sempre che la condizione algebrica in esame sia stata *fissata* entro al sistema continuo, in cui essa possa eventualmente variare. E se non diremo espressamente come la condizione debba intendersi fissata, vuol dire che la intendiamo fissata in modo affatto generico.

Una volta chiarito questo punto, diremo che una *fissata* condizione algebrica c è *irriducibile*, quando è irriducibile la varietà V delle curve che ad essa soddisfanno. *Riducibile* nell'ipotesi contraria.

Nel caso di condizioni variabili il concetto di irriducibilità ha un carattere assai più riposto, sul quale per ora non ci fermiamo.

Così p. es. le condizioni perchè una conica tocchi una o due date coniche, hanno rispettivamente le dimensioni 4 e 3 e sono irriducibili; mentre la condizione che una conica tocchi tre date coniche è riducibile, essendo soddisfatta dalle ∞^2 coniche ciascuna delle quali si riduce, come luogo di punti, ad una retta doppia, e da altre ∞^2 coniche irriducibili. La condizione affinchè una conica tocchi quattro date coniche, è ancora riducibile, giacchè il sistema delle coniche che ad essa soddisfanno si scinde nella suddetta varietà di ∞^2 rette doppie ed in una semplice infinità di coniche irriducibili; ecc.

Un *sistema algebrico di curve* dicesi *irriducibile* o *riducibile*, secondo che è irriducibile o riducibile la varietà di punti che lo rappresenta in $[N]$. Conformemente alla convenzione sopra fatta per le condizioni algebriche, quando il sistema algebrico si spezzi in più parti di varie dimensioni, si assumerà come sua dimensione la massima di quelle.

Così p. es. è irriducibile il sistema ∞^8 di tutte le curve piane del 3° ordine con un punto doppio; mentre è riducibile il sistema ∞^{11} di tutte le curve piane del 4° ordine con tre punti doppi, giacchè esso si spezza nel sistema ∞^{11} di tutte le curve piane razionali del 4° ordine e nel sistema ∞^{11} di tutte le quartiche ognuna delle quali è composta da una cubica piana e da una retta.

Fra le condizioni algebriche son particolarmente importanti le *condizioni lineari*, cioè quelle che son rappresentate da

(¹) La quale è stata approfondita nelle Memorie dell'Autore: *Sul principio della conservazione del numero*, Palermo Rend., **33**, 313, (1912); *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*, Istit. Veneto Atti, **75**, 1121, (1916).

sistemi di equazioni lineari e che pertanto son soddisfatte da *sistemi lineari* di curve. *Una condizione lineare è sempre irriducibile.*

Consideriamo ora un sistema algebrico irriducibile, Σ, ∞^r, di curve d'ordine n; e scegliamo un punto P_1 del piano per cui non passino tutte le curve di Σ. In $[N]$ le curve d'ordine n uscenti da P_1 (soddisfacenti cioè ad una condizione lineare di dimensione 1) son rappresentate dai punti di un iperpiano, che taglia la varietà irriducibile rappresentativa di Σ, in una varietà Σ_1, di dimensione $r-1$, la quale, se è spezzata, consta di parti tutte *della stessa dimensione* $r-1$ (Nozioni introd. VI). Scelgasi ora nel piano un punto P_2 per cui non passino tutte le curve di alcuna delle parti di Σ_1. Le curve d'ordine n, uscenti da $P_1 . P_2$, son rappresentate in $[N]$ dai punti di un S_{r-2}, comune agl'iperpiani I_1, I_2 rappresentativi di quelle curve che passano per P_1 e di quelle che passano per P_2. L'iperpiano I_2 (cioè lo spazio S_{r-2} suddetto) sega Σ_1 in una varietà Σ_2, che, se è spezzata, consta di parti tutte della stessa dimensione; ecc.

Così proseguendo, si arriva a scegliere nel piano r punti $P_1, P_2, ..., P_r$, il passaggio pei quali equivale, per le curve di Σ, ad r condizioni semplici (cioè di dimensione 1) *indipendenti* fra loro, o, in altri termini, ad una condizione (lineare) r-pla (di dimensione r). Le curve di Σ, che passano pei P, sono pertanto in numero finito: il loro numero eguaglia il numero dei punti in cui la varietà imagine di Σ, in $[N]$, è segata da un S_{N-r}, che non ne contenga infiniti punti, cioè all'ordine della varietà stessa (Nozioni introd. VI).

La proprietà permane al variare dei punti P nel piano, purchè il numero delle curve di Σ che passano pei P si conservi finito, e purchè, naturalmente, ognuna di queste curve si conti con conveniente molteplicità. E ciò vale evidentemente anche se il sistema di partenza Σ è riducibile, a condizione però che la dimensione di ciascuna delle sue parti sia r. Si conclude dunque col teorema:

Se Σ è un sistema algebrico ∞^r di curve piane, irriducibile o spezzato in parti di egual dimensione r, per r punti generici del piano passa un numero finito ν di curve di Σ, e, al variare degli r punti, il numero ν si conserva costante o diventa infinito.

Il teorema non è vero se il sistema Σ si spezza in parti di diverse dimensioni. Prendiamo p. es. il sistema irriducibile

∞^4 Σ_1 delle coniche che toccano una retta data, e aggiungiamo ad esso un fascio generico Σ_2 di coniche. Sia Σ il sistema algebrico costituito da $\Sigma_1 + \Sigma_2$. Allora per 4 punti generici del piano passano due curve di Σ, mentre, se i 4 punti stanno sopra *una* conica di Σ_2, per essi passano soltanto 3 curve di Σ, e non infinite.

Il numero costante ν delle curve di un sistema algebrico ∞^r, irriducibile o composto di parti della stessa dimensione, che passano per r punti generici del piano, chiamasi *indice del sistema*. Per i sistemi che si spezzino in parti di dimensioni differenti fra loro, non c'è luogo a considerare l'indice.

Se in particolare il sistema ∞^r Σ è lineare (e perciò irriducibile), esso è rappresentato in $[N]$ da uno spazio S_r, che è tagliato in un sol punto da uno spazio S_{N-r} generico, e gli spazi S_{N-r} che contengono infiniti punti di S_r, hanno comune con questo tutto uno spazio lineare.

Sicchè:

Per r punti generici del piano passa una sola curva di un sistema lineare ∞^r. Se per un gruppo di r punti particolari passano infinite curve del dato sistema lineare, esse formano un sistema lineare.

Oltre alle condizioni di passaggio per dati punti, si possono considerare altre condizioni lineari importanti (che, in ultima analisi, riduconsi pure a condizioni di passaggio per dati punti, distinti o infinitamente vicini).

Se un gruppo di t punti è dato sopra una curva fissa Γ, la condizione c perchè una curva piana d'ordine n passi per quei punti, resta lineare qualunque sieno le posizioni dei t punti su Γ ed in particolare quando i t punti vadano a coincidere in un medesimo punto di Γ. Si ottiene così, al limite, la condizione affinchè una curva d'ordine n abbia con Γ, in un dato punto, un contatto t-punto (cioè d'ordine $t-1$). *Le condizioni di contatto più o meno intimo, con date curve, in dati punti, sono dunque condizioni lineari.*

Ciò risulta del resto anche nel modo seguente. Se la curva d'ordine n, $f(x, y) = 0$, deve avere con Γ in P un contatto d'ordine $t-1$, dovrà in P annullarsi il polinomio f; e le derivate $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^{t-1}y}{dx^{t-1}}$, ove y è funzione implicita di x definita dall'equazione $f(x, y) = 0$, dovranno in P assumere determinati valori, dipendenti solo da Γ e da P. Ora tutte queste condizioni sono manifestamente lineari (ved. per maggiori dettagli il n. 43, Oss.).

Anche *la condizione che un dato punto del piano sia s-plo per una curva d'ordine n, è lineare*, giacchè, scritta l'equazione di una curva d'ordine n in coordinate omogenee, $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, quella condizione viene espressa annullando nel punto le derivate di ordine $s-1$ della forma f, le quali contengono tutte linearmente i coefficienti di f.

Infine osserveremo che *è lineare la condizione perchè una curva d'ordine n contenga come parte una data curva (algebrica)* Γ, giacchè le curve d'ordine n che contengono come parte Γ formano un sistema lineare, la cui parte variabile descrive il sistema lineare di tutte le curve d'ordine $n-\nu$, ν essendo l'ordine di Γ. Del resto, se Γ_1 è una parte irriducibile d'ordine ν_1 di Γ, è chiaro che la condizione affinchè una curva d'ordine n contenga Γ_1, equivale alla condizione perchè una curva d'ordine n contenga $n\nu_1 + 1$ punti di Γ_1.

Le curve di un sistema lineare d'ordine n, che soddisfanno ad una condizione lineare, costituiscono un sistema lineare, che è quello comune al dato ed al sistema lineare delle curve d'ordine n soddisfacenti alla condizione fissata; in particolare dunque *costituiscono un sistema lineare le curve di un dato sistema lineare, alle quali s'imponga di passare per dati punti, con assegnate moltiplicità, di aver contatti determinati con curve date in punti dati, e di contenere come parte fissa una curva data.*

3. Punti base d'un sistema lineare. — Dicesi *punto base* di un sistema lineare Σ, un punto comune a tutte le curve del sistema. Se p. es. il sistema Σ è dato dall'equazione (1) (pag. 18), i punti base del sistema son quelli — e soltanto quelli — comuni a tutte le curve $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, ..., $f_r = 0$.

Quando Σ è un *fascio*, cioè un sistema lineare di dimensione $r = 1$, esso possiede di certo punti base; il loro numero complessivo è n^2, ove n sia l'ordine delle curve $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, che individuano il fascio, ed esse non abbiano parti comuni.

Una *rete* ($r = 2$) non ha in generale alcun punto base, e così pure un sistema di dimensione $r > 2$, perchè tre o più curve non hanno in generale punti comuni.

Può anche darsi che un sistema lineare abbia infiniti punti base, costituenti una o più curve algebriche, che si distaccano come parti fisse da tutte le curve del sistema. Così accade p. es. del sistema

$$\lambda_0\varphi f_0 + \lambda_1\varphi f_1 + \dots + \lambda_r\varphi f_r = 0,$$

che ha infiniti punti base lungo la curva $\varphi = 0$.

Quando un punto P è comune ad $r+1$ curve linearmente indipendenti di un sistema lineare ∞^r, esso è un punto base del sistema, perchè l'equazione di una qualunque curva del sistema è combinazione lineare di quelle $r+1$ curve indipendenti.

4. **Sistemi lineari di forme algebriche.** — Le proprietà esposte nei nn. precedenti, sui sistemi lineari di curve algebriche piane, ed i ragionamenti che ad esse ci hanno condotto, valgono, coi debiti cangiamenti di parole, pei sistemi di forme algebriche di uno spazio S_r, cioè pei sistemi rappresentati da equazioni del tipo:

$$\lambda_0 f_0(x_0, x_1, \dots, x_r) + \dots + \lambda_k f_k(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0,$$

ove $x_0, x_1, \dots, x_r$ son coordinate omogenee di punto in S_r, e le f son polinomi omogenei di uno stesso ordine n nelle x.

Così: un sistema lineare di forme di dimensione k, può esser sempre individuato da $k+1$ sue forme linearmente indipendenti; fra le dimensioni di due dati sistemi lineari dello stesso ordine e le dimensioni del sistema congiungente e del sistema intersezione vale la relazione di pag. 22; per k punti generici dello spazio ambiente passa una sola forma di un dato sistema lineare ∞^k. Inoltre sono condizioni lineari, per la totalità delle forme algebriche d'ordine n di S_r, la quale costituisce un sistema lineare di dimensione $\binom{n+r}{r} - 1$, tutte quelle indicate al n. 2. Più in generale, per una forma algebrica di S_r, di dato ordine, è una condizione lineare quella di toccare un dato spazio S_h, subordinato ad S_r, in un punto dato (e quindi anche di toccare una V_h data in un suo dato punto semplice), come quella di contenere una data V_h algebrica ($h = 0, 1, 2, \dots, r-1$).

La condizione necessaria e sufficiente perchè un punto sia base per un sistema lineare di forme ∞^k, è ch'esso sia comune a $k+1$ forme indipendenti del sistema. Poichè i punti comuni a più forme date costituiscono una varietà algebrica, formata eventualmente di parti di differenti dimensioni (Noz. introd. VI), così accade lo stesso dei punti base di un sistema lineare di forme di S_r. Vi potranno pertanto essere punti base isolati in numero finito, altri distribuiti lungo un numero finito di curve algebriche, altri lungo un numero finito di superficie algebriche; e così via.

Per $r = 0$, ogni forma algebrica del dato sistema lineare rappresenta, nello spazio ambiente, che è in tal caso una retta, un gruppo di punti. Il sistema lineare si chiama allora anche una *serie lineare di gruppi di punti sulla retta*. La totalità dei gruppi di n punti della retta è una serie lineare ∞^n (1).

§ 2. Teoremi di Lüroth e di Bertini.

5. **Lemma sopra le serie algebriche di gruppi di punti sopra una retta.** — Il teorema, dimostrato al n. 2, che per r punti generici del piano passa una sola curva di un sistema lineare ∞^r, si può invertire; ma per stabilire il teorema reciproco conviene premettere il lemma seguente:

Se sopra una retta è data una serie algebrica Σ di gruppi di n punti, tale che un punto generico della retta appartenga ad un sol gruppo della serie, la serie stessa è lineare, cioè i suoi gruppi posson rappresentarsi con un'equazione della forma $f(x) + \lambda g(x) = 0$, dove f e g sono polinomi di grado n e λ è un parametro.

Un gruppo di n punti sopra una retta è rappresentato da un'equazione algebrica $\varphi(x) = 0$ di grado n. Se i coefficienti di φ son legati da un sistema A di equazioni algebriche, variando i coefficienti in modo da soddisfare al sistema A, il gruppo $\varphi(x) = 0$ descrive sulla retta una serie algebrica di gruppi di n punti.

L'ipotesi del lemma è che un generico punto x_0 della retta appartenga ad un sol gruppo $\varphi = 0$. Per determinare il gruppo cui appartiene x_0, bisogna eliminare i coefficienti di φ fra le equazioni A e le equazioni $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = 0$.

(1) Per più ampli dettagli sulla teoria dei sistemi lineari di forme algebriche, ved. Bertini, *Iperspazi*, pag. 255.

È noto dall' Algebra che questa operazione si compie razionalmente, così che i coefficienti dell' equazione risultante risultano funzioni razionali di x_0. Tale equazione dovrà d' altronde esser di grado n ed esser soddisfatta dagli n punti del gruppo cercato, uno dei quali è appunto x_0. Essa è pertanto della forma:

$$(1) \qquad F(x_0, x) \equiv a_0(x_0)x^n + a_1(x_0)x^{n-1} + \ldots + a_n(x_0) = 0,$$

ove le a son polinomi in x_0.

Al variare di x_0, la (1) rappresenta il legame fra x_0 e i rimanenti $n-1$ punti del gruppo individuato da x_0. Pertanto, se x è dato, la equazione (1) è soddisfatta da tutte quelle posizioni di x_0, che individuano un gruppo contenente x. In altre parole: dato x, la (1) è soddisfatta da tutti i punti x_0, che appartengono al gruppo individuato da x. L' equazione (1) è dunque simmetrica in x, x_0 (1).

Osserviamo ora che:

1. Il polinomio $a_0(x_0)$ non può esser identicamente nullo, se, come noi supponiamo, gli n punti d' un gruppo son tutti variabili al variare del gruppo. Se, invero, fosse $a_0 = 0$, il punto $x = \infty$ apparterrebbe come punto fisso a tutti i gruppi della serie. Ora è chiaro, che, pel nostro scopo, si può benissimo, senza restrizione, astrarre dagli eventuali punti fissi della serie.

2. Le funzioni razionali $\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}$ non posson *tutte* ridursi a costanti, se no l' equazione (1) diverrebbe:

$$a_0(x_0)\{x^n + k_1x^{n-1} + \ldots + k_n\} = 0,$$

dove le k son costanti; e allora, quando si fossero evitate per x_0 quel numero finito di posizioni che annullano a_0, per ogni altra posizione, accadrebbe che gli n punti del gruppo individuato da x_0 sarebbero fissi: il che è assurdo, perchè fra essi c' è x_0.

Dunque fra le suddette funzioni razionali di x_0 ve n' è qualcuna, p. es. $\frac{a_1}{a_0}$, che *dipende* effettivamente da x_0. L'Algebra c' insegna che tale funzione razionale è una funzione

(1) Il che significa che la funzione $F(x_0, x)$ è simmetrica oppure alternata.

simmetrica elementare delle n radici $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ della equazione (1). Nel caso specifico, $\frac{a_1}{a_0}$ eguaglia la somma delle radici cambiata di segno. Comunque sia, il fatto di esser simmetrica si traduce in ciò: ch' essa non muta di valore scambiando fra di loro le radici:

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = \frac{a_1(x_1)}{a_0(x_1)} = \ldots = \frac{a_1(x_{n-1})}{a_0(x_{n-1})}.$$

Posto allora:

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = t, \quad \text{cioè:} \quad a_1(x) - ta_0(x) = 0,$$

l' equazione fra x, t è tale che, se (x_0, t_0) ne è una soluzione, sono in conseguenza soluzioni $(x_1, t_0), \ldots, (x_{n-1}, t_0)$. D' altra parte, se x è una soluzione, variabile con t, della suddetta equazione, i punti del gruppo di Σ individuato da x devon soddisfare all' equazione medesima, la quale ha dunque come sole soluzioni (variabili) $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Questo significa, in conclusione, che l' equazione

$$a_1(x) - ta_0(x) = 0,$$

al variare del parametro t, rappresenta tutti i gruppi di Σ; e così è dimostrato che Σ è una serie lineare.

OSSERVAZIONE 1ª. — Poichè la (1) deve esser soddisfatta da tutti i punti $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ del gruppo individuato da x_0, il polinomio $F(x_0, x_0)$ deve risultare identicamente nullo.

OSSERVAZIONE 2ª. — È appena necessario avvertire che, per la validità del Lemma, si deve supporre che la serie Σ non contenga gruppi isolati di n punti (necessariamente in numero finito, trattandosi di una serie algebrica).

Un' altra condizione necessaria per la validità del Lemma è che un gruppo generico della serie Σ non abbia punti multipli, diversi dagli eventuali punti fissi, da cui s' è fatto astrazione. Invero, punti multipli variabili, cioè radici multiple variabili dell' equazione $\varphi(x) = 0$, non posson presentarsi, se non nel caso in cui tutti i punti multipli del gruppo generico hanno la stessa molteplicità k, cosicchè in realtà in quel gruppo vi sono soltanto $\frac{n}{k}$ punti distinti. Ciò deriva dalla simmetria dell' equazione (1).

Ebbene, in tal caso l'equazione $a_1(x) - ta_0(x) = 0$ ha $\frac{n}{k}$ radici distinte e, per un valor generico di t, esse son tutte semplici. Infatti, se per ogni t si avesse una radice multipla variabile x, questa spetterebbe anche all'equazione $\frac{da_1}{dx} - t\frac{da_0}{dx} = 0$. Eliminando t fra tale equazione e la precedente, avremmo la relazione:

$$a_0 \frac{da_1}{dx} - a_1 \frac{da_0}{dx} = 0,$$

che dovrebbe esser soddisfatta identicamente, perchè vale per x variabile. Dalla relazione ottenuta, integrando, si ricaverebbe identicamente $a_1 = ka_0$, con k costante: contrariamente all'ipotesi che $\frac{a_1}{a_0}$ dipenda da x. Pertanto, nel caso in esame, l'equazione $a_1(x) - ta_0(x) = 0$ ha il grado $\frac{n}{k}$ in x, ed essa rappresenta una serie lineare di gruppi di $\frac{n}{k}$ punti. La serie Σ è ottenuta da questa contandone k volte ogni gruppo. Riassumendo:

Per la validità del Lemma occorre che:

1. *La serie Σ non possegga gruppi isolati.*
2. *Che essa non sia ottenuta contando k volte i gruppi di una serie lineare di gruppi di $\frac{n}{k}$ punti.*

Inoltre raccogliamo la conclusione che:

Una serie lineare di gruppi di punti sopra una retta non può avere punti multipli variabili.

6. Il teorema di Lüroth. — Prima di applicare il Lemma alla dimostrazione del teorema preannunciato al principio del numero precedente, gli daremo un'altra forma molto importante.

Sia C una curva algebrica piana, il cui punto (x, y) variabile sia funzione razionale di un parametro t; cioè la curva sia rappresentabile parametricamente mediante le formule:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

dove φ, ψ son funzioni razionali di t. L'equazione $f(x, y) = 0$ di C si ottiene eliminando t fra le (2).

Ad ogni valore di t corrisponde, mediante le (2), *un* punto di C. Si può, viceversa, affermare che ogni punto di C provenga da un sol valore di t?

È facile convincersi sopra esempi che tale affermazione non è lecita sempre. Consideriamo p. es. la parabola

$$x = t^2, \quad y = 1 - t^4.$$

Ad ogni punto della curva corrispondono *due* valori del parametro t, opposti di segno; però, se si assume come nuovo parametro $\tau = t^2$, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra i punti della curva ed i valori del parametro τ.

In generale possiamo dire che, dato un generico punto di C, cioè una generica soluzione (x, y) dell'equazione $f = 0$, fra le soluzioni della equazione in t, $x = \varphi(t)$, ve ne sarà un certo numero $t_1, t_2, \dots, t_n$, che soddisfaranno anche all'equazione in t, $y = \psi(t)$.

Pensiamo ora t come coordinata di un punto sopra una retta u. Mentre (x, y) descrive la curva data C, i punti distinti $t_1, t_2, \dots, t_n$ della u descrivono ivi una serie algebrica Σ, la quale gode evidentemente della proprietà che un generico punto di u appartiene ad un sol gruppo di Σ. Dal Lemma del n. 5 segue pertanto che i gruppi di Σ posson rappresentarsi con una equazione della forma

$$a(t) - \lambda b(t) = 0,$$

dove a, b son polinomi di grado n in t, e λ denota un parametro variabile col gruppo della serie Σ.

Fra i punti (x, y) della curva C e i valori del parametro λ viene a stabilirsi una corrispondenza algebrica, tale che ad un valore di λ corrisponde *un* punto di C e ad un generico punto di C corrisponde *un* valore di λ.

E, invero, i punti di C risultano in corrispondenza biunivoca coi gruppi di Σ, cioè coi valori di λ. Ne segue che le coordinate (x, y) di un punto mobile su C sono funzioni algebriche ad un valore, cioè funzioni razionali, del parametro λ, e possiamo pertanto scrivere:

$$x = \xi(\lambda), \quad y = \eta(\lambda), \tag{3}$$

dove ξ, η denotano funzioni razionali di λ. In questa nuova rappresentazione parametrica della curva C, un punto della curva proviene da un sol valore del nuovo parametro λ.

La curva C si può dunque porre in corrispondenza birazionale coi punti di una retta, sulla quale λ si assuma come coordinata di punto. Una curva siffatta dicesi *razionale* od *unicursale* (Noz. introd. VI).

Il risultato ottenuto può enunciarsi come segue:

Se le coordinate dei punti di una curva algebrica si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro t, per guisa che a un generico punto della curva corrispondano n (>1) *valori di t, esse posson altresì esprimersi come funzioni razionali di un nuovo parametro* λ, *che è alla sua volta funzione razionale di t, in modo che ad un punto generico della curva corrisponda un sol valore di* λ (¹).

Sotto veste geometrica il teorema suona così:

Se fra i punti di una curva algebrica C e di una retta u, intercede una corrispondenza algebrica, tale che ad un punto di C corrispondano n punti di u, mentre ad un punto di u corrisponde un sol punto di C, si può altresì porre fra C ed u una corrispondenza birazionale.

7. Sistemi algebrici di indice uno di curve piane. — Veniamo adesso al teorema, cui si è accennato al principio del n. 5, circa la linearità dei sistemi algebrici di curve piane d'indice 1. Cominceremo dal caso di un sistema semplicemente infinito Σ, di curve piane d'ordine n, il quale goda della proprietà che per un generico punto del piano passi una sola curva di Σ, potendo per punti particolari passarne infinite (n. 2). Naturalmente escludiamo, affinchè abbia senso la nozione di indice, che di Σ facciano parte sistemi di dimensione 0, cioè curve isolate; ed escludiamo pure che la curva generica di Σ abbia componenti multiple variabili.

Tagliamo Σ con una retta generica del piano. Su questa otteniamo una serie algebrica di gruppi di n punti, priva di gruppi isolati e di punti multipli variabili, e tale che un generico punto della retta appartiene ad un sol gruppo della

(¹) Questo teorema è dovuto a J. LÜROTH [Math. Annalen 9, 163 (1875)]. Il lettore potrà utilmente consultare in proposito anche APPELL e GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* (Paris, Gauthier-Villars, 1895, pag. 288).

serie. Secondo il n. 5, questa serie è pertanto lineare, cioè i suoi gruppi posson porsi in corrispondenza birazionale coi valori di un parametro λ.

Fra le curve di Σ e i valori di λ viene in conseguenza a stabilirsi una corrispondenza biunivoca, che è birazionale, perchè algebrica.

È invero, dato un valore di λ, il gruppo corrispondente a quel valore (cioè le coordinate dei punti del gruppo) si costruisce con operazioni algebriche, e dal gruppo stesso si passa, mediante operazioni algebriche, alla curva di Σ che lo stacca sulla retta, perchè si tratta di imporre ad una curva variabile, in un sistema algebrico, la condizione algebrica (lineare) di passare per un punto dato di quel gruppo. Se, viceversa, è data una curva di Σ, le coordinate del gruppo corrispondente si costruiscono risolvendo un'equazione algebrica e dal gruppo ottenuto si passa algebricamente al corrispondente valore di λ.

I coefficienti dell'equazione di una curva variabile del sistema Σ risultano pertanto funzioni algebriche ad un valore, cioè funzioni razionali, del parametro λ. Si può quindi rappresentare la curva generica di Σ coll'equazione

$$f(x, y; \lambda) = 0,$$

dove f è un polinomio in x, y, a coefficienti funzioni razionali di λ. Moltiplicando i due membri della precedente equazione per un conveniente polinomio in λ, si ottiene un'equazione della forma:

$$\lambda^k \varphi_0(x, y) + \lambda^{k-1}\varphi_1(x, y) + \ldots + \varphi_k(x, y) = 0,$$

dove le φ son polinomi di grado $\leq n$ (uno almeno deve però essere di grado n).

Per ottenere l'equazione della curva di Σ che passa per un punto generico (x_0, y_0) del piano, bisogna scegliere per λ una radice dell'equazione

$$\lambda^k \varphi_0(x_0, y_0) + \lambda^{k-1}\varphi_1(x_0, y_0) + \ldots + \varphi_k(x_0, y_0) = 0.$$

Poichè per (x_0, y_0) passa una sola curva di Σ, l'equazione precedente in λ dovrà avere una sola radice, cioè essa dovrà essere di primo grado ($k=1$), oppure il suo primo membro dovrà risultare la potenza k-esima di un' espressione della forma

$$\lambda\psi_0(x_0, y_0) + \psi_1(x_0, y_0),$$

dove ψ_0, ψ_1 son di grado $\leq \frac{n}{k}$ (una almeno però deve esser di grado $\frac{n}{k}$). Ma in questo ultimo caso una curva qualunque di Σ avrebbe un' equazione della forma

$$[\lambda\psi_0(x, y) + \psi_1(x, y)]^k = 0,$$

e consterebbe di una curva variabile in un fascio, contata k volte; mentre noi abbiamo escluso che la curva generica di Σ possegga componenti multiple. Pertanto è $k = 1$, e l' equazione di una qualunque curva di Σ è:

$$\lambda\varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0.$$

Così resta dimostrato che Σ è un fascio.

Estendiamo ora il teorema ad un sistema Σ di dimensione $r > 1$, supponendolo già dimostrato pei sistemi di dimensione $r - 1$. Le curve di Σ, che passano per un generico punto P, costituiscono un sistema Σ', di dimensione $r - 1$, il quale soddisfa alle ipotesi del teorema ammesso, sicchè esso è rappresentabile con un' equazione

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \ldots + \lambda_r f_r(x, y) = 0,$$

ove le $f_1, f_2, \ldots, f_r$ son linearmente indipendenti. Prendiamo in Σ una curva $f_0(x, y) = 0$, che non passi per P e quindi non appartenga a Σ'. Per un generico punto di f_0 passano ∞^{r-1} curve di Σ, formanti, pel teorema ammesso, un sistema lineare Σ''; e ∞^{r-2} curve di Σ', formanti pure un sistema lineare, che costituisce l' intersezione di Σ', Σ''.

Una curva f di quest' intersezione determina con f_0 un fascio A, il quale sta in Σ'' e perciò anche in Σ. Il sistema Σ' ed il fascio A non posson avere curve comuni diverse da f, perchè se no A starebbe in Σ' e quindi f_0, che è una curva di A, passerebbe per P.

Per un punto generico X del piano passano ∞^{r-2} curve di Σ', cioè $r - 1$ curve linearmente indipendenti di questo sistema, e una curva del fascio A, la quale è da esse indipendente. Invero, nell' ipotesi contraria, questa curva apparterrebbe a Σ' e perciò coinciderebbe con f; onde il punto X apparterrebbe ad f, contrariamente all' ipotesi ch' esso sia generico. Pertanto le suddette $r - 1$ curve e la curva considerata di A, danno un complesso di r curve indipendenti passanti pel punto X e appartenenti così al sistema Σ, come al sistema:

$$(4) \qquad \lambda_0 f_0(x, y) + \lambda_1 f_1(x, y) + \ldots + \lambda_r f_r(x, y) = 0,$$

che congiunge Σ' col fascio A. Poichè le curve di Σ che passan per X formano un sistema lineare ∞^{r-1}, questo sistema potrà individuarsi mediante le r curve indipendenti or ora indicate; cioè esso coinciderà col sistema delle curve di (4), passanti per X. Dunque la totalità delle curve di Σ, che passano per un generico punto del piano, coincide colla totalità delle curve (4) che passano per questo punto.

Facendo ora muovere il punto X sul piano, si conclude che, a meno di parti di dimensione minore di r, Σ coincide col sistema lineare (4).

Esaminiamo infine il caso in cui la curva variabile di Σ possiede qualche componente multipla (o è tutta multipla).

Siano $C_1, C_2, \ldots, C_l$ le componenti variabili della curva generica C di Σ [1] e C_1 sia s-pla. Le curve di Σ passanti per $r - 1$ punti generici di C_1 formano un sistema Σ_1, ∞^1, che stacca sopra una retta generica una serie d' indice 1. Il gruppo di Σ_1 staccato da C ha come s-pli i punti segnati dalla curva C_1; e poichè il gruppo in questione è generico entro Σ_1, tutti i suoi punti saranno s-pli (n. 5, Oss. 2ª). Onde ognuna delle ulteriori componenti $C_2, \ldots, C_l$ è segata in un punto s-plo da una retta generica del piano, epperò è s-pla. Se le componenti della curva generica di Σ si contano invece semplicemente, si ottiene un nuovo sistema Σ_0, che, per quanto precede, è lineare. Si può pertanto enunciare il teorema:

Un sistema algebrico ∞^r d' indice uno di curve piane, che non consti di parti di differenti dimensioni (e quindi sia irri-

[1] È appena necessario di avvertire che, se C si spezza, poichè al variare continuo di C in Σ ognuna delle parti varia con continuità, deve conservarsi costante sia il numero delle parti, come l' ordine di ciascuna. Per particolari posizioni di C qualcuna delle parti potrà ulteriormente spezzarsi.

ducibile) o è lineare oppure è ottenuto da un sistema lineare contandone uno stesso numero di volte le sue curve.

Il ragionamento svolto si estende senz' altro, con semplici cangiamenti di parole, ai sistemi algebrici di forme di uno spazio S_k. In particolare, per $k=0$, si ha una proposizione relativa alle serie algebriche, d'indice 1, di gruppi di punti sopra una retta.

Il teorema precedente fornisce una proprietà caratteristica dei sistemi lineari, che, nelle trattazioni puramente sintetiche di Jonquières e Cremona, era assunta come definizione dei sistemi medesimi. Le prime dimostrazioni debbonsi a Segre (Ann. di Mat. 22_2 (1894), n. 23), e a Humbert [J. de Math. 10_4, 169 (1894)]. Pei sistemi lineari ∞^r $(r>1)$ di V_{k-1} entro una varietà algebrica V_k, di dimensione $k>1$ (sistemi staccati sopra V_k da sistemi lineari di forme), la proposizione analoga è dovuta a Castelnuovo [Torino Atti, 28, 727 (1893)] e a Enriques [Lincei Rend. 2_5, 3, (1893)].

8. Digressione sopra una proprietà differenziale di una curva piana variabile in un sistema continuo e dotata di punti multipli variabili. — Vogliamo ora dimostrare una proprietà differenziale delle curve piane (anche non algebriche), che costituisce un utile complemento della consueta considerazione di inviluppo e che ci servirà per stabilire un teorema di Bertini sui sistemi lineari.

Consideriamo un sistema continuo

$$f(x, y; t)=0$$

di curve piane, dove t denota il parametro che fissa la posizione di una curva entro il sistema. Per la funzione f supponiamo tutte le proprietà analitiche che nel seguito ci occorrono.

La curva $f=0$ possegga taluni punti doppi, che siano variabili con t. Fissiamo l'attenzione sopra una particolare curva $f(x, y; t_0)=0$ del sistema e sopra un suo punto doppio $P(x_0, y_0)$, il quale sia limite di *uno* dei punti doppi variabili di $f(x, y; t)=0$, col tendere di t a t_0. Esistano cioè due funzioni monodrome $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, definite nell'intorno di $t=t_0$, e tali che il punto di coordinate $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ sia un punto doppio della $f(x, y; t)=0$. Inoltre le $\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\dfrac{d\psi}{dt}$ restino finite nell'intorno di $t=t_0$. Sostituite nell'equazione $f(x, y; t)=0$, al posto di x, y, le φ, ψ, si ottiene un' identità in t, che, derivata

rispetto a t, porge:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Poichè, secondo l'ipotesi, il punto di coordinate (φ, ψ) è doppio per $f=0$, così risulterà $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. Si conclude che, nell'intorno considerato, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ si annulla identicamente, ponendovi le φ, ψ al posto di x, y. Il che significa che la curva $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, descritta dal punto doppio variabile, che ha per limite P, fa parte dell'inviluppo del nostro sistema. E si può enunciare il teorema seguente:

Se una curva C, variabile in un sistema continuo (anche più volte infinito), possiede un punto doppio variabile P, ogni curva del sistema, infinitamente vicina a C, passa per P.

L'estensione ai sistemi più volte infiniti, contemplata nell'enunciato, è ovvia; giacchè la considerazione di una curva infinitamente vicina a C, implica che dal sistema più volte infinito si stacchi un sistema ∞^1, lungo il quale si faccia muovere la curva che si vuole approssimare a C.

Si osserverà che il teorema resta vero anche se P è un punto s-plo $(s>2)$ per la curva C, giacchè per la dimostrazione occorre soltanto l'annullarsi delle derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nel punto multiplo considerato.

In forma finita il precedente teorema si può enunciare definendo sopra la curva C i cosidetti *gruppi caratteristici*. Quando si considera una posizione particolare C_0 di C e, facendo muovere C in un sistema continuo ∞^1, la si fa approssimare indefinitamente a C_0, se l'insieme dei punti comuni a C_0, C tende verso un insieme di punti determinato, questo si chiama un gruppo caratteristico di C_0. Ci riserbiamo di approfondire più tardi questo concetto, con particolare riguardo al campo algebrico. Per ora enuncieremo:

Se una curva C, variabile in un sistema continuo, ha un punto multiplo variabile, questo fa parte di ogni gruppo caratteristico di C.

La considerazione dei gruppi caratteristici sopra le curve algebriche di un sistema algebrico, tracciato sopra un piano o sopra una superficie algebrica, introdotta dall'Autore [Torino Atti, 39, 490 (1904)], è fecondissima nella geometria algebrica. Ne vedremo importanti applicazioni in questo stesso volume.

Nel caso d'un sistema lineare, i gruppi caratteristici sopra una sua curva generica C_0, risultan quelli staccati dalle altre curve C del sistema, perchè i punti comuni a C_0, C son punti base del fascio individuato dalle due curve, e quindi la curva del fascio infinitamente vicina a C_0, stacca quei punti. Sopra una curva d'un sistema lineare i gruppi caratteristici, come staccati dalle altre curve del sistema, furon considerati per la prima volta da BRILL-NOETHER [Math. Annalen, **7**, 308 (1873)] e poi da SEGRE [Palermo Rend. **1**, 217 (1887)], e da CASTELNUOVO [Torino Mem. $\mathbf{42}_2$, 23 (1891)], il quale introdusse la denominazione di *serie caratteristica* d'un sistema lineare. Questa serie, come vedremo, adempie ad un ufficio essenziale nello studio approfondito dei sistemi lineari di curve.

9. **Seguito.** — Il teorema dimostrato si estende come segue ai punti multipli di molteplicità qualunque s:

Se una curva C variabile con continuità possiede un punto s-plo variabile P, questo è almeno $(s-1)$-plo per ogni curva infinitamente vicina a C.

Supponiamo $s=3$. Nell'intorno di $t=t_0$ son definite due funzioni monodrome $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, tali che il punto di coordinate (φ, ψ) è triplo per la curva $f(x, y; t)=0$.

Sia $P(x_0, y_0)$, ove $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$, il limite di questo punto triplo variabile, quando t tende a t_0, cioè quando la curva $f(x, y; t)=0$ si approssima alla $f(x, y; t_0)=0$. Pel fatto che il punto (φ, ψ) è triplo per $f(x, y; t)=0$, in esso si annullano le derivate parziali prime e seconde della $f(x, y; t)$, rispetto ad x, y. Ne segue che il punto (φ, ψ) è doppio per ognuna delle curve

$$f_x'(x, y; t)=0, \quad f_y'(x, y; t)=0,$$

e quindi, pel teorema precedente, le curve

$$f_x'(x, y; t_0+dt)=0, \quad f_y'(x, y; t_0+dt)=0,$$

infinitamente vicine alle

$$f_x'(x, y; t_0)=0, \quad f_y'(x, y; t_0)=0,$$

passano per P. Ma per questo punto passa anche la curva $f(x, y; t_0+dt)=0$, dunque P è per essa doppio.

Il procedimento si estende per induzione ad s qualunque.

10. **Il teorema di Bertini sopra i punti multipli della curva generica d'un sistema lineare.** — Applichiamo i precedenti teoremi a dimostrare il seguente:

La curva generica di un sistema lineare di curve piane non ha punti multipli fuori dei punti base del sistema.

Sia Σ il dato sistema lineare e C la sua curva generica. Se P è un punto multiplo di C, mobile o in particolare fisso, ogni curva di Σ infinitamente vicina a C, passa per P.

Fissata in Σ una qualunque curva C_0, diversa da C, consideriamo il fascio H individuato da C, C_0. Una curva variabile in H taglia C soltanto nei punti base di H, cioè nei punti comuni a C, C_0. Ma la curva del fascio infinitamente vicina a C passa per P, dunque P è un punto base del fascio e perciò per esso passa anche la curva C_0. Poichè C_0 è una qualunque curva di Σ, si conclude che P è un punto base del dato sistema.

OSSERVAZIONE 1ª. — *Se il sistema lineare dato ha la sua curva generica irriducibile, questa non potrà avere punti multipli mobili,* perchè il numero dei punti base sarà necessariamente finito. Punti multipli mobili potranno invece aversi quando vi sia una curva base, cioè una parte comune a tutte le curve del sistema. Sia Γ una tal curva, la quale sia luogo di un punto s-plo variabile della C generica di Σ. Ripetendo il ragionamento precedente e tenendo conto del n. 9, si conclude che Γ è curva base $(s-1)$-pla (almeno) per Σ. Il teorema si può dunque precisare (come del resto ha fatto BERTINI) così:

Il luogo di un punto s-plo variabile $(s>1)$ della curva generica di un sistema lineare, è una curva base $(s-1)$-pla almeno.

OSSERVAZIONE 2ª. — Il teorema dimostrato equivale in fondo a ciò: che per un fascio di curve piane l'inviluppo (del quale fanno parte gli eventuali luoghi di punti multipli della curva variabile nel fascio) è costituito dall'insieme dei punti base. E invero, per un punto dell'inviluppo debbon passare due curve (infinitamente vicine) del fascio e quindi tutte le curve del medesimo.

Il teorema di questo numero è di BERTINI [Ist. Lomb. Rend. $\mathbf{15}_2$, 24 (1882)]. Esso, come ha mostrato lo stesso BERTINI, vale pei sistemi lineari di forme di un S_r. Però, appena sia $r>2$, la forma generica del sistema può benissimo possedere punti s-pli mobili, senza spezzarsi. Il loro luogo sarà in tal caso costituito da varietà algebriche infinite di dimensione $<r-1$, le quali saranno $(s-1)$-ple (almeno) per tutte le forme del sistema. Se p. es. si considerano nello spazio ordinario i coni quadrici che proiettano una data conica da una retta u ad essa appoggiata in un punto, si ha un fascio di coni, che si toccano lungo la generatrice semplice u, la quale è luogo del punto doppio variabile del cono generico.

La dimostrazione sopra esposta è tratta da una Nota dell'Autore [Torino Atti, **41**, 207 (1905)]. Essa è ivi riferita, più in generale, ai sistemi lineari di V_{k-1} sopra una V_k algebrica. Naturalmente in questo caso generale i luoghi dei punti multipli della V_{k-1} variabile nel sistema lineare, cadono, sia nelle varietà base del sistema, come negli eventuali luoghi di punti multipli di V_k.

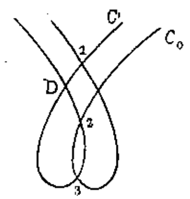
11. **Altre applicazioni immediate del teorema del n. 8: La prima formula di Plücker. Il numero delle normali condotte ad una curva da un punto.** — Un'altra elegante e facile applicazione del teorema del n. 8 consiste nella ricerca della *classe* m di una curva algebrica piana C di dato ordine n, con un numero finito d di punti doppi (a tangenti distinte) ed un numero finito k di cuspidi ordinarie (punti doppi colle due tangenti coincidenti in una sola, avente nel punto doppio incontro tripunto colla curva).

La classe di C è il numero delle sue tangenti passanti per un punto generico P del piano. Facendo precedere una opportuna proiezione centrale del piano della curva sopra un altro piano, si può supporre che il punto P sia dato all'infinito. Si tratta allora della ricerca delle tangenti di C aventi una data direzione P_∞.

Assoggettiamo C ad una traslazione infinitesima avente la direzione P_∞ e sia $\bar{C}$ la curva nella nuova posizione. Se A, B denotano i due punti infinitamente vicini, comuni a C e ad una tangente diretta come P_∞, la traslazione porta A in B e quindi ognuno dei punti di contatto di C colle tangenti parallele a P_∞ è comune a C e a $\bar{C}$. Gli altri punti comuni cadono:

a) Negli n punti all'infinito di C, giacchè la traslazione muta in sè ogni punto all'infinito.

b) Nei punti doppi di C. Infatti, secondo il n. 8, la curva $\bar{C}$ passa per ognuno di questi (almeno) semplicemente.



Ognuno di questi punti conta due volte fra le intersezioni di C, $\bar{C}$, perchè è doppio per C. La figura qui accanto (che si riferisce al caso di un punto doppio a rami reali) chiarisce bene la cosa. Se infatti si assoggetta C ad una traslazione finita, portandola in C_0, *due* intersezioni di C, C_0 (quelle indicate nella figura con 1, 2) tendono al punto doppio D, quando C_0 ritorna verso C.

c) Nelle k cuspidi di C, perchè $\bar{C}$ passa per ognuna di esse. Ogni cuspide assorbe però *tre* intersezioni. Si consideri

infatti la cuspide ordinaria come un nodo il cui cappio vada a mano a mano restringendosi. Col tendere di C_0 a C, sono allora tre intersezioni che si avvicinano alla cuspide (quelle indicate in figura con 1, 2, 3).

Questo fatto può esprimersi dicendo che *la curva $\bar{C}$ infinitamente vicina a C, non soltanto passa per ogni cuspide di C, ma tocca ivi la curva stessa.*

Avremo dunque:

$$m + n + 2d + 3k = n^2,$$

cioè:

$$m = n(n-1) - 2d - 3k,$$

che è la *prima formula di* Plücker (¹).

Facciamo un'ultima applicazione elementare del teorema del n. 8, alla ricerca del numero ν delle normali condotte alla curva C, di cui sopra, da un punto generico P del piano. A questo scopo assoggettiamo C ad una rotazione infinitesima attorno a P, e sia $\bar{C}$ la curva nella nuova posizione. Se A è il piede d'una normale da P a C, il cerchio di centro P e raggio PA ha in comune con C, oltre ad A, il punto infinitamente vicino B. Pertanto ognuno dei piedi delle normali da P a C, figura fra le intersezioni di C, $\bar{C}$. Le altre intersezioni cadono nei d punti doppi e nelle k cuspidi di C, e, come prima, si vede che ognuno dei punti doppi conta 2 volte fra le intersezioni ed ognuna delle cuspidi 3 volte. Viene quindi:

$$\nu + 2d + 3k = n^2,$$

cioè:

$$\nu = n + m.$$

Si conclude:

Il numero delle normali ad una curva C, di ordine n e classe m, condotte da un punto generico del piano, eguaglia $n + m$ (²).

(¹) In seguito daremo anche le altre formule di Plücker, ed anzi formule più generali, che legano i caratteri di una curva con singolarità qualunque. Per la dimostrazione esposta cfr. Beck [*Zur allgemein Theorie der Kurven und Flächen*, Math. Ann. **14**, 207 (1878) e Zürick Vierteljahrsschr. **30**, 173 (1889)].

(²) Questo numero fu calcolato pel primo da Steiner [J. für Math. **49**, 333 (1855)] proprio col metodo sopra indicato, ch'egli però applicò alle curve senza punti multipli.

Veramente in questa deduzione si è implicitamente supposto che nessuno dei punti all' infinito di C restasse fisso nella rotazione. Si è escluso cioè che C passasse per alcuno dei punti ciclici del piano, che sono i soli punti all' infinito, che rimangono fermi. Il caso in cui C passa pei punti ciclici ed ha singolarità qualunque, verrà considerato, in altro modo, più tardi (n. 36).

12. **Sistemi lineari riducibili.** — Se la curva generica di un sistema lineare di curve algebriche piane è riducibile, cioè si spezza in più parti, il sistema dicesi *riducibile*. La locuzione non è felice, ma corrisponde all' uso. Meglio sarebbe dire « sistema lineare di curve riducibili », perchè l' attributo di « riducibile » dato al sistema, e non alle sue curve, potrebbe far pensare ad una riducibilità del sistema come varietà di elementi (n. 2). Ma poichè un sistema lineare è sempre una varietà irriducibile (n. 2), così resta esclusa ogni possibilità di equivoco.

Un primo esempio banale di sistemi lineari riducibili si ha considerando un sistema lineare formato dall' aggregare una curva fissa alle curve di un sistema lineare irriducibile.

Un altro esempio si ottiene nel modo seguente. Sia

$$\lambda u(x, y) - \mu v(x, y) = 0$$

un fascio irriducibile di curve algebriche d'ordine n. Prese λ, μ come coordinate omogenee di punto sopra una retta, consideriamo ivi una serie lineare ∞^r di gruppi di k punti, rappresentata dall' equazione:

$$\nu_0\varphi_0(\lambda, \mu) + \nu_1\varphi_1(\lambda, \mu) + \dots + \nu_r\varphi_r(\lambda, \mu) = 0,$$

dove le φ sono forme linearmente indipendenti, di ordine k. Ai gruppi della serie corrispondono nel fascio gruppi di k curve, che son rappresentati dall' equazione:

$$\nu_0\varphi_0(v, u) + \nu_1\varphi_1(v, u) + \dots + \nu_r\varphi_r(v, u) = 0,$$

e costituiscono pertanto un sistema lineare ∞^r, la cui curva generica si spezza in k parti, tutte variabili in un medesimo fascio.

Orbene, un altro teorema di Bertini afferma che i due esempi considerati sono i soli casi di riducibilità di un sistema lineare di curve. Sussiste cioè il teorema:

Se la curva generica di un sistema lineare si spezza, o le curve del sistema hanno tutte una parte fissa comune, oppure la curva generica si compone di un certo numero k di parti, che variano in un medesimo fascio. (Naturalmente le due possibilità possono anche presentarsi insieme).

Escludiamo il caso che le curve del nostro sistema riducibile Σ abbiano una parte comune e indichiamo con $C_1, C_2, \dots C_k$ le k parti variabili in cui si spezza la generica curva C di Σ [1].

Anzitutto è chiaro che le k componenti di C sono tra di loro distinte, perchè se no la curva generica di Σ avrebbe punti multipli fuori dei punti base del sistema, contrariamente al teorema del n. 10.

Indichiamo con $C_1', C_2', \dots, C_k'$ le componenti di un' altra curva C' di Σ. Il teorema sarà dimostrato, quando avremo provato che tutte le curve $C_1, C_2, \dots, C_k, C_1', C_2', \dots, C_k'$, appartengono al medesimo fascio. Giacchè allora, tenuta fissa la curva C, resta fisso anche questo fascio, in quanto esso è individuato da due componenti (p. es. C_1, C_2) di C, e quindi le componenti della curva C' mobile in Σ, appartengono tutte ad un fascio fisso. Ora le curve C, C' individuano entro Σ un fascio H e le componenti di una curva variabile nel fascio, descrivono certi sistemi algebrici H_1, $H_2, \dots, H_k$. Si tratta di provare che questi sistemi coincidono in un unico fascio. Invero, se i due sistemi H_1, H_2 fossero distinti, per un punto generico P del piano passerebbe almeno una curva di H_1 ed una di H_2. Queste due curve non potrebbero essere parti di due distinte curve di H, perchè per P passa una sola curva di H; nè potrebbero esser parti di una medesima curva di H, perchè essa avrebbe in P, cioè fuori dei punti base, un punto doppio. L' ipotesi che i sistemi H_1, $H_2, \dots, H_k$ siano distinti è dunque impossibile. Essi coincidono pertanto tutti in un medesimo H_1; e questo dovrà esser di indice 1, perchè se per un P generico passassero due curve distinte di H_1, si cadrebbe ancora, come sopra, nell' assurdo. In forza del teorema del n. 7, tenuto conto che la curva variabile in H_1 non è multipla, si conclude che H_1 è un fascio; che è quanto volevasi provare.

Osservazione 1ª. — Il teorema e la relativa dimostrazione valgono più generalmente pei sistemi lineari di forme di $S_r (r>0)$.

[1] Ved. la nota [1] a pie' della pag. 37.

Osservazione 2ª. — Una proposizione che può utilmente servire per riconoscere a priori, in vari casi, la irriducibilità d'un sistema lineare di curve piane, è la seguente:

Un sistema lineare, privo di curve fisse, la cui dimensione r sia maggiore dell'ordine n, è irriducibile.

Invero, se un sistema lineare Σ di curve piane d'ordine n, privo di parti fisse, è riducibile, la sua curva generica si spezza in k componenti di ordine $\frac{n}{k}$, variabili in un medesimo fascio. Ma l'insieme di tutti i gruppi di k curve di un dato fascio, è ∞^k; dunque la dimensione di Σ non può superare k.

Come vedesi, *perchè possa affermarsi la irriducibilità di un sistema lineare d'ordine n, privo di curve fisse, basta anzi che r sia maggiore del più grande divisore k di n* $(1 \leq k < n)$.

Il teorema stabilito è dovuto a Bertini [Ist. Lomb. Rend. **15**$_2$, 28 (1882)]. Dimostrazioni di carattere strettamente algebrico sono state date da Lüroth [Math. Annalen, **42**, 457 (1892) e **44**, 539 (1894)] e da G. Salomon, scolaro di Brill [Jahresbericht der Deut. Math. Verein. **24**, 225 (1915)]. Il Salomon ha anche esteso il teorema ad un sistema ∞^1, non lineare, di curve algebriche piane (o di forme d'un iperspazio), tale che i coefficienti dell'equazione della curva in esso variabile, dipendan razionalmente da un parametro λ. (Pel teorema di Lüroth un simil sistema è un ente razionale). Un altro scolaro di Brill, A. Riehle (Inaugural Diss., Tübingen, 1920) ha ulteriormente esteso il teorema ad un sistema ∞^r, non lineare, di curve (o forme) algebriche, nell'ipotesi che i coefficienti dell'equazione della curva (o forma) variabile nel sistema, dipendan razionalmente da r parametri. Se il lettore vorrà confrontare tali complesse dimostrazioni puramente algebriche del teorema di Bertini, con quella così semplice sopra esposta, si renderà fin d'ora conto quanta maggior concisione e potenza conferisca allo strumento algebrico la forma geometrica sotto cui di solito noi lo usiamo. Al qual proposito, credo opportuno d'indicare il modo di conseguir geometricamente le estensioni di Salomon e di Riehle.

Sia $f(x, y; \lambda) = 0$ un sistema ∞^1 di curve algebriche piane; il parametro λ comparisca razionalmente nei coefficienti dell'equazione. Moltiplicando per un conveniente polinomio in λ si può ottenere che la $f = 0$ sia intera anche nel parametro. Interpretate x, y, λ come coordinate cartesiane di un punto dello spazio, la superficie $f = 0$ potrà risultare riducibile o irriducibile. Se è riducibile, dall'equazione $f(x, y; \lambda) = 0$ si staccano uno o più fattori razionali (interi) in x, y, λ (o, in particolare, indipendenti da λ). Fatta astrazione da questi fattori, sia $\varphi(x, y; \lambda) = 0$ l'equazione della superficie restante, Φ, *irriducibile*; ma $\varphi = 0$ rappresenti ancora un sistema Σ, ∞^1, di curve piane C, d'ordine n, *riducibili*. Ciò significa che la superficie Φ è tagliata da un piano generico $\lambda = \text{cost.}$ secondo una curva spezzata. Si ha così su Φ un fascio di sezioni piane spezzate C', le quali (per un teorema analogo a quello di Bertini, che vedremo a suo tempo, e che vale pei sistemi lineari di curve sulle superficie algebriche) non avendo parti fisse, saranno composte con gruppi di k curve (irriducibili) Γ' d'ordine $\frac{n}{k}$, di un fascio (razionale o irrazionale) tracciato su Φ. Il sistema Σ s'ottiene, sul piano xy, proiettando il fascio delle C' parallelamente all'asse λ. La curva C, proiezione di una C', è composta con k curve Γ proiezioni delle Γ'. L'indice ν del sistema Σ evidentemente non supera il grado l con cui λ figura nell'equazione $\varphi = 0$: eguaglia l, soltanto se alle l radici di tale equazione, per x, y genericamente dati, corrispondono l curve *distinte* di Σ. Il grado l sarà anche un limite superiore dell'indice del sistema H delle Γ, perchè per un punto generico del piano non posson passare più Γ, di quante curve C non vi passino. Il sistema H è pertanto rappresentato da un'equazione del tipo $\psi(x, y; \mu) = 0$, ove la ψ è di grado $m \leq l$ in μ. Sostituendo alle potenze $\mu^0, \mu^1, \ldots \mu^m$ di μ, altrettanti parametri lineari $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, si avrà un sistema lineare di dimensione $\leq m$, contenente le curve Γ. Si conclude col teorema di Salomon:

Se le curve algebriche piane $f(x, y; \lambda) = 0$, dipendenti razionalmente dal parametro λ, son riducibili, e la f non contiene alcun fattore razionale (intero) in x, y, λ (o, in particolare, indipendente da λ), la generica curva $f(x, y; \lambda) = 0$ si spezza in parti variabili in un medesimo sistema lineare, di dimensione non superiore al grado l di λ nel polinomio $f(x, y; \lambda)$ (e tale dimensione è anzi non superiore all'indice $\nu \leq l$ del sistema $f = 0$).

Si badi che la riducibilità dell'equazione $f(x, y; \lambda) = 0$, come equazione nelle x, y, λ, non implica affatto la riducibilità del sistema da essa rappresentato. Così l'equazione $(\alpha + \lambda\beta)(\gamma + \lambda\delta) = 0$, ove $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sieno le equazioni di 4 rette del piano, rappresenta un sistema d'indice 2 di coniche spezzate, che è irriducibile, come ente ∞^1, quando se ne prendan le coniche come elementi. Invero tali elementi non sono che le coppie di rette omologhe di due fasci di raggi proiettivi.

13. Sistemi lineari semplici e composti.

— Introduciamo ora il concetto di sistemi lineari semplici e composti.

Un sistema lineare Σ, ∞^r, dicesi *semplice*, quando tutte le curve di Σ, che passano per un generico punto P del piano, non passano necessariamente per altri punti variabili con P, cioè diversi dagli eventuali punti base. Nel caso contrario, il sistema dicesi *composto*.

Il sistema di tutte le rette o, più generalmente, di tutte le curve d'ordine n del piano, è un sistema semplice; la rete di tutte le curve piane del terzo ordine, che passano per 7 punti generici del piano, è un sistema composto.

Sia Σ un sistema lineare composto di *grado D*, cioè tale che due generiche sue curve si taglino, fuori dei punti base, in D punti variabili. Tutte le curve di Σ, che passano per un punto generico P, si tagliano ulteriormente in un numero finito di punti distinti dai punti base, il quale non potrà che rimanere costante al variare continuo di P: sia $i-1$ $(i \geq 2)$. Allora i D punti comuni a due curve di Σ, fuori dei punti base, si distribuiranno in $\frac{D}{i}$ gruppi di i punti, tali che ogni curva di Σ, che passi per uno qualunque degli i punti di uno di questi gruppi, passa per gli $i-1$ rimanenti.

Ad un sistema come Σ resta pertanto coordinato un sistema algebrico K di ∞^2 gruppi di i punti del piano, tale che un generico punto del piano appartiene ad uno solo di quei gruppi. Un tal sistema dicesi un' *involuzione piana di ordine* i; ed il sistema Σ dicesi *composto con quest' involuzione*.

Che il sistema K sia algebrico segue da ciò: che, dette $\varphi_0(x, y)=0, \ldots, \varphi_r(x, y)=0$, $r+1$ curve indipendenti di Σ, i punti della superficie *algebrica* (Noz. intr. VI) dello S_r, rappresentata parametricamente da:

$$\rho x_i = \varphi_i(x, y) \quad (i=0, 1, \ldots, r; \quad \rho \text{ fattore di proporzionalità}),$$

sono in corrispondenza algebrica biunivoca coi gruppi di K.

È evidente che ogni rete di grado $D>1$ è un sistema composto, che genera un' involuzione di ordine D. Viceversa, data un' involuzione piana di ordine D, può sempre costruirsi una rete che la generi (¹) e infiniti sistemi lineari, di dimensioni grandi come si vuole, con essa composti. Ma di ciò ci occuperemo quando studieremo sistematicamente i sistemi lineari di curve piane.

Una rete di grado $D=1$ dicesi anche *omaloidica*. Sono reti omaloidiche il sistema di tutte le rette del piano, il sistema delle coniche per 3 punti, il sistema delle curve di 4° ordine che passan doppiamente per 3 punti generici e semplicemente per altri 3; ecc.

OSSERVAZIONE 1ª. — Un sistema lineare la cui curva generica si spezzi in k curve di un fascio (n. prec.) è pur esso composto, perchè tutte le curve del sistema, che passano per un punto generico, contengono in conseguenza tutta la curva del fascio, che passa per quel punto. Un tal sistema, anzichè con un' involuzione, è *composto colle curve di un fascio*.

(¹) Quest' affermazione equivale ad un importante teorema di CASTELNUOVO sulla razionalità delle involuzioni piane [Math. Annalen, **44**, 125 (1893)], di cui tratteremo in un successivo volume.

Due curve generiche del sistema non si tagliano fuori dei punti base; cioè il sistema è di grado $D=0$.

OSSERVAZIONE 2ª. — La nozione si estende ai sistemi lineari di forme algebriche di S_r $(r \geq 0)$. P. es. un sistema lineare di superficie dello spazio può esser composto con un' *involuzione spaziale* (sistema algebrico ∞^3 di gruppi di i punti, tale che un punto generico dello spazio stia in un sol gruppo) o con una *congruenza d'indice* 1 *di curve algebriche* (sistema algebrico ∞^2 di curve algebriche, tale che un punto generico dello spazio stia in una sola curva del sistema) o con un fascio di superficie algebriche.

CAPITOLO SECONDO

Prime proprietà fondamentali di geometria sopra una curva.

§ 1. - Le serie lineari sopra una curva algebrica.

14. **Serie lineari e involuzioni semplicemente infinite.** — Consideriamo la curva algebrica irriducibile piana f di equazione:

$$f(x, y) = 0,$$

ed un fascio di curve algebriche C, date dall'equazione:

$$\varphi(x, y) - \lambda\psi(x, y) = 0.$$

Se non tutte le intersezioni di f con una C variabile, vengono assorbite dai punti base del fascio, al variare di C le intersezioni mobili descrivono su f una serie di gruppi di punti, che si chiama una *serie lineare semplicemente infinita* o *di dimensione* 1. Nel fatto questa varietà di gruppi di punti è un insieme di elementi (gruppi), che sono in corrispondenza biunivoca continua (anzi birazionale) coi valori di λ. La circostanza che vi sieno intersezioni mobili di C con f, equivale poi a ciò: che nel fascio non siavi alcuna curva che contenga come parte f. Se, invero, f fa parte di una curva del fascio, è chiaro che mancano intersezioni mobili; viceversa, se tali intersezioni mancano, tutte le intersezioni di C, f, volute dal teorema di Bézout, sono assorbite dai punti base, e quindi la curva del fascio che passa per un punto generico di f, contiene tutta la f.

Quando, oltre alle intersezioni variabili di C con f, ve ne sono talune fisse, ci lascieremo liberi di includerle o di escluderle dai gruppi della serie, perchè esse non hanno alcuna

influenza sulle proprietà che abbiamo in vista. Di volta in volta avvertiremo se intendiamo riferirci ad una serie con punti fissi o coi punti tutti variabili.

Il numero dei punti di un gruppo generico, dicesi *ordine* della serie. Se n è l'ordine, la serie s'indica col simbolo di Brill e Noether, g^1_n, ponendo come indice n e come apice la dimensione 1.

Una g^1_n possiede le seguenti proprietà:

a) I suoi gruppi formano una varietà razionale ∞^1, giacchè, come abbiamo notato, essi sono in corrispondenza birazionale coi valori di un parametro λ.

b) Per un generico punto della curva f passa un sol gruppo della serie, perchè quel punto, a causa della sua genericità, è distinto dai punti base del fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$, e quindi per esso passa una sola curva del fascio.

È importante osservare che le proprietà *a*), *b*) son caratteristiche per una g^1_n, cioè che:

Sopra una curva algebrica una serie di gruppi di n punti, che soddisfaccia alle proprietà a), b), è una g^1_n.

La proprietà *a*) ci dice infatti che i gruppi della serie si posson porre in corrispondenza birazionale coi valori di un parametro λ. La proprietà *b*) ci dice che ad un generico punto della curva f corrisponde un sol valore di λ; e perciò λ è funzione algebrica ad un valore, cioè razionale, del punto (x, y) mobile su C:

$$\lambda = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

ove φ, ψ son polinomi in x, y.

Poichè la funzione $\frac{\varphi}{\psi}$ assume lo stesso valore λ in tutti i punti di un medesimo gruppo, i gruppi della serie considerata vengono staccati su f dalla curva C di equazione $\varphi - \lambda\psi = 0$. E poichè, viceversa, un punto di f, che stia sulla C, senza essere un punto base ($\varphi = \psi = 0$) del fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$, è un punto in cui $\frac{\varphi}{\psi}$ assume il valore λ, cioè un punto del gruppo della serie corrispondente al valore λ, così si conclude nel modo enunciato.

Si osserverà che, a norma del teorema del n. 5, *le serie lineari g^1_n sopra una retta son caratterizzate dalla sola proprietà b), senza bisogno della a).*

Gli è che sopra una retta tutte le serie algebriche d'indice 1 son razionali; mentre lo stesso non accade sempre, come vedremo, sopra una curva algebrica qualunque. Una serie algebrica ∞^1 di gruppi di n punti [1], che sia d'indice 1 [soddisfaccia cioè alla proprietà b)], dicesi un'*involuzione semplicemente infinita d'ordine* n, e s'indica talora col simbolo γ^1_n. *Le* g^1_n *sono involuzioni razionali.*

Nei punti base del fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$, cioè nei punti fissi della serie da esso staccata su f, la funzione razionale $\frac{\varphi}{\psi}$ è indeterminata, e le si può quindi attribuire il valore che si vuole. Tenuto conto di ciò, abbia o non abbia punti fissi la serie che noi consideriamo, si può dire che *una serie semplicemente infinita è l'insieme dei gruppi di livello costante di una funzione razionale del punto variabile sulla curva ove la serie è data.*

Ne segue che *il concetto di serie lineare semplicemente infinita è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della curva*; si tratta cioè di un concetto che appartiene alla geometria sopra la curva.

Siano invero $f(x, y) = 0$, $F(X, Y) = 0$ due curve algebriche piane in corrispondenza birazionale. Se su f si ha una g^1_n, definita dai gruppi di livello costante della funzione razionale $R(x, y)$, ed in questa, al posto delle x, y si pongono le funzioni razionali di X, Y, mediante cui si esprime la corrispondenza fra f, F, la $R(x, y)$ si muta in una funzione razionale $S(X, Y)$; e le coordinate (x, y), (X, Y) di due punti corrispondenti soddisfanno alla

$$R(x, y) = S(X, Y).$$

Così ai gruppi di livello costante per R corrispondono i gruppi di livello costante per S, e quindi alla g^1_n data su f, corrisponde su F una serie lineare, i cui gruppi son costituiti dagli omologhi di quelli della data g^1_n, ai punti fissi dell'una serie corrispondendo i punti fissi dell'altra. Perciò le due serie hanno lo *stesso ordine*.

La invarianza delle serie lineari di fronte alle trasformazioni birazionali, segue anche immediatamente dalla considerazione delle proprietà a), b), che caratterizzano le serie lineari ∞^1, poichè è evidente che le a), b) sono appunto invarianti.

[1] Cioè una serie i cui elementi (gruppi) possan rappresentarsi birazionalmente coi punti di una curva algebrica.

Il concetto di serie lineare infinita si trasporta senz'altro alle curve algebriche iperspaziali. Sopra una curva irriducibile C dello S_r una g^1_n è staccata dalle forme di un fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$, la cui varietà base non contenga C.

Una tal g^1_n gode di tutte le proprietà sopra espresse per una g^1_n su di una curva piana, e, quando fra due curve C, D, appartenenti anche a spazi di differenti dimensioni, intercede una corrispondenza birazionale, ad ogni g^1_n dell'una curva corrisponde una g^1_n dell'altra.

15. Il teorema di Bézout per le curve iperspaziali. — Alla definizione di una g^1_n sopra una curva irriducibile C dello S_r, mediante un fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$ di forme algebriche, convien supporre premessa l'estensione del teorema di Bézout alle intersezioni di una curva iperspaziale con una forma, la quale estensione trovasi p. es. nel trattato citato di ENRIQUES-CHISINI [1].

Dal punto di vista delle trasformazioni birazionali ecco come questa estensione può ottenersi.

Siano:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \rho x_i &= \varphi_i(y_0, y_1, ..., y_r), \quad (i = 0, 1, 2); \\ \sigma y_j &= \psi_j(x_0, x_1, x_2), \qquad (j = 0, ..., r), \end{aligned}$$

le formule che rappresentano la corrispondenza birazionale tra C e una curva piana $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, ove (x_0, x_1, x_2) son coordinate omogenee di punto nel piano; $(y_0, y_1, ..., y_r)$ coordinate omogenee di punto nello S_r; le φ_i son forme dello stesso ordine e le ψ_i pure.

Alle intersezioni di C con un iperpiano generico

$$(2) \qquad \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_r y_r = 0,$$

le quali son tutte variabili al variare dell'iperpiano, corrispondono le intersezioni variabili di f colla curva piana:

$$(3) \qquad \lambda_0\psi_0 + \lambda_1\psi_1 + ... + \lambda_r\psi_r = 0,$$

cioè le intersezioni fuori di quelle assorbite dai punti base del sistema lineare Σ, che la curva (3) descrive al variare dei parametri λ.

[1] Ved. vol. I, pag. 224; vol. II, pag. 94.

Sicchè, se n è l'ordine della curva C (Noz. introd. VI), ν l'ordine di f, k l'ordine delle ψ, I il numero complessivo delle intersezioni di f con una generica curva di Σ, assorbite dai punti base, risulta

$$n = k\nu - I.$$

Facendo precedere eventualmente una trasformazione omografica dello S_r [1], il che equivale a sostituire alle ψ certe loro combinazioni lineari indipendenti, si può ottenere che per ognuna delle $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_r$, che in definitiva si considerano, le intersezioni con f, assorbite dai punti base, sieno esattamente I. Preso un intero qualunque m, imaginiamo la curva composta con m delle $\psi_0, ..., \psi_r$, cioè una curva del tipo:

$$\psi_0^{l_0}\psi_1^{l_1} ... \psi^{l_r} = 0,$$

ove $l_0 + l_1 + ... + l_r = m$ $(l_i \geq 0)$. Le intersezioni di f con una tal curva, assorbite dai punti base di Σ, sono evidentemente mI. E quindi la curva generica del sistema lineare

$$\Sigma\mu_{l_0l_1...l_r}\psi_0^{l_0}\psi_1^{l_1} ... \psi_r^{l_r} = 0, \tag{4}$$

in cui le μ son parametri e il sommatorio è esteso a tutti gli interi l soddisfacenti alla condizione suespressa, sega f in

$$mn = km\nu - mI$$

punti variabili. Ciò significa che la forma

$$\Sigma\mu_{l_0l_1...l_r}y_0^{l_0}y_1^{l_1} ... y_r^{l_r} = 0,$$

che è poi una forma generica d'ordine m dello S_r, sega C in mn punti. Tenuto conto dei nn. V e VI delle Noz. introd. si ottiene così il teorema di Bézout per le curve iperspaziali:

Una forma d'ordine m sega una curva algebrica d'ordine n dello S_r in mn punti, oppure contiene la curva o una sua parte, se essa è riducibile.

Osservazione. — *Le intersezioni della curva irriducibile C con una forma generica d'ordine m, sono esattamente mn, fra di loro distinte.* Ciò equivale ad affermare, in virtù della corrispondenza fra C ed f, che le intersezioni di f con una curva generica del sistema (4), fuori dei punti base, sono tra loro distinte.

[1] Bertini, *Iperspazi*, pag. 55.

Basta evidentemente provare la cosa quando la curva che si considera varia in un fascio H, individuato da due curve generiche del sistema (4), cioè da due curve tali che le loro intersezioni con f, nei punti base di Σ, sieno esattamente mI, e che inoltre non s'incontrino su f, fuori dei suddetti punti base.

Se fra gli mn punti variabili ove la curva generica D di H sega f, ve ne fossero sempre di coincidenti, essi proverrebbero o da punti multipli di f o da punti multipli di D o da punti di contatto di f con D. Nel primo caso f avrebbe infiniti punti multipli e non sarebbe irriducibile [1]; nel secondo caso D avrebbe punti multipli fuori dei punti base di H; nel terzo il fascio H avrebbe un inviluppo diverso dall'insieme dei suoi punti base. Le due ultime ipotesi si scartano in forza del n. 10, e la prima si scarta per la irriducibilità di C. Sicchè gli mn punti variabili son tutti distinti.

Variando la forma con cui s'interseca C, gli mn punti variabili possono venire a coincidere a gruppi in punti cui devon perciò attribuirsi *molteplicità d'intersezione* maggiori di 1. Come tali molteplicità d'intersezione possan valutarsi verrà precisato più tardi (n. 25).

Il ragionamento esposto ci dimostra pure che:

Il gruppo generico di una serie lineare d'ordine n (n. 16), priva di punti fissi, sopra una curva irriducibile, è costituito da n punti distinti.

Per le serie lineari sopra una retta questo fatto si era già osservato al n. 5 (Oss. 2ª).

16. Serie lineari più volte infinite. — Sia C una curva algebrica irriducibile dello spazio S_d, dove $(x_0, x_1, ..., x_d)$ son coordinate omogenee di punto, e Σ sia un sistema lineare ∞^R di forme algebriche, di equazione:

$$\lambda_0\varphi_0(x_0, x_1, ..., x_d) + ... + \lambda_R\varphi_R(x_0, ..., x_d) = 0.$$

[1] Un punto multiplo di f sta sulla prima polare di un punto generico del piano, rispetto ad f. E quindi, se f possiede infiniti punti multipli, questi costituiscono una parte comune ad f e alla prima polare.

Supponiamo che C non appartenga alla varietà base di Σ; anzi che fra le intersezioni di C con una forma variabile di Σ ve ne siano talune variabili.

La totalità dei gruppi di punti staccati su C dalle forme di Σ, chiamasi una *serie lineare di gruppi di punti su* C. Gli eventuali punti fissi, comuni a C e alle forme di Σ, possono o no, tutti o in parte, includersi nei gruppi della serie. Quando vi sieno inclusi, si dirà che la serie *possiede punti fissi.*

Ordine della serie è il numero dei punti costituenti un suo gruppo qualunque.

Se r è la *dimensione* della serie, cioè il numero dei parametri indipendenti mediante cui si può determinare un gruppo della serie, indicheremo la serie stessa col simbolo g_n^r.

È evidente che $r \leq R$; ma non può senz'altro affermarsi che sia addirittura $r = R$. Tale eguaglianza sussiste certo allora che ogni gruppo della serie sia staccato da *una sola* forma di Σ, perchè fra le forme di Σ e i gruppi della serie havvi in tal caso una corrispondenza biunivoca continua.

Occorre ora esaminare che cosa accade quando un gruppo della g_n^r sia staccato da due o più forme di Σ. Sia p. es. il gruppo G_n staccato su C dalle due forme distinte $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, fuori dei punti fissi, dai quali possiamo benissimo astrarre. Allora G_n è segato su C da tutte le forme del fascio $\varphi + \lambda\varphi' = 0$, che appartiene a Σ, così che queste forme segnano su C punti, i quali son tutti fissi. Pertanto la forma del fascio $\varphi + \lambda\varphi' = 0$ che passa per un punto generico di C, avendo colla curva più intersezioni di quante ne richieda il teorema di Bézout, contiene tutta la C.

Viceversa, se a Σ appartiene una forma $\varphi = 0$ che contenga C, indicata con $\varphi' = 0$ una forma di Σ che stacchi G_n (una almeno ve ne sarà certo), la forma generica $\varphi + \lambda\varphi' = 0$ stacca pure su C il gruppo G_n. Dunque:

La dimensione della serie g_n^r è più piccola della dimensione R del sistema lineare Σ, che la stacca su C, allora e soltanto allora che a Σ appartenga qualche forma contenente C.

Indichiamo adesso con h la dimensione del sistema *lineare* H di tutte le forme di Σ, che contengono C (n. 4). Per un gruppo qualunque G_n di g_n^r passano allora almeno ∞^{h+1} forme di Σ, costituenti il sistema lineare che congiunge H con una forma di Σ che stacchi G_n. D'altronde le forme di Σ, che passano per G_n, costituiscono pur esse un sistema lineare,

e la generica di tali forme non ha intersezioni variabili con C; per guisa che le forme del sistema stesso passanti per un punto generico di C, contengono in conseguenza tutta la curva, cioè costituiscono il sistema H. Ne deriva che per ogni gruppo G_n passano *soltanto* ∞^{h+1} forme di Σ.

Ciò premesso, entro Σ scelgasi un sistema lineare K di dimensione $R - h - 1$, che non abbia alcuna forma in comune con H: il che è sempre possibile.

Le forme di K, tra le quali non ve n'è alcuna che contenga C, staccano su C gruppi della g_n^r considerata; ed è facile provare che *ogni* gruppo G_n di g_n^r è staccato da *una* forma di K. Invero, il sistema lineare delle ∞^{h+1} forme di Σ passanti per G_n, ha in comune con K una ed una sola forma, la quale, non passando per C, stacca G_n. Pertanto la g_n^r è staccata su C anche dal sistema K di dimensione $R - h - 1$; e poichè questo non contiene forme passanti per C, si conclude che $r = R - h - 1$. Perveniamo così al teorema:

Fra la dimensione r di una serie lineare, segata sopra una curva irriducibile C da un sistema lineare, Σ, ∞^R, di forme, e la dimensione h del sistema lineare delle forme di Σ che contengono C, passa la relazione:

$$r = R - h - 1.$$

Si può sempre segare su C la data g_n^r con un sistema lineare di forme, di dimensione r, contenuto in Σ.

Da questo teorema traggonsi i corollari seguenti:

a) I gruppi della serie lineare g_n^r, data sulla curva C, che passano per un punto P di C, diverso dagli eventuali punti fissi della serie, formano una serie lineare di dimensione $r - 1$, per la quale P è fisso.

Infatti le forme di K, che passano per P, formano un sistema lineare ∞^{r-1}, cui non appartiene alcuna forma contenente C. Questo sistema taglia dunque su C una serie lineare di dimensione $r - 1$.

Questo vale finchè P è distinto dagli eventuali punti base di K, giacenti su C. Se P è un punto base di K diverso da quelli che si son assunti come punti fissi della serie, si considererà la serie lineare g_n^{r-1} staccata dalle forme di K che passano per un punto Q di C che tende a P. Al limite, se P è semplice per C, e vi è quindi una ben determinata posizione limite della retta PQ, che è la tangente in P, la g_n^{r-1} ha per limite la serie staccata delle forme di K che hanno in P quella tangente.

Nel caso in cui P sia multiplo per C occorre considerarlo come equivalente a uno o più punti semplici, nel senso precisato in seguito (n. 23).

Quando P coincida con qualche punto fisso della serie, i gruppi di questa che contengono P coincidono colla g_n^r stessa. Sicchè in ogni caso i gruppi di una serie lineare che passano per un punto qualunque P della curva, formano una serie lineare.

La replicata applicazione della conclusione cui siamo giunti conduce alla proprietà:

b) I gruppi di una g_n^r passanti per s punti qualunque della curva C ($s \leq n$), costituiscono una serie lineare, la quale ha la dimensione $r-s$, quando gli s punti siano generici; o maggiore di $r-s$ per posizioni particolari dei punti stessi.

Per $s=r$ si ottiene:

c) Per r generici punti della curva C passa un sol gruppo di una data g_n^r.

Ne deriva che:

d) Per una g_n^r è sempre $r \leq n$, giacchè in un gruppo non posson esservi meno punti di quanti son assegnabili ad arbitrio.

Una serie lineare più volte infinita può anche definirsi come la totalità dei gruppi di livello costante per una funzione razionale del punto variabile su C. Occorre però, nel caso di una g_n^r di dimensione $r>1$, considerare una funzione razionale contenente linearmente $r-1$ parametri essenziali. Se, invero, i gruppi della g_n^r son dati dalle forme del sistema ∞^r:

$$\varphi_0(x_0, x_1, ..., x_d) + \lambda_1\varphi_1(x_0, x_1, ..., x_d) + ... + \lambda_r\varphi_r(x_0, x_1, ..., x_d) = 0,$$

essi posson pure considerarsi come gruppi di livello costante per la funzione razionale $\frac{\varphi_0}{\varphi_r} + \lambda_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_r} + ... + \lambda_{r-1} \frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_r}$, che dipende dagli $r-1$ parametri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r-1}$. Questi non posson esser sostituiti da un numero inferiore di parametri, perchè altrimenti i gruppi della serie sarebbero meno che ∞^r.

Mediante una trasformazione birazionale, che muti la curva C di uno spazio S_d, nella curva D di uno spazio S_k (k eguale o diverso da d), ad una g_n^r esistente su C corrisponde una g_n^r su D.

Sieno, invero:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \rho y_i &= \varphi_i(x_0, x_1, ..., x_d), \quad (i=0, 1, ..., k); \\ \sigma x_j &= \psi_j(y_0, y_1, ..., y_k), \quad (j=0, 1, ..., d), \end{aligned}$$

le formule che rappresentano la trasformazione birazionale fra C, D. Allora alla serie g_n^r segata su C, fuori dei punti fissi (dai quali si può in un primo tempo astrarre), dal sistema lineare:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i f_i(x_0, x_1, ..., x_d) = 0,$$

corrisponde su D la serie lineare segata, fuori dei punti fissi, dal sistema lineare:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i F_i(y_0, y_1, ..., y_k) = 0,$$

ove si è posto:

$$F_i(y_0, y_1, ..., y_k) = f_i(\psi_0, \psi_1, ..., \psi_d).$$

Le due serie hanno la stessa dimensione, perchè i loro gruppi sono in corrispondenza biunivoca continua; ed hanno lo stesso ordine, perchè agli n punti variabili di un gruppo mobile nella g_n^r esistente su C, corrispondono n punti variabili di D, formanti il gruppo omologo della serie lineare corrispondente.

Se ora si aggiungono a tutti i gruppi della g_n^r di C, alcuni punti fissi, i punti ad essi omologhi si aggiungeranno alla g_n^r di D; e così si avrà che ad una g_n^r di C, priva o no di punti fissi, risponderà sempre su D una g_n^r dotata dello stesso numero di punti fissi.

In qual senso debba interpretarsi la cosa nei riguardi dei punti multipli eventuali delle C, D (che sono in numero finito, stante la supposta loro irriducibilità) verrà precisato in seguito.

Osservazione. — Per uniformità di linguaggio, un gruppo di n punti dati sulla curva C, si considererà come una *serie lineare di dimensione zero*: una g_n^0. Se esso è segato da un sistema lineare Σ, ∞^R, di forme, le forme del sistema non hanno intersezioni variabili con C, e quindi le ∞^{R-1} forme di Σ, che passano per un punto generico di C, contengono tutta la curva. Vale cioè anche per una g_n^0 il teorema di pag. 57. In qual senso debba intendersi dato un gruppo di punti su C, quando esso comprende punti multipli della curva, verrà precisato nel n. 23.

17. Costruzione della imagine proiettiva di una data serie lineare. Serie semplici e composte. — Sopra la curva piana irriducibile:

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

(dove, al solito, x_0, x_1, x_2 denotano coordinate omogenee di punto), sia data una g_n^r, priva di punti fissi, la quale sia staccata su f, fuori dei punti base, dal sistema lineare Σ:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

In uno spazio S_r, dove $y_0, y_1, ..., y_r$ denotano coordinate omogenee di punto, costruiamo il luogo:

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2) \qquad (i = 0, 1, ..., r).$$

Mentre il punto $x(x_0, x_1, x_2)$ descrive f, il punto $y(y_0, y_1, ..., y_r)$ non può restare fisso; chè altrimenti le φ differirebbero per un fattore costante e la g_n^r avrebbe la dimensione $r = 0$, il che noi escludiamo. Quando x descrive f, il punto y descrive dunque una curva C, che è algebrica, perchè il suo punto è funzione razionale del punto variabile su f (Noz. introd. V, VI). Un punto generico di C proviene da $\mu \geq 1$ punti di f; e le due curve C, f sono in corrispondenza birazionale allora e solo allora che sia $\mu = 1$.

Come può accadere che due punti distinti x, x' di f portino allo stesso punto y del luogo C?

Ripetendo, *mutatis mutandis*, il ragionamento di pag. 7, si vede che ciò può accadere allora e solo allora che tutte le curve di Σ che passano per uno dei due punti x, x' passano in conseguenza per l'altro. Orbene, se le curve di Σ che passano per un generico punto x di f, non passano in conseguenza per altri punti di f variabili con x; cioè se tutti i gruppi di g_n^r che passan per x, non passano in conseguenza per altri punti della curva, si dice che la serie g_n^r è *semplice*. Se, invece, tutti i gruppi di g_n^r (cioè tutte le curve di Σ) che passan per x, passano in conseguenza per altri $\mu - 1$ punti (variabili con x), allora la serie dicesi *composta* (cfr. col. n. 13).

In tal caso su f si ha una serie γ, ∞^1, di gruppi di μ punti, tale che ogni gruppo di g_n^r che contenga un punto di uno di quei gruppi, contiene gli altri $\mu - 1$, e per un punto qualunque di f passa un solo gruppo di γ. La serie γ inoltre è algebrica, perchè i suoi gruppi sono in corrispondenza birazionale coi punti della curva algebrica C. Pertanto, secondo la definizione del n. 14, γ è un'involuzione ∞^1 di ordine μ. Si dirà che la g_n^r è *composta con tale involuzione*, nel senso che ogni gruppo di g_n^r si scinde in $\frac{n}{\mu}$ gruppi di γ.

P. es. la serie lineare staccata sopra una curva piana dal sistema di tutte le curve di dato ordine è semplice. Invece, la serie staccata sopra una curva piana f di ordine n, con un punto $(n-2)$-plo P, dalle curve di ordine $n - 3$, per cui P sia $(n-3)$-plo, è una serie composta. Queste curve si spezzano infatti in $n - 3$ rette per P, e perciò quelle di esse, che passano per un punto qualunque Q di f, contengono l'intera retta PQ e passano in conseguenza per l'ulteriore intersezione variabile di f con questa retta. La serie considerata è in tal caso composta colla g_2^1 staccata su f dalle rette del fascio P.

Osserviamo ora, ritornando alle considerazioni generali, che la curva C è irriducibile e ch'essa appartiene sempre allo spazio S_r e non ad uno spazio di dimensione inferiore; e ciò tanto nel caso $\mu = 1$, come nel caso $\mu > 1$.

Nel caso $\mu = 1$, la irriducibilità di C consegue dalla stessa definizione di curve iperspaziali irriducibili (Noz. introd. VI). Nel caso $\mu > 1$, se C si spezzasse in due parti C', C'', si spezzerebbe in due parti infinite γ', γ'' anche la serie γ; e per un punto generico di f passerebbe almeno un gruppo di γ' ed uno di γ''. La serie γ non sarebbe pertanto di indice 1.

Proviamo adesso che non può esistere un iperpiano

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_r y_r = 0 \tag{6}$$

dello S_r, che contenga C. Invero, se un tale iperpiano esistesse, sussisterebbe la relazione

$$\lambda_0 \varphi_0(x_0, x_1, x_2) + ... + \lambda_r \varphi_r(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{7}$$

valida per ogni punto x di f. Qualora la (7) fosse soddisfatta per ogni x del piano, le forme φ non sarebbero linearmente indipendenti, come noi abbiamo supposto quando abbiamo assegnato la dimensione r della nostra g_n^r eguale a quella del sistema lineare Σ segante; dunque la (7) non può che esser soddisfatta limitatamente ai punti di f; cioè essa equivale all' identità:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = \varphi(x_0, x_1, x_2) f(x_0, x_1, x_2),$$

ove φ è una forma nelle x. Ciò prova che al sistema Σ appartiene qualche curva contenente come parte f; contro al supposto che Σ abbia la stessa dimensione r della serie lineare segata. La conclusione è dunque che non esiste alcun iperpiano — e quindi tanto meno uno spazio di dimensione inferiore — che contenga C.

La corrispondenza fra f, C, che è birazionale, quando sia $\mu = 1$, muta i punti variabili in cui f è segata da una curva mobile in Σ, nei punti ove C è segata da un iperpiano variabile (6), e viceversa; onde la curva C è di ordine n (n. 15).

Se invece $\mu > 1$, pur restando vero che al gruppo delle intersezioni variabili di f con una curva mobile di Σ corrisponde il gruppo delle intersezioni di C con un iperpiano variabile, accade che ognuna di queste ultime intersezioni proviene da μ di quelle; onde C è di ordine $n:\mu$.

Si osserverà infine che la corrispondenza fra le curve di Σ, cioè fra i gruppi della g_n^r, e gl' iperpiani di S_r, è *proiettiva*, perchè due elementi omologhi corrispondono agli stessi valori dei λ. Riassumendo:

Abbiasi sopra una curva irriducibile piana f una serie lineare g_n^r. Si può sempre costruire in uno spazio S_r una curva algebrica C irriducibile, il cui punto sia funzione razionale del punto di f, in modo che ai gruppi della data g_n^r corrispondano proiettivamente i gruppi delle intersezioni di C cogl' iperpiani di S_r. La curva C è di ordine n e birazionalmente equivalente ad f, se la g_n^r è semplice; essa è di ordine $n:\mu$ ed in corrispondenza $(1, \mu)$ con f, se la serie g_n^r è composta con una involuzione d' ordine μ.

La costruzione di C può effettuarsi geometricamente nel modo seguente: Pongasi una qualunque proiettività (non degenere) tra i gruppi di g_n^r e gl' iperpiani di uno spazio S_r. Allora ai gruppi di g_n^r, che passano per un generico punto x di f, corrispondono gl' iperpiani di S_r, che passano per un certo punto y; variando x su f, il punto y varia in S_r descrivendo C.

La curva C chiamasi l' *imagine proiettiva della data g_n^r*. Quando $\mu = 1$, C è un *modello proiettivo* di f (Noz. introd. VII). Se $\mu > 1$, poichè ogni punto di C ne rappresenta μ di f, la curva C si può considerare come un modello proiettivo di f, in quanto la si riguardi come una *curva multipla secondo* μ. In seguito verrà dato un significato sostanziale al concetto di curva multipla, qui introdotto soltanto come un' abbreviazione del linguaggio.

La costruzione ed il relativo teorema possono evidentemente estendersi, senza difficoltà alcuna, al caso di una g_n^r considerata sopra una curva irriducibile f di uno spazio S_d e si ha così *l' imagine proiettiva di una serie lineare data sopra una curva iperspaziale.*

OSSERVAZIONE 1ª. — È evidente che *una g_n^r non può esser composta con due diverse involuzioni* γ, γ', perchè preso un generico punto x della curva C su cui è data la g_n^r, tanto il gruppo di γ, come il gruppo di γ', individuati da x, son egualmente definiti come il gruppo dei punti variabili comuni agli ∞^{r-1} gruppi di g_n^r per x. Onde γ e γ' coincidono.

OSSERVAZIONE 2ª. — Il ragionamento della fine del n. 16 prova pure che *quando fra due curve algebriche c' è una corrispondenza* $(1, \mu)$, *nel senso che il punto di C sia funzione razionale del punto di D e questo funzione algebrica a μ valori di quello, ad una serie lineare di C corrisponde una serie lineare di D; se la prima è una g_n^r, la seconda sarà una $g_{n\mu}^r$, composta mediante l' involuzione γ, ∞^1, di ordine μ, i cui gruppi corrispondono su D ai punti di C.*

Viceversa, *ad ogni $g_{m\mu}^s$ della D, composta con γ, risponde su C una serie lineare g_m^s.*

Infatti, l' imagine proiettiva della $g_{m\mu}^s$ è una curva C' di ordine m dello spazio S_s, birazionalmente equivalente a C. E alla $g_{m\mu}^s$ corrisponde su C' la g_m^s delle sezioni iperpiane.

La considerazione dell' imagine proiettiva di una data serie lineare è della massima importanza, perchè permette di trasportare nel campo proiettivo lo studio di molte proprietà appartenenti alla geometria sull' ente. Essa è dovuta a BRILL [Gött. Nachr. 525, (1870); Math. Annalen, **3**, 459 (1871); Math. Annalen, **4**. 527 (1871); Math. Annalen, **5**, 378 (1882)]. Vedi pure: BRILL-NOETHER, Math. Annalen, **7**, 269 (1874); VERONESE, Math. Annalen, **19**, 161 (1882).

18. **Proiezioni di una curva iperspaziale algebrica.** — Prima di occuparci in modo specifico delle proiezioni delle curve algebriche, facciamo talune osservazioni generali sugli spazi secanti di una curva qualunque C dello spazio S_r. Intendiamo che la C soddisfaccia alle condizioni che consentono di parlare di retta tangente a C in un suo punto generico (cioè in ogni punto, salvo un numero finito o una infinità discreta di eccezioni). Intendiamo inoltre che un iperpiano qualunque incontri C in un numero discreto di punti; mai in un'infinità continua: il che esprimiamo dicendo che C *appartiene* allo S_r.

Osserviamo in primo luogo che μ *punti generici di* C ($\mu \leq r$) *individuano un* $S_{\mu-1}$ (cioè stanno in un $S_{\mu-1}$ e non in uno spazio inferiore). Poichè la proprietà è vera per $\mu = 2$, supporremo che sia stabilita per $\mu < k$ e la dimostreremo per $\mu = k$. Se k punti generici appartenessero ad un S_{k-2}, scelti su C $k-1$ punti generici, questi individuerebbero un S_{k-2}, che dovrebbe contenere un punto generico di C, la quale dunque non apparterrebbe allo S_r.

Dato uno spazio Ω, ad $r-k-1$ dimensioni dello S_r, ed uno spazio ω, a k dimensioni, non appoggiato ad Ω, ricordiamo (¹) che *proiettare* C da Ω su ω, vuol dire congiungere Ω con un punto P variabile su C e intersecare lo S_{r-k}, ΩP, con ω, nel punto P': il luogo C' di P' è la curva proiezione di C.

Si può sempre scegliere Ω in tal guisa che la proiezione di C si compia in modo *generalmente biunivoco* (cioè che vi sia una corrispondenza biunivoca fra i punti di C, C', salvo un numero discreto di eccezioni)?

Per rispondere occorre premettere il lemma seguente:

Lo spazio $S_{\mu-1}$ *individuato da* $\mu \leq r-1$ *punti generici della curva* C *di* S_r *non incontra altrove la curva.*

Dimostriamolo anzitutto per $\mu = 2$, $r > 2$. Si tratta di provare che non ogni corda di C è una trisecante. Se la generica corda AB incontra ulteriormente C in punto P, da P la curva C vien proiettata almeno doppiamente; e poichè AB, per esser generatrice generica del cono Γ proiettante C, non è multipla, le due tangenti a C in A, B giaccion sul piano tangente a Γ lungo AB. Pertanto le tangenti di C s'incontrano a due a due, e dal momento ch'esse non passano tutte per un punto (chè altrimenti proiettando C da un S_{r-3} sopra un piano si otterrebbe ivi una curva con tutte le sue tangenti passanti per un punto), giacciono tutte in un piano; contro l'ipotesi che C appartenga ad uno spazio di dimensione > 2 (¹).

(¹) BERTINI, *Iperspazi*, pag. 35.

Ciò posto, si ammetta dimostrato il lemma per $\mu < k$ ed r qualunque. Allora, considerando la proiezione C' di C da un generico punto di C sopra un iperpiano, se ne deduce subito il lemma per $\mu = k$.

Conseguenza immediata del lemma è che:

Una curva C *dello* S_r *da un punto* O *che sia scelto genericamente o nello spazio o sulla curva, vien proiettata sopra un iperpiano in una curva* C', *i cui punti rispondono a quelli di* C *in modo generalmente biunivoco.*

Invero, se O è scelto genericamente su C, la retta OP, che proietta il punto generico P di C, non incontra altrove la curva. Che poi O possa scegliersi nello spazio (genericamente) in guisa da proiettar C biunivocamente risulta da ciò: Si assuma una retta generica per un punto semplice P di C. Essa non incontra altrove la curva. Sicchè da un punto O di tale retta, diverso da P, C si proietta biunivocamente, perchè se no anche la retta OP dovrebbe incontrare C in un ulteriore punto.

La combinazione delle osservazioni precedenti, conduce senz'altro alla seguente proposizione generale:

Scelgansi in S_r $r-k$ *punti* ($k \leq r-1$), *dei quali alcuni in modo generico nello spazio ed altri in modo generico sulla curva* C, *appartenente ad* S_r. *Dallo spazio* S_{r-k-1} *da essi individuato, la* C *si proietta biunivocamente (salvo un numero discreto di eccezioni) sopra uno spazio* S_k, *in una curva* C'.

Veniamo ora più specialmente al caso in cui C è algebrica (e irriducibile), di ordine n. Le operazioni che conducono dalla C alla sua proiezione C', da un punto qualunque sopra un iperpiano, o più generalmente da un S_{r-k-1}, Ω, sopra un S_k, ω, sono algebriche, anzi razionali. Cosicchè il punto della C', è funzione razionale del punto di C e quindi (Noz. introd. VI) la curva C' è algebrica:

La proiezione di una curva algebrica è ancora una curva algebrica.

E se, come abbiamo supposto, C *è irriducibile, anche la proiezione è irriducibile.*

(¹) Questo ragionamento è di CASTELNUOVO.

Invero, la C' è in corrispondenza birazionale con C, se lo S_{r-h} che proietta da Ω un punto generico P di C, non incontra C in ulteriori punti variabili con P (il che accade sempre, quando Ω sia scelto genericamente nel modo sopra espresso); se invece quello S_{r-h} incontra C in altri $\mu - 1$ punti variabili, allora C' è in corrispondenza birazionale coi gruppi di una involuzione ∞^1 di ordine μ, esistente su C. In ogni caso (n. prec.) C' è irriducibile.

Se un iperpiano generico per Ω incontra C in $n-h$ punti variabili ($h > 0$, quando Ω sia appoggiato a C in qualche punto), l'ordine n' di C' è:

$$n' = n - h, \quad \text{oppure:} \quad n' = \frac{n-h}{\mu},$$

secondo che C' è in corrispondenza birazionale o in corrispondenza $(1, \mu)$ con C.

In particolare, se C si proietta da uno S_{r-3} generico dello spazio sopra un piano, si ottiene una curva C' birazionalmente equivalente a C (e dello stesso ordine).

Per la definizione stessa di una curva algebrica iperspaziale, noi sappiamo che esiste sempre una curva piana ad essa birazionalmente equivalente. Ora vediamo che questa curva si può semplicemente costruire con una proiezione.

Osservazione. — Il lemma dimostrato al principio di questo n., tenuto conto del fatto che ogni g_n^r semplice, sopra un conveniente modello proiettivo della curva, diventa la serie delle sezioni iperpiane, può enunciarsi così:

Data sopra una curva una g_n^r semplice, non può mai accadere che i gruppi della serie passanti per $\mu \leq r-1$ punti generici della curva, passino in conseguenza per altri punti, con quelli variabili.

Inoltre, sopra una curva C dello S_r, pel lemma, i gruppi di r punti, che son contenuti in spazi S_{r-2}, dipendono da meno di $r-1$ parametri. Cosicchè sopra un iperpiano generico non possono esistere siffatti gruppi di punti. E invero, se un iperpiano generico ne contenesse qualcuno G, poichè per G passerebbero ∞^1 iperpiani, al variare dell'iperpiano considerato, otterremmo ∞^{r-1} gruppi G, contro il fatto che essi dipendono da meno di $r-1$ parametri. Ciò può enunciarsi dicendo:

Data una g_n^r semplice e priva di punti fissi, sopra una curva C, r punti qualunque di un suo gruppo generico appartengono soltanto a questo gruppo della serie.

Le proiezioni di una curva algebrica iperspaziale furono sistematicamente considerate per la prima volta nella Memoria di Veronese, *Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projizierens und Schneidens* [Math. Annalen, **19**, 161 (1883)].

Le proprietà riferite nell'osservazione, sono state notate da Bertini, Torino Atti, **26**, 118 (1890); Ann. di Mat. **22**$_2$, 1 (1893).

19. Condizione perchè una corrispondenza birazionale tra due curve sia un'omografia. — Per costruire l'imagine proiettiva di una g_n^r data sopra una curva C dello spazio S_d, ove $x_0, x_1, \dots, x_d$ siano coordinate omogenee di punto, siamo partiti (n. 17) da un sistema lineare

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_d) = 0$$

di forme, che stacchi su C la g_n^r (priva di punti fissi), e abbiamo indi considerato la curva C' dello S_r, rappresentata parametricamente da

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_d) \qquad (i = 0, \dots, r)$$

essendo il punto $x(x_0, x_1, \dots, x_d)$ variabile su C.

Ma la data serie g_n^r non individua un sistema capace di staccarla su C. Così p. es. sopra una conica k la g_2^2 staccata dalle rette del piano, può pure staccarsi col sistema delle ∞^2 coniche che passano per due punti di k e per un punto fuori di k; oppure col sistema ∞^2 delle cubiche che passano doppiamente per un punto di k, semplicemente per altri due, e che passano inoltre per due punti fuori di k; ecc., ecc.

Finchè era *dato* il sistema segante la serie, se si fossero cangiate in esso le $r+1$ forme indipendenti atte ad individuarlo, costruendo mediante queste forme, nel modo ricordato, la curva C', evidentemente non si sarebbe fatto altro che mutare la proiettività fra le forme del sistema lineare segante e gl'iperpiani di S_r, talchè la curva imagine si sarebbe mutata in una ad essa omografica. In altri termini insomma, dato il sistema lineare segante, l'imagine proiettiva della g_n^r vien definita a meno di un'omografia dello S_r.

Ma, se si muta il sistema lineare segante la *data* serie g_n^r, le nuove imagini proiettive della serie, che si vengono così a costruire, in quale relazione stanno colle precedenti? Orbene, proveremo che le nuove imagini proiettive sono le stesse delle antiche, così che potremo concludere che *data sopra una curva C irriducibile una serie lineare g_n^r, semplice o composta, la imagine proiettiva della data g_n^r è definita a meno di un' omografia dello S_r, comunque si scelga il sistema lineare di forme che stacca su C la serie data.*

È chiaro intanto che due imagini proiettive di g_n^r, siano esse o no costruite a partire dallo stesso sistema lineare segante, sono due curve dello stesso ordine (n o $n:\mu$ secondo che la serie è semplice o composta con una γ_μ^1), riferite birazionalmente in tal guisa, che alle sezioni iperpiane dell' una corrispondono le sezioni iperpiane dell' altra. Questa condizione, che è evidentemente necessaria perchè due curve siano omografiche, è anche sufficiente? Se sì, potremo concludere nel modo enunciato. Si tratta dunque di provare che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve algebriche irriducibili D, D', in corrispondenza birazionale, appartenenti a spazi Σ, Σ' di dimensione r, sieno omografiche, è che alla serie delle sezioni iperpiane dell' una corrisponda la serie delle sezioni iperpiane dell' altra.

Per l' ipotesi, ad ogni iperpiano di Σ viene associato un iperpiano di Σ', che è quello il quale segna su D' il gruppo omologo della sezione di D col primo iperpiano; e viceversa. La corrispondenza fra le due curve ne induce pertanto una birazionale (biunivoca, algebrica) fra gli iperpiani di Σ, Σ'. Studiamo le proprietà di questa corrispondenza.

Consideriamo in Σ un fascio H d' iperpiani. Esso stacca su D, che sia d' ordine n, una g_n^1, alla quale corrisponde una g_n^1 di D'. Pertanto ad H risponde in Σ' un sistema algebrico ∞^1, H', di iperpiani, che staccano la g_n^1 omologa di quella considerata su D. Per un punto generico di D' passa dunque un sol iperpiano di H'. Da ciò si trae che H' è un fascio. Invero, se H' non fosse un fascio, per un punto generico di Σ' passerebbe più di un iperpiano di H' (¹) e quindi H' ammetterebbe una varietà *inviluppo* V_{r-1} (un inviluppo proprio; non un inviluppo luogo di punti base del sistema) e D' apparterrebbe a quest' inviluppo e sarebbe perciò toccata dagl' iperpiani di H' nei punti ove essi la incontrano. Sicchè un gruppo generico della g_n^1 considerata su D' sarebbe costituito da punti multipli (almeno doppi); il che non può avvenire (n. 15, Oss.). Pertanto H' è un fascio.

(¹) Una curva algebrica di S_r, che sia segata in un solo punto da un iperpiano generico, è una retta. Dualmente: Un sistema algebrico ∞^1 di iperpiani, tale che per un punto generico ne passi uno solo, è un fascio.

La corrispondenza birazionale tra gl' iperpiani di Σ, Σ' muta dunque un fascio in un fascio e quindi essa è un' omografia (¹). Agl' iperpiani di Σ passanti per un punto P corrispondono perciò gl' iperpiani di Σ' passanti per il punto P' corrispondente a P nell' omografia; e viceversa. E poichè ogni punto di D (o di D') può considerarsi come centro di una stella di iperpiani, così le D, D' si corrispondono nella suddetta omografia.

20. Serie lineari contenute in una data. — In sostanza, nella dimostrazione precedente noi abbiamo stabilito che, entro la g_n^r delle sezioni iperpiane di D', una serie algebrica ∞^1 di gruppi n punti, di indice 1, è segata da un fascio di iperpiani. Più in generale possiamo dimostrare che:

Data sopra una curva irriducibile C dello S_d una serie lineare g_n^r, staccata su C, fuori dei punti fissi, dalle forme del sistema lineare A, di equazione:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_d) = 0,$$

ogni serie algebrica $\infty^{r'}$ di gruppi di g_n^r, tale che per r' punti generici di C passi uno solo di quei gruppi, è lineare ed è staccata su C da un sistema subordinato di A.

Facciamo l' imagine proiettiva di quella g_n^r. Avremo in S_r una C' (di ordine $n'=n$ od $n'=n:\mu$) e su questa una $g_{n'}^r$, imagine della g_n^r di C. Inoltre esisterà su C' una serie algebrica σ di $\infty^{r'}$ sezioni iperpiane, tale che per r' punti generici di C' ne passerà una sola. Diciamo H il sistema degli $\infty^{r'}$ iperpiani che staccano su C' la serie σ. Gl' iperpiani di H pas-

(¹) Sotto forma duale: Una corrispondenza birazionale tra i punti di due S_r, che faccia corrispondere a una retta dell' uno, una retta dell' altro (subordinando fra queste una proiettività; ved. Noz. intr., IV), è un' omografia. BERTINI, *Iperspazi*, pag. 55.

santi per $r'-1$ punti generici di C', formano un sistema ∞^1, tale che per un altro punto generico di C' passa un sol iperpiano di questo sistema; il quale, dunque, a norma della conclusione del n. precedente, è un fascio. Ma allora gl'iperpiani di H passanti per $r'-2$ punti generici di C' e per un punto generico dell'ambiente S_r, formano un sistema ∞^1, il quale, su C', è d'indice 1. È dunque anch'esso è un fascio. Così proseguendo, si giunge alla conclusione che per r' punti generici di S_r passa un sol iperpiano di H; epperò H è un sistema lineare (¹), formato dagl'iperpiani che passano per un certo $S_{r-r'-1}$.

Ritornando da C' a C, si vede che la serie algebrica $\infty^{r'}$ di C è segata da un sistema lineare contenuto in A.

Ne segue come immediato corollario, questa importante proprietà:

Le sole serie lineari contenute totalmente in una serie lineare, la quale sia staccata da un dato sistema lineare di forme, sono quelle staccate dai sistemi lineari a questo subordinati.

Abbiamo detto *contenute totalmente* per alludere al fatto che i gruppi delle serie subordinate che si considerano, sono gruppi totali della g_n^r (cioè dello stesso numero di punti); mentre diremo che una serie è *contenuta parzialmente* in un'altra, se ogni gruppo della prima è parte di qualche gruppo della seconda.

In base al corollario enunciato, le relazioni fra le serie lineari contenute totalmente in una data, s'identificano colle relazioni fra i sistemi lineari subordinati a un dato, cioè colle relazioni fra gli spazi lineari subordinati a un dato. Questo fatto si vedrà in seguito sotto nuova luce (n. 28, Oss.).

21. Interpretazione proiettiva della relazione fra una serie lineare ed una serie lineare subordinata. — Sia C una curva irriducibile, d'ordine n, dello S_r e C' sia una sua proiezione biunivoca (n. 18) da un $S_{r-r'-1}$, Ω, che non incontri C, sopra un $S_{r'}$, ω. Alla serie $g_n^{r'}$ staccata su C' dagli iperpiani del suo spazio, corrisponde su C la $g_n^{r'}$ staccata dagli iperpiani per Ω; cioè una serie lineare contenuta totalmente (n. 20) nella g_n^r di tutte le sezioni iperpiane di C. Se la curva C' si trasforma con un'omografia di ω, in una curva C'', fra C, C'' sempre intercede una corrispondenza birazionale che muta la serie delle sezioni iperpiane di C'', in una serie contenuta totalmente in quella delle sezioni iperpiane di C. Dunque:

Se una curva C' è proiezione biunivoca della curva irriducibile C, o è trasformata omografica di una siffatta proiezione di C, alla serie lineare segata su C' degl'iperpiani del proprio spazio, corrisponde su C una serie contenuta totalmente in quella delle sezioni iperpiane di C.

Questa proposizione s'inverte come segue. Le due curve irreducibili C, C', d'ordine n, appartengano a due spazi Σ, Σ' delle dimensioni rispettive r, r' $(r > r' > 1)$; e fra esse intercede una corrispondenza birazionale tale che alla $g_n^{r'}$ delle sezioni iperpiane di C' corrisponda su C una $g_n^{r'}$ contenuta totalmente nella g_n^r delle sezioni iperpiane di C.

Ad ogni iperpiano di Σ' viene ad associarsi un iperpiano di Σ, che stacca su C il gruppo omologo di quello segnato dal primo iperpiano su C'. Così al sistema degl'iperpiani di Σ' viene a corrispondere in Σ un sistema algebrico $\infty^{r'}$, tale che per r' punti generici di C passa un sol iperpiano di questo sistema; il quale dunque (n. 20) è un sistema lineare, costituito dagli iperpiani passanti per un $S_{r-r'-1}$, Ω, che non s'appoggia a C, perchè i gruppi della serie staccata su C dagl'iperpiani di questo sistema hanno n punti variabili.

Si proietti C da Ω sopra uno spazio $S_{r'}$, Σ_1, non appoggiato ad Ω. La curva proiezione C_1 sarà riferita biunivocamente a C, perchè la serie $g_n^{r'}$ che si ha su C, in corrispondenza alla serie delle sezioni iperpiane di C', è semplice. Fra C_1, C' nasce una corrispondenza birazionale, che muta la serie $g_n^{r'}$ delle sezioni iperpiane dell'una, nella serie $g_n^{r'}$ delle sezioni iperpiane dell'altra. Anche le due curve C_1, C' sono perciò omografiche (n. 19); e si può enunciare il teorema:

Se fra due curve irriducibili C, C' appartenenti a spazi di dimensioni rispettive r, r' $(r > r' > 1)$, intercede una corrispondenza birazionale, che muti la serie delle sezioni iperpiane di C' in una serie contenuta totalmente in quella delle sezioni iperpiane di C, la curva C' è proiezione di C, da uno spazio non appoggiato a C, o è omografica ad una siffatta proiezione.

(¹) Ved. la fine del n. 7. Del resto la proprietà che qui si applica è la duale di quest'altra: una varietà algebrica $V_{r'}$ dello S_r, che sia segata in un sol punto da un generico $S_{r-r'}$, è uno spazio lineare $S_{r'}$, perchè si proietta da un $S_{r-r'-2}$ generico sopra un $S_{r'+1}$ secondo una forma lineare. Cfr. Bertini, *Iperspazi*, pag. 232.

Si può anche enunciare il risultato così:

Dire che una $g_n^{r'}$ è contenuta totalmente in una g_n^r, equivale a dire che l'imagine proiettiva della $g_n^{r'}$, a meno di un'omografia, coincide colla proiezione della imagine proiettiva della g_n^r, da un conveniente spazio ad essa non appoggiato.

Questo teorema vale evidentemente anche se la serie g_n^r (e quindi la $g_n^{r'}$) è composta con un'involuzione γ_μ^1. L'unica variante è che, in tal caso, le due imagini proiettive sono curve dell'ordine $n:\mu$.

Osservazione 1ª — Assumasi lo spazio Σ, in cui costruiscesi il modello proiettivo C di g_n^r, passante per lo spazio Σ' del modello proiettivo C' di $g_n^{r'}$. Allora su C la serie omologa alla $g_n^{r'}$ è segata dagli iperpiani per un certo spazio Ω_1, ad $r-r'-1$ dimensioni. Proiettando C da Ω_1 su Σ', si ha ivi una curva C_1 che trasformasi in C' mediante una conveniente omografia π' di Σ'.

Ciò posto, si fissi in Σ un altro spazio, ad $r-r'-1$ dimensioni, Ω, e si consideri, fra i sistemi lineari Ω_1 ed Ω degli iperpiani di Σ, passanti per gli spazi omonimi, l'omografia π, che nasce chiamando omologhi due iperpiani dei predetti sistemi, i quali proiettano iperpiani di Σ' corrispondenti nella π'. Un'omografia di Σ, che muti Ω_1 in Ω, subordini fra i due sistemi l'omografia π, e che inoltre muti in sè lo spazio Σ' [1], fa corrispondere a C una curva C_0, che è ancora un'imagine proiettiva della g_n^r. La C_0 proiettasi da Ω su Σ' nella curva C'. Dunque:

Quando una serie $g_n^{r'}$ è contenuta in una g_n^r $(r > r' > 1)$, si posson sempre trovare due curve, imagini proiettive delle due serie, in guisa che l'imagine di $g_n^{r'}$ sia addirittura la proiezione dell'imagine di g_n^r.

Lo stesso risultato può ottenersi così: Nel sistema lineare ∞^r di forme, che sulla curva data f sega la data g_n^r, scegliamo $r+1$ forme linearmente indipendenti $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$, di cui le prime $r'+1$ passino per altrettanti gruppi indipendenti della $g_n^{r'}$ subordinata alla data g_n^r. Allora nello spazio S_r, ove $y_0, y_1, \ldots, y_r$ sieno coordinate omogenee di punto, la curva C rappresentata da:

$$\rho y_i = \varphi_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

[1] Di tali omografie dello spazio Σ ve ne sono infinite. Ved. Bertini, *Iperspazi*, pag. 64.

che è un'imagine proiettiva di g_n^r, si proietta sullo spazio coordinato fondamentale $(y_r = y_{r-1} = \ldots = y_{r'+1} = 0)$, dallo spazio $S_{r-r'-1}$ opposto nella piramide fondamentale delle coordinate, sulla curva C' rappresentata da

$$\rho y_k = \varphi_k \quad (k = 0, 1, \ldots, r'),$$

la quale è appunto un'imagine proiettiva di $g_n^{r'}$.

Osservazione 2ª — Ritorniamo per poco a considerare la relazione fra una curva irriducibile C, d'ordine n, di S_r, e una sua proiezione biunivoca C', da uno spazio $S_{r-r'-1}$, Ω, sopra un $S_{r'}$, ω. Se Ω si appoggia a C, in tal guisa che un iperpiano generico per Ω segni C in $n-h$ punti variabili, la curva C' è d'ordine $n' = n - h$; e alla $g_{n'}^{r'}$ delle sezioni iperpiane di C' corrisponde in tal caso su C una $g_{n'}^{r'}$ contenuta parzialmente (n. 20) nella g_n^r delle sezioni iperpiane di C. Il teorema si potrà invertire anche in questo caso, come quando era $h=0$? La inversione si può fare anche in tal caso, però sotto una condizione supplettiva, che verrà specificata più tardi (la curva C deve esser *normale*; ved. n. 31) [1]. Qui ci basterà addurre un esempio, per provare che l'inversione non è senz'altro lecita.

Consideriamo nello spazio ordinario una *quartica C razionale* o *quartica gobba di seconda specie,* senza punti multipli (ved. al n. 32); e sia C' una conica. Fra C, C' si può porre una corrispondenza birazionale, perchè le due curve sono birazionalmente equivalenti ad una retta. Orbene, alla g_2^2 segata su C' dalle rette del piano, corrisponde su C una g_2^2 (la totalità delle coppie di punti di C), che è contenuta parzialmente nella serie g_4^3 segata su C dai piani dello spazio. Eppure le sole proiezioni piane di C sono quartiche (razionali) e cubiche (razionali), e non coniche. Gli è che, fissato ad arbitrio un punto O dello spazio, mediante la corrispondenza fra C', C alle rette del piano vengono associati i piani che proiettano da O le coppie di punti di C, omologhe di quelle staccate su C' dalle rette stesse; ma i piani della stella O segano C in più di due punti variabili (4 o 3 secondo che O fu assunto

[1] Se non erro la necessità di questa condizione supplettiva era finora sfuggita. Anche nelle mie *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Teubner, 1921) (citate in seguito con « Vorlesungen »), essa vien trascurata (pag. 93).

fuori di C o su C). Quei piani danno luogo su C ad una serie (g_1^2 o g_3^2) priva di punti fissi e contenente parzialmente una serie g_2^2 della stessa dimensione. Se ha così *un esempio di una serie lineare* g_n^r, *semplice e priva di punti fissi, che contiene parzialmente una serie* $g_{n'}^r$ *(*$n' < n$*) della stessa dimensione.*

Se la serie g_n^r, priva di punti fissi, soddisfa alla condizione supplettiva cui s'è alluso (di esser cioè *completa*; ved. n. 32), essa certamente non contiene parzialmente serie lineari della stessa dimensione.

I teoremi dei nn. 19, 20, 21 sono stati posti in piena luce da SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* [Ann. di Mat. 22_2 (1894), § 6], al quale è, in modo particolare, dovuto il ragionamento del n. 19. Egli ha inoltre posto in evidenza la necessità del teorema del n. 20, per una completa e rigorosa trattazione della teoria delle serie lineari.

§ 2 - TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE DI UNA CURVA ALGEBRICA IN UNA PRIVA DI PUNTI MULTIPLI.

22. Costruzione di un modello proiettivo privo di punti multipli. — Negli sviluppi precedenti, salvo qualche lieve accenno di sfuggita, abbiamo fatto astrazione dai punti multipli, che la curva irriducibile C, su cui ragionavamo, poteva presentare. E ciò perchè le proprietà, che pel momento ci interessava di stabilire, non richiedevano che la considerazione di punti generici della curva C, la quale, in quanto irriducibile, non può presentare che un numero finito di punti multipli.

Precisiamo anzitutto questo fatto, che abbiamo già osservato in modo esplicito per una curva piana irriducibile (nota a piè della pag. 55).

La C appartenga ad S_r e sia di ordine n. Un suo *punto multiplo* P (p. es. s-plo) si può variamente definire. Consideriamo ad esempio una proiezione piana biunivoca C' di C, da un S_{r-3} generico, Ω (n. 18). Il punto P si dirà s-plo, se la proiezione P' è un punto s-plo per C'. Altrimenti si può dire: Il punto P chiamasi s-plo se un iperpiano generico per P taglia la curva C in $n-s$ punti variabili (e distinti, n. 15, Oss.).

Le due definizioni sono equivalenti, perchè quando C si proietta in C' da Ω, le intersezioni variabili di C con un

iperpiano generico per ΩP, si proiettano nelle intersezioni variabili di C' con una retta generica per P'.

E dunque l'affermazione che C, in quanto irriducibile, ha un numero finito di punti multipli, per guisa che *un suo punto generico è semplice*, si riduce all'affermazione che la proiezione piana C', la quale pure è irriducibile, ha un numero finito di punti multipli. E invero, ogni punto multiplo di C dà un punto multiplo di C' (ma non, come vedremo, viceversa).

Si tratta ora di cercare se fra le trasformate birazionali di C, ve n'è qualcuna assolutamente priva di punti multipli. Basterà considerare il caso in cui C è una curva piana, giacchè a questo caso ci possiamo ridurre con una proiezione generica, che è una trasformazione birazionale della curva.

Sia dunque C, irriducibile, piana e d'ordine n.

Consideriamo il sistema lineare Σ_1 delle curve piane d'ordine $n-1$. Esso ha la dimensione $r_1 = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$, e, poichè nessuna sua curva contiene C, esso stacca su C una serie lineare $g_{n_1}^{r_1}$ di dimensione r_1 e di ordine:

$$n_1 = n(n-1),$$

il cui gruppo generico consta di n_1 punti tutti variabili e distinti.

Se in Σ_1 non esistono sistemi lineari subordinati di ordine $n-1$ e di dimensione $r_1 - 1$, i quali stacchino su C serie lineari di ordine minore di $n_1 - 1$, la curva C è essa medesima priva di punti multipli, perchè, ove un punto s-plo P esistesse ($s > 1$), le curve d'ordine $n-1$ per P formerebbero un sistema ∞^{r_1-1} e taglierebbero C soltanto in $n-s < n_1 - 1$ punti variabili.

Suppongasi invece che esista un qualche sistema lineare Σ_2, che stacchi su C, fuori dei punti fissi eventuali, una $g_{n_2}^{r_2}$, con $r_2 = r_1 - 1$, $n_2 \leq n_1 - 2$. Se in Σ_2 non esistono più sistemi subordinati, i quali, nei riguardi di Σ_2 e della serie lineare da essi staccata su C, si trovino nella stessa condizione in cui trovasi Σ_2 rispetto a Σ_1, la serie $g_{n_2}^{r_2}$ risulta semplice (n. 17). Invero, ove tal serie fosse composta, i gruppi passanti per un punto generico P di C, passerebbero in conseguenza per qualche altro punto, distinto da P e dai punti base di Σ_2; e quindi il sistema delle curve di Σ_2 passanti per P, avrebbe la dimensione $r_3 = r_2 - 1$ e staccherebbe su C, fuori dei punti fissi, una serie d'ordine inferiore ad $n_2 - 1$.

L'imagine proiettiva delle $g_{n_2}^{r_2}$, nell'ipotesi considerata, è dunque una curva C' dello S_{r_2}, riferita birazionalmente a C. La curva C' è priva di punti multipli, perchè, se avesse un punto s-plo $P'(s>1)$, gl'iperpiani per P' staccherebbero su C', fuori di P', una $g_{n_2-s}^{r_2-1}$ e ad essi corrisponderebbero le curve di un sistema subordinato di Σ_2, segante su C una $g_{n_2-s}^{r_2-1}$, di ordine minore di $n_2 - 1$: contro il supposto.

Suppongasi ora che esista un qualche sistema lineare Σ_3, subordinato a Σ_2, che stacchi su C, fuori dei punti fissi, una $g_{n_3}^{r_3}$, con $r_3 = r_2 - 1$, $n_3 \leq n_2 - 2$.

Allora, se Σ_3 non contiene sistemi subordinati, che, nei suoi confronti, si comportino come Σ_3 rispetto a Σ_2, si conclude, come sopra, che la $g_{n_3}^{r_3}$ è semplice e che l'imagine proiettiva di $g_{n_3}^{r_3}$ è un modello di C, privo di punti multipli.

Il ragionamento può analogamente proseguirsi. Si arriverà ad un sistema Σ_t subordinato a Σ_{t-1} (e quindi a Σ_1), il quale stacchi su C, fuori dei punti fissi, una $g_{n_t}^{r_t}$ con $r_t = r_1 - t + 1 \geq 2$, per guisa che Σ_t non contenga alcun sistema subordinato, che stacchi su C una $g_{n_{t+1}}^{r_{t+1}}$, con $r_{t+1} = r_t - 1$ e $n_{t+1} < n_t - 1$? Se sì, la C, mediante $g_{n_t}^{r_t}$, si trasformerà birazionalmente in una curva dello S_{r_t}, priva di punti multipli.

Orbene, per provare che alla precedente domanda si deve rispondere affermativamente, si osservi che, qualora si possa spingere la successione $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$, fino all'indice i, senza trovare un sistema che convenga al caso, sarà:

$$r_i = r_1 - i + 1, \quad n_i \leq n_1 - 2(i-1).$$

Ora, ricordando che (n. 16) $r_i \leq n_i$, viene:

$$r_1 - i + 1 \leq n_1 - 2(i-1), \quad \text{donde:} \quad i \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

Ma qualora fosse $i = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ risulterebbe:

$$r_i = 2(n-1) \geq 2 \quad \text{ed} \quad n_i = r_i,$$

onde un sistema Σ_{i+1}, di dimensione $r_{i+1} = r_i - 1 \geq 1$ subordinato a Σ_i, non potrebbe staccare su C una serie d'ordine $n_{i+1} < n_i - 1$, perchè se no sarebbe $n_{i+1} < r_{i+1}$. Esiste dunque certamente un sistema Σ_t, con

$$t \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1, \quad \text{ed} \quad r_t \geq 2(n-1) \geq 2,$$

il quale soddisfa a tutte le condizioni poste nella domanda precedente. Si conclude col teorema:

Una curva algebrica irriducibile può sempre trasformarsi birazionalmente in una curva, di un conveniente spazio, priva di punti multipli (¹).

Proiettando genericamente, sopra un S_3 o sopra un piano, la curva iperspaziale cui siamo in tal modo pervenuti, si ottiene il corollario:

Una curva algebrica irriducibile può sempre trasformarsi birazionalmente in una curva dello spazio ordinario, priva di punti multipli, o in una curva piana dotata di soli punti doppi nodali.

Invero, se la curva Γ da proiettarsi appartiene allo S_r, basta scegliere il centro di proiezione, Ω, di dimensione $r-4$, in modo che non incontri la varietà V_3 delle ∞^2 corde di Γ. La proiezione Γ' di Γ, da Ω sopra uno spazio S_3, ω, sarà priva di punti multipli, perchè un punto multiplo di Γ', essendo Γ priva di punti multipli, non potrebbe provenire che da corde (o da tangenti) (²) di Γ appoggiate ad Ω; e per ipotesi di tali corde (o tangenti) non ne esistono.

Si scelga adesso un punto O dello spazio ω, che sia esterno alla sviluppabile delle tangenti di Γ', alla *rigata* delle trisecanti di Γ' (n. 18) e alla rigata delle corde che congiungono le coppie dei punti di contatto degli ∞^1 piani bitangenti di Γ' (³); allora, proiettando Γ' da O sopra un piano, si ottiene ivi una curva Γ'', birazionalmente equivalente a Γ' e

(¹) Per la bibliografia ved. il Cap. inerente alla composizione delle singolarità delle curve.

(²) Le tangenti, come posizioni limite di corde, appartengono alla V_3 delle corde di Γ.

(³) Effettivamente i piani bitangenti sono ∞^1, se no ogni tangente incontrerebbe tutte le altre, cioè le tangenti s'incontrerebbero a due a due, e, non potendo passar tutte per un punto, giacerebbero in un piano. E la curva Γ'' sarebbe piana.

a Γ, e dotata di soli punti doppi a tangenti distinte (*punti doppi nodali*). E difatti un punto P, multiplo per Γ'', non può che provenire da una retta uscente da O e appoggiata a Γ in più punti, distinti o coincidenti. Ma tali punti dovranno esser distinti, perchè per O non passa alcuna tangente; e non potranno esser che due, perchè per O non passa alcuna retta che sia trisecante (almeno) di Γ'. Dunque P sarà doppio: e le tangenti a Γ'' in P saranno distinte, se no O starebbe sopra una corda congiungente i punti di contatto d'un piano bitangente.

Osservazione — La proiezione di Γ da Ω in Γ', e la proiezione di Γ' da O in Γ'', equivalgono insieme alla proiezione di Γ in Γ'' dallo S_{r-3}, ΩO, che è poi un S_{r-3} generico di S_r.

23. **Rami di una curva algebrica.** — Sia C una curva algebrica irriducibile e Γ sia una curva, ad essa equivalente birazionalmente. Ad un punto generico (semplice) di C corrisponde allora un sol punto di Γ (e viceversa), ma lo stesso non può affermarsi di ogni punto di C o di Γ. Per es. se C è proiezione piana generica di Γ, vi sono punti doppi di C provenienti da *due* punti di Γ.

Ebbene, quel che importa di provare è che *le sole eccezioni alla biunivocità della corrispondenza fra le due curve C, Γ, birazionalmente equivalenti, posson provenire dai punti multipli.* In altri termini occorre provare che, quando fra due curve C, Γ intercede una corrispondenza birazionale, ad *un* punto semplice dell'una corrisponde sempre *un* punto (semplice o multiplo) dell'altra.

Perciò, suppongasi che le C, Γ, degli ordini rispettivi n, ν, appartengano agli spazi S_r, S_ρ, e si ricordi (n. 16) che alla g_ν^ρ delle sezioni iperpiane di Γ corrisponde su C una g_ν^ρ, priva di punti fissi. I gruppi di g_ν^ρ che passano per un punto P, *semplice* per C, formano, *comunque* sia scelto P, una serie lineare $g_\nu^{\rho-1}$, per la quale il punto P, almeno, è fisso (n. 16).

Suppongasi che i gruppi di $g_\nu^{\rho-1}$ abbiano soltanto $\nu - s$ punti variabili ($s \geq 1$). Allora alla $g_\nu^{\rho-1}$ considerata su C, corrisponde su Γ la serie staccata da una stella d'iperpiani, che ha un centro P' ben determinato; e poichè i gruppi della $g_\nu^{\rho-1}$ hanno meno di ν punti variabili, così P' sta su Γ, ed anzi è un punto s-plo di Γ, perchè un iperpiano generico per P' taglia Γ in $\nu - s$ punti variabili.

Dunque al punto semplice P di C corrisponde *un* determinato punto s-plo P' ($s \geq 1$) di Γ; e similmente, mutando le veci delle due curve.

Si aggiunga che, se $s > 1$, il punto P' *potrà* (*non dovrà* necessariamente) provenire da più punti di C; e ciò accadrà quando i gruppi di g_ν^ρ, che passano per P, passino in conseguenza per altri punti di C, *distinti* da P. Allora ognuno di questi avrà per omologo P'.

Ma potrebbe anche accadere che i gruppi di g_ν^ρ passanti per P, avessero $\nu - s < \nu - 1$ punti variabili, senza che tuttavia vi fossero punti fissi distinti da P. In tal caso si direbbe che i gruppi per P passano in conseguenza per altri $s-1$ punti infinitamente vicini a P. *Allora a P' corrisponderebbe il solo punto P, e tuttavia P' sarebbe s-plo* ($s > 1$).

Un esempio è fornito dalla proiezione piana Γ di una curva sghemba C, da un punto O situato sopra una tangente a C in un suo punto semplice P. Nel punto P', proiezione di P, Γ ha un punto doppio (una *cuspide*) cui corrisponde su C il solo punto P.

È chiaro che *il numero dei punti distinti omologhi di un punto s-plo, è minore ed eguale ad s*, perchè i gruppi di $g_\nu^{\rho-1}$, avendo $\nu - s$ punti variabili, non posson possedere più di s punti distinti fissi.

Corollario del teorema dimostrato è il seguente:

Una corrispondenza birazionale fra due curve algebriche prive di punti multipli, è biunivoca senza eccezioni.

Ciò posto, suppongasi la curva irriducibile C dotata di punti multipli qualunque, e sieno Γ, Γ' due suoi modelli proiettivi privi di punti multipli (n. 22). Sia inoltre O un punto s-plo di C. Per quanto precede, ad O non potrà che corrispondere lo stesso numero di punti su Γ, Γ', giacchè la corrispondenza che nasce fra Γ, Γ', assumendo omologhi due punti corrispondenti al medesimo di C, è biunivoca senza eccezioni.

Sieno $O_1, O_2, ..., O_t$; $O_1', O_2', ..., O_t'$ ($t \leq s$) gli omologhi di O su Γ, Γ' rispettivamente. La corrispondenza fra Γ, Γ' associerà p. es. O_1, O_1'; O_2, O_2'; ...; O_t, O_t'. All'insieme dei punti di Γ appartenenti all'*intorno* di O_1 [1], attesa l'algebricità e quindi

[1] *L'intorno di un punto* di una curva piana, sghemba o iperspaziale, potrà definirsi p. es. come l'insieme dei punti la cui distanza (euclidea) da quello non supera in modulo un dato numero positivo.

la continuità della corrispondenza fra Γ, C, corrisponde su C un certo intorno di O, il quale può pure considerarsi come omologo di un intorno di conveniente ampiezza del punto O_1' di Γ'. Ebbene, l'insieme dei punti di C, situati vicino ad O e così definito, chiamasi un *ramo* o *ciclo di origine* O [1].

Per O si avranno tanti rami quanti sono i punti $O_1, O_2,..., O_t$ od $O_1', O_2',..., O_t'$. Dunque:

Un punto s-plo è origine di s rami al più.

In particolare:

Un punto semplice è origine di un sol ramo.

Se ora C si muta birazionalmente in una curva C' e il punto O di C nei punti $O', O'',...$, di C', la curva C' risulterà riferita a Γ, e all'intorno di uno dei punti $O_1, O_2,..., O_t$ di Γ, corrisponderà su C' un certo intorno di uno dei punti $O', O'',...$ cioè un ramo di C', che sarà il trasformato di uno dei rami di C aventi l'origine O. Pertanto:

La nozione di ramo è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della curva.

Quando si trasforma birazionalmente la C in una curva Γ tale che al punto s-plo di C corrispondano punti tutti semplici di Γ, si dice che *si è sciolta* o *risoluta la singolarità* O. Altra cosa è sciogliere la singolarità O, altra cosa trasformare la C in una curva in cui ai t rami di C, che avevano la medesima origine, corrispondano t rami aventi origini distinte, le quali potranno ancora esser punti multipli della curva trasformata, ma punti multipli origini di un sol ramo (un esempio è offerto dalla cuspide, sopra considerata).

Le considerazioni precedenti ci mostrano che *per interpretare giustamente le proprietà appartenenti alla geometria sull'ente, esse vanno riferite ad un modello proiettivo privo di punti multipli. I punti multipli devono cioè considerarsi come mere accidentalità proiettive. Quel che è birazionalmente invariante è il ramo, non il punto: in quanto punti distinti posson trasformarsi in punti coincidenti, ma sempre rami distinti mutansi in rami distinti.*

Così, per sapere come si comporta il punto s-plo O nei riguardi dei gruppi di una g_m^k data su C (questione che lasciammo in sospeso al n. 16), occorre considerare la g_m^k omologa sul modello Γ. Il gruppo dei t punti semplici $O_1, O_2,..., O_t$ può

[1] Per la bibliografia ved. il Cap. sulle singolarità delle curve.

presentare una sola condizione ai gruppi di g_m^k, nel senso che ogni gruppo per uno di quei punti passi pei rimanenti; oppure può darsi che $O_1, O_2,..., O_t$ si distribuiscano in $\tau \leq t$ gruppi di punti, presentanti ciascuno una condizione ai gruppi di g_m^k (se $\tau = t$, i punti $O_1, O_2,..., O_t$ presentano t condizioni distinte). Corrispondentemente O sarà fisso per una sola g_m^{k-1} subordinata alla g_m^k data su C, oppure sarà fisso per $\tau \leq t$ serie g_m^{k-1} distinte.

24. Rappresentazione analitica di un ramo. — Sia anzitutto una curva algebrica piana Γ, di equazione cartesiana

$$f(t,\ u) = 0, \tag{1}$$

e sia O un suo punto semplice. Cambiando gli assi coordinati, si può ottenere che O divenga l'origine $t = u = 0$ [1], che l'asse $t = 0$ (asse delle u) non coincida colla tangente in O a Γ, anzi che tagli la curva, la quale sia d'ordine n, in n punti distinti e tutti al finito (n. 15, Oss.). Allora l'equazione $f(0, u) = 0$, è di grado n ed ha n radici distinte (finite).

Distendiamo la variabile complessa t in un piano (che si dirà brevemente il piano t), alla maniera di Argand e Gauss, e segnamo nel piano t il punto $t = 0$. Similmente distendiamo i valori di u in un altro piano (che si dirà il piano u) ed in esso segnamo il punto $u = 0$.

L'equazione (1) pone fra i piani t, u una corrispondenza, tale che ad ogni punto t corrispondono n punti u, distinti o coincidenti, al finito o all'infinito. Al punto $t = 0$ corrispondono n punti propri distinti, fra cui $u = 0$.

Segnamo infine sul piano t i *punti critici* della funzione implicita u, della t, definita dalla (1); cioè quei valori di t ai quali corrispondono due o più valori di u coincidenti. Se, come supponiamo, la curva Γ non contiene parti multiple, i punti critici sono in numero finito e corrispondono a quei valori di t per cui la curva Γ ha un punto multiplo o una tangente parallela all'asse u; cioè a quei valori di t, in corrispondenza ai quali le due equazioni in u:

$$f(t,\ u) = 0, \quad f_u'(t,\ u) = 0$$

[1] Se O fosse un punto all'infinito di Γ, converrebbe far precedere una trasformazione omografica, che mutasse O in un punto proprio.

hanno qualche radice comune. Segnamo inoltre sul piano t i punti cui corrisponde qualche valore infinito di u (i *poli* della funzione u); anche questi punti sono in numero finito, essendo essi le radici del polinomio in t, che costituisce il coefficiente di u^n, quando la (1) si ordina rispetto ad u.

Tanto i punti critici che i poli, sono, per le nostre ipotesi, distinti da $t=0$. Cosicchè si può tracciare sul piano t un cerchio A, di centro $t=0$, che lasci fuori tutti quei punti singolari.

Sieno

$$u_0=0, \quad u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \tag{2}$$

gli n valori di u corrispondenti a $t=0$. Mentre un punto muovesi dentro al cerchio A, gli n punti u omologhi muovonsi sul piano u, descrivendo n aree, $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, che comprendono rispettivamente i valori (2). Se il cerchio A impiccolisce, impiccoliscono, a cagione della continuità della funzione u di t, le aree suddette; e quando A riducasi al punto $t=0$, le aree riduconsi rispettivamente ai punti (2). Si può pertanto scegliere A così piccolo, che le aree

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ldots, \ A_{n-1}$$

siano esterne l'una all'altra, cosicchè, in tali condizioni, havvi corrispondenza *biunivoca* fra i punti di A e quelli di ogni area $A_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$.

Consideriamo ora quella determinazione di u che per $t=0$ diviene $u_0=0$; cioè consideriamo la corrispondenza fra A ed A_0. Siffatta corrispondenza definisce una funzione $u(t)$, univoca, finita e continua nel campo A. Tale funzione soddisfa alle condizioni che caratterizzano una *funzione analitica* (*monogena*) di t [1].

Invero, se nella (1) al posto di u si pone la funzione così definita, cosicchè la (1) diviene una identità, e si osserva che la funzione f possiede le derivate rispetto a t, u, e che $\frac{\partial f}{\partial u}$ è sempre diversa da zero nel cerchio A, dal teorema delle fun-

[1] Ved. p. es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, 1901) § 2; oppure PINCHERLE, *Elementi della teoria delle funzioni analitiche* (Bologna, Zanichelli, 1922), Parte 1ª, pag. 31.

zioni implicite si trae che esiste la $\frac{du}{dt}$ e ch'essa è fornita da:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{f_t'}{f_u'}.$$

Quest'espressione di $\frac{du}{dt}$, razionale in t, u, ci prova che tale derivata è una funzione continua, che ha un valore indipendente dalla direzione secondo cui vien calcolata, sempreché ci si muova entro A. Pertanto $u(t)$ è una funzione analitica (monogena) di t. Si può perciò sviluppare $u(t)$ colla serie di TAYLOR-CAUCHY e si otterrà una serie di potenze della forma

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots, \tag{3}$$

convergente in tutto il cerchio A [1].

Per ogni dato t in A, il valore di u, calcolato mediante la (3), fornisce, insieme a t, una coppia (t, u) soddisfacente alla (1); cioè un punto di Γ, che trovasi nell'intorno di O. Ed ogni punto siffatto può ottenersi così. La totalità di questi punti costituisce perciò il *ramo* di origine O [2].

Premesso questo, nei riguardi di un punto semplice di una curva piana, consideriamo ora una curva algebrica irriducibile C, appartenente allo $S_r (r \geq 2)$, e fissiamo l'attenzione sopra un punto s-plo P di C. Si può, in primo luogo, trasformare birazionalmente C, in una curva C' di S_3, priva di punti multipli. Allora a P verrà a corrispondere un certo gruppo H di un numero finito di punti. Assumendo un punto generico M dello spazio come centro di proiezione (questo punto deve esser assunto in modo da evitar che si trovi sopra le rette che congiungono a due a due i punti di H o sopra le tangenti a C' nei punti di H), si otterrà, come proiezione di C', una curva piana Γ, birazionalmente equivalente a C' e a C, e tale che al punto P di C corrispondono su Γ punti semplici.

[1] BIANCHI, loc. cit. § 43; PINCHERLE, loc. cit., pag. 107.

[2] Allorquando studieremo le funzioni algebriche come funzioni analitiche, vedremo come si possa estendere il ramo in corrispondenza a tutto il cerchio di convergenza della (3).

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_r$ le coordinate non omogenee di un punto di S_r e suppongasi di aver assoggettato C, se occorre, ad una preventiva trasformazione omografica, in modo che il punto P sia al finito ed abbia quindi le coordinate finite $b_{01}, b_{02}, \ldots, b_{0r}$. Diciamo inoltre

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(t, u), \quad x_2 = \varphi_2(t, u), \ldots, \quad x_r = \varphi_r(t, u)$$

le formule che rappresentano la corrispondenza birazionale fra C, Γ; per la Γ conserviamo tutte le precedenti notazioni, intendendo che O sia uno dei punti semplici di Γ omologhi di P.

Poichè le funzioni razionali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, per $t = u = 0$, assumono i valori finiti $b_{01}, b_{02}, \ldots, b_{0r}$, si può determinare un intorno del punto O tale che ad ogni punto di quell'intorno corrispondan valori finiti delle φ. Sicchè, sostituendo eventualmente al cerchio A un cerchio concentrico più piccolo A', si può ottenere che le φ sieno entro A' funzioni analitiche finite (*regolari* o *olomorfe*, come si dice) di t; e però sviluppabili in serie di potenze del tipo

$$x_i = b_{0i} + b_{1i}t + b_{2i}t^2 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

convergenti in A'. Queste serie s'ottengon sostituendo nelle (4), al posto di u, la serie (3), ed eseguendo le operazioni razionali indicate dalle φ. Esse rappresentano il ramo di C omologo del ramo di Γ avente l'origine in O; cioè uno dei rami di origine P.

Qualora si usassero invece coordinate omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$, cosicchè il punto P (al finito o all'infinito) avrebbe come coordinate certi $r+1$ numeri, $b_{00}, b_{01}, \ldots, b_{0r}$, finiti e non tutti nulli, al posto delle (4) si dovrebbero scrivere le:

$$(4') \qquad \rho x_i = \psi_i(t, u) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

le ψ essendo polinomi, e mercè la (3), avremmo:

$$\rho x_i = b_{0i} + b_{1i}t + b_{2i}t^2 + \ldots \qquad (i = 0, 1, \ldots, r).$$

Si conclude che:

Le coordinate, omogenee o non omogenee, dei punti di un ramo, si esprimono come serie di potenze di un parametro t, convergenti entro un medesimo cerchio, di centro $t = 0$. I punti del ramo si ottengono in corrispondenza ai valori di t interni al cerchio.

OSSERVAZIONE. — Si avvertirà che, essendo t funzione razionale di $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, la corrispondenza fra i punti del ramo ed i punti del cerchio è biunivoca (senza eccezioni). Il che è necessario, perchè possano escludersi eventuali singolarità parametriche, legate soltanto ad accidentalità della rappresentazione analitica.

25. Caratteri proiettivi di un ramo. — Pel seguito e per la loro importanza in sè, occorre che studiamo taluni caratteri di un ramo, che non si alterano di fronte alle trasformazioni omografiche, ma che posson variare con trasformazioni birazionali.

Definiamo anzitutto la *molteplicità d'intersezione di un ramo γ con una forma algebrica passante per la sua origine.*

Il ramo γ appartenga allo S_r $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ e non ad uno spazio inferiore e la sua origine O abbia le coordinate $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Esso sia rappresentato dalle serie di potenze, convergenti in un medesimo cerchio A:

$$(5) \qquad x_i = a_i + b_i t^\alpha + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

ove α è un intero ≥ 1; le b son costanti non tutte nulle.

Sia una forma (ipersuperficie) algebrica f dello S_r, rappresentata dall'equazione

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0,$$

ed essa passi per l'origine O.

Le (5), sostituite nel polinomio f, dànno luogo ad una serie di potenze, che, ordinata rispetto a t, comincierà con un termine contenente t ad un certo esponente $I \geq \alpha$. Ebbene, questo esponente minimo si chiamerà appunto *molteplicità d'intersezione* di γ colla forma f, nella origine O. Questa locuzione è giustificata da ciò:

Una forma $\bar{f}$ abbastanza vicina ad f taglia il ramo precisamente in I punti distinti, i quali, col tendere di $\bar{f}$ ad f, tendono all'origine O del ramo.

Consideriamo infatti un fascio $f + \lambda\varphi = 0$ di forme, che contenga la f; ove φ sia un'arbitraria forma algebrica non passante per O [1]. Allora si ha:

$$f + \lambda\varphi = p(t) + \lambda q(t) = \Phi(t, \lambda).$$

[1] Se si opera in coordinate omogenee, occorre supporre che φ sia dello stesso ordine di f.

L'equazione (analitica):

$$\Phi(t, \lambda) = 0, \tag{7}$$

per $\lambda = 0$ ha la radice $t = 0$, I-pla (cioè $\Phi(t, 0)$ è infinitesimo d'ordine I, rispetto a t), e per λ diverso da zero non ha alcuna radice nulla, perchè f è l'unica forma del fascio $f + \lambda\varphi = 0$, che passa per O. Un teorema classico della teoria delle funzioni analitiche, ci assicura che l'equazione (7), per λ abbastanza prossimo a zero (di modulo sufficientemente piccolo), possiede I radici distinte, interne al circolo A, e che, col tendere di λ a zero, tendono a zero [1]. Questo teorema equivale evidentemente a quanto abbiamo sopra enunciato. Resta così determinato un netto significato geometrico pel concetto di molteplicità d'intersezione.

La *molteplicità d'intersezione di una forma f, con una curva C, in un punto O di questa*, si definisce come la somma delle molteplicità d'intersezione della forma f coi singoli rami di C uscenti da O ed è dunque *il numero dei punti distinti, prossimi ad O, in cui la curva è tagliata da una forma abbastanza prossima ad f.*

Si osserverà che, perchè questa nozione abbia senso, non occorre affatto supporre la irriducibilità di C.

Siamo ora in grado di completare il teorema di Bézout per le curve iperspaziali, giacchè possiamo provare che, contando, nel modo sopra indicato, ogni punto comune alla curva C, d'ordine n, e ad una forma f, d'ordine m, qualunque sia la forma, purchè non contenga infiniti punti di C, il numero complessivo delle intersezioni risulta sempre nm; tante quante se ne ottengono, fra di loro distinte, in corrispondenza ad una forma generica (n. 15, Osservazione), se la curva C è irriducibile, o, più generalmente, priva di componenti multiple.

Evidentemente basterà considerare il caso di una C irriducibile. Atteso il significato geometrico della molteplicità d'intersezione di f e di C, in un loro punto comune, una forma algebrica φ vicinissima ad f (e perciò dello stesso ordine m), avrà con C complessivamente lo stesso numero di intersezioni, che f aveva con C; purchè beninteso ogni intersezione si conti colla molteplicità sopra definita. In altre parole: una variazione continua della forma f non altera il

[1] Cfr. BIANCHI, loc. cit. § 73; PINCHERLE, loc. cit. p. 213.

numero complessivo delle intersezioni, purchè la forma non venga a contenere C. Ma poichè con una variazione continua la f può portarsi in una posizione generica, e per una tal posizione già s'è osservato (n. 15) che le intersezioni sono mn, distinte, si conclude che:

Il numero complessivo delle intersezioni di una forma f, d'ordine m, con una curva d'ordine n, irriducibile o no, che non sia contenuta nè tutta nè in parte nella forma, è eguale al prodotto mn, purchè ogni intersezione si valuti nel modo sopra precisato, colla debita molteplicità. Quando f è generica, se la curva è priva di parti multiple, le intersezioni sono precisamente mn distinte fra loro.

Nell'ultima parte dell'enunciato si è ammesso che la curva C non abbia componenti multiple; se ne avesse, è ben chiaro che la somma delle molteplicità d'intersezione nei singoli punti comuni ad f e a C, sarebbe ancora mn; ma taluni di questi punti (quelli variabili sulle componenti multiple) rimarrebbero sempre coincidenti, comunque variasse f.

Consideriamo ora, in modo particolare, il caso in cui la forma f è del 1° ordine; cioè un iperpiano.

Trattandosi di un iperpiano passante pel punto $O(a_1, a_2, ..., a_r)$, la sua equazione sarà:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x_i - a_i) = 0, \tag{8}$$

onde, mercè le (5), si ottiene:

$$t^\alpha \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i + ... = 0, \tag{9}$$

Dal che si conclude che per un iperpiano generico per O la molteplicità d'intersezione è α. Fanno eccezione gli iperpiani corrispondenti a coefficienti λ, che soddisfano alla condizione:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = 0, \tag{10}$$

cioè gl'iperpiani passanti per la retta:

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{x - a_2}{b_2} = ... = \frac{x - a_r}{b_r},$$

che chiamasi ***tangente al ramo in O.***

I valori delle λ soddisfacenti alla (10) posson annullare taluni dei coefficienti di potenze successive di t, nella (9);

non tutti, perchè se no il ramo γ coinciderebbe colla propria tangente e non sarebbe S_r il suo spazio di appartenenza. Sia $t^{\alpha+\alpha_1}\Sigma\lambda_i c_i$ il primo termine non nullo.

Un iperpiano generico per la tangente ha allora la molteplicità d'intersezione $\alpha+\alpha_1$ con γ in O. Fanno eccezione gl'iperpiani i cui coefficienti λ soddisfanno alla (10) e alla condizione:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i = 0,$$

cioè gl'iperpiani passanti pel piano:

$$\begin{Vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \dots x_r - a_r \\ b_1 & b_2 \quad \dots\dots \quad b_r \\ c_1 & c_2 \quad \dots\dots \quad c_r \end{Vmatrix} = 0, \ (^1)$$

che chiamasi il *piano osculatore al ramo nell'origine O.*

Similmente: un iperpiano generico pel piano osculatore ha molteplicità d'intersezione $\alpha+\alpha_1+\alpha_2$ e fanno eccezione gl'iperpiani passanti per *lo S_3 osculatore al ramo nell'origine O*; che è rappresentato da:

$$\begin{Vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \dots x_r - a_r \\ b_1 & b_2 \quad \dots\dots \quad b_r \\ c_1 & c_2 \quad \dots\dots \quad c_r \\ d_1 & d_2 \quad \dots\dots \quad d_r \end{Vmatrix} = 0;$$

ove $t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}\Sigma\lambda_i d_i$ è il primo termine non nullo dello sviluppo (9), dopo che le λ si son legate colle condizioni (10), (11). E così proseguendo, finchè si giunge all'*iperpiano osculatore.*

I numeri $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$, che si vengon così a definire geometricamente, con manifesto carattere proiettivo, diconsi rispettivamente l'*ordine*, il *primo rango*, il *secondo rango*,..., l'*ultimo rango* o *classe* del ramo. E si conclude:

Per un ramo γ, appartenente allo S_r e di origine O, son definiti r caratteri proiettivi: α, ordine; α_1, primo rango; α_2, secondo rango; ...; α_{r-1}, ultimo rango o classe. L'ordine α denota la molteplicità d'intersezione di γ con un iperpiano passante per O, ma non per la tangente al ramo; la somma

(1) Con questa notazione s'intende, secondo l'uso, l'insieme delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero i determinanti d'ordine massimo estratti dalla matrice rettangolare.

$\alpha+\alpha_1$ denota la molteplicità d'intersezione di γ con un iperpiano passante per la tangente, ma non pel piano osculatore al ramo; ...; $\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_{r-1}$ denota la molteplicità d'intersezione con l'iperpiano osculatore al ramo (1).

Tale risultato, come i successivi di questo numero, in cui non interviene esplicitamente l'algebricità, *valgono anche per rami di curve analitiche*, cioè per rami le coordinate dei cui punti sieno date parametricamente mediante r arbitrarie serie di potenze di t, convergenti nello stesso cerchio. E invero, si tratta di deduzioni poggiate soltanto sull'esistenza di una siffatta rappresentazione, indipendentemente dal fatto che l'insieme di punti considerato appartenga ad una curva algebrica.

Si verifica agevolmente che *lo S_k osculatore è il limite dello S_k che congiunge lo S_{k-1} osculatore con un punto M del ramo che si avvicini indefinitamente all'origine.*

Sia p. es. $k=3$ e le coordinate di M sieno date dalle (5). Allora gl'iperpiani passanti pel piano osculatore a γ in O e pel punto M, corrispondono a valori delle λ soddisfacenti alle (8), (10), (11), la prima delle quali, tenuto conto delle ultime due, e soppresso il fattore $t^{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}$, col tendere di t a zero, ha per limite la condizione $\Sigma\lambda_i d_i = 0$; ciò che equivale alla nostra affermazione.

CAYLEY ha chiamato *rami lineari* quelli del primo ordine; *superlineari* gli altri. *Rami ordinari* si chiameranno quelli per cui tutte le α sono 1.

Ogni punto semplice di una curva è origine di un sol ramo lineare. La molteplicità s di un punto s-plo è la somma degli ordini dei rami della curva di cui quel punto è origine, appunto perchè s è la molteplicità d'intersezione della curva con un iperpiano generico pel punto s-plo.

I rami di cui il punto è origine sono tutti lineari, soltanto nel caso che sieno in numero di s. Se sono in numero minore, uno almeno è superlineare.

Un punto s-plo può anche esser origine di un ramo solo, d'ordine s.

Per es. nei riguardi dei *punti doppi*, dal punto di vista dei rami, si hanno due possibilità: o il punto doppio è origine di due rami lineari o è origine di un ramo di 2° ordine. Nel primo caso si ha un punto che appartiene alla categoria dei

(1) Per la bibliografia ved. il Cap. relativo alle singolarità delle curve.

nodi (nodo ordinario o semplicemente nodo, tacnodo, oscnodo, ecc.); nel secondo un punto che appartiene alla categoria delle cuspidi (di 1ª, 2ª, 3ª,... specie). Un nodo si ha quando si proiettano su di un piano due punti (semplici) di una curva sghemba, allineati col centro di proiezione; una cuspide quando si proietta il punto (semplice) di contatto di una tangente passante pel centro di proiezione. Nel seguito la natura dei punti doppi verrà approfondita dal punto di vista delle singolarità infinitamente vicine.

Un punto semplice, di una curva C, origine di un ramo ordinario (tutte le α eguali ad 1), dicesi un *punto semplice ordinario*. In un tal punto, O, la tangente contiene due punti infinitamente vicini della curva (cioè un S_{r-1} generico per la tangente ha colla C molteplicità d'intersezione 2 in O); il piano osculatore ha un incontro tripunto (cioè un generico S_{r-1} per esso ha molteplicità d'intersezione 3);...; lo S_{r-1} osculatore ha un incontro r-punto.

Un punto generico O della curva C (priva di punti multiple) è un punto semplice ordinario.

Questa è una conseguenza immediata di una proprietà delle curve analitiche di S_r, che si stabilisce, nelle applicazioni geometriche dell'Analisi infinitesimale, come ovvia estensione del caso particolare in cui $r=2$ o $r=3$. Si sa cioè che il punto generico di una curva analitica piana non può essere un flesso (ossia un punto colla tangente in esso a incontro almeno tripunto), senza che la curva sia una retta; che il punto generico di una curva analitica dello spazio non può esser tale che il piano osculatore in esso abbia incontro almeno quadripunto colla curva, senza che la curva sia piana. E in generale si ha che l'iperpiano osculatore nel punto generico di una curva analitica dello S_r non può avere incontro $(r+1)$-punto (almeno) colla curva, senza che la curva stessa appartenga ad uno spazio lineare inferiore. Ne deriva che nel punto generico tutte le α sono uguali ad 1, altrimenti la molteplicità d'intersezione dell'iperpiano osculatore sarebbe $>r$.

Similmente, senza incontrare alcuna difficoltà concettuale, si estendono allo S_r proprietà differenziali notissime delle curve analitiche piane e sghembe. Così, per una curva piana, si sa che la intersezione di una tangente generica colla tangente infinitamente vicina, è il punto di contatto della prima; per una curva sghemba, che la intersezione di un piano osculatore generico col piano osculatore infinitamente vicino, è la tangente nel punto di osculazione del primo; il punto comune ai due piani considerati e ad un ulteriore piano osculatore ad essi successivo, è il punto ove il primo piano oscula la curva. In generale si ha che, dato un generico punto P della curva analitica C, appartenente allo S_r, e indicata con t_1 la tangente, con t_2 il piano osculatore,..., con t_{r-1} l'iperpiano osculatore in P a C, l'intersezione di t_{r-1} coll'iperpiano osculatore successivo è t_{r-2}; di t_{r-2} con un ulteriore iperpiano osculatore successivo è $t_{r-3}, \ldots$, finchè si arriva a definire P come intersezione di r iperpiani osculatori infinitamente vicini.

Da ciò discende subito che *l'ente duale di una curva come luogo di punti, è l'inviluppo degli iperpiani osculatori ad una curva; l'ente duale della rigata delle tangenti, la varietà degli S_{r-2} osculatori*; ecc.

Ne discende pure che l'iperpiano osculatore nel punto generico di una curva analitica C (priva di parti multiple), non oscula altrove la curva. Chè, se accadesse il contrario, dualizzando, si avrebbe una curva che possiederebbe due iperpiani osculatori distinti in un suo punto generico: cosa assurda.

Poichè, mediante proiezione generica della C in una curva C' di uno spazio subordinato S_{k+1}, lo S_i osculatore in un punto generico di C $(i=1, 2, \ldots, k)$, mutasi nello S_i osculatore nel punto corrispondente di C', così la proprietà precedente si trasporta agli S_k osculatori, nel senso cioè che *lo S_k osculatore $(k \leq r-1)$ nel punto generico di una curva C di S_r (priva di parti multiple) non oscula altrove la curva.*

E da ciò, per le curve algebriche, si trae:

L'insieme degli S_k osculatori di una curva irriducibile C dello S_r $(k \leq r-1)$ è un ente algebrico ∞^1 birazionalmente equivalente alla curva.

La varietà V_{k+1}, a $k+1$ dimensioni come luogo di punti, riempita dagli S_k osculatori, chiamasi *varietà osculatrice* (di dimensione $k+1$) della curva C.

Osservazione 1ª. — *I caratteri proiettivi di un ramo possono interpretarsi come segue, dal punto di vista della geometria sull'ente.*

La curva irriducibile C, dello S_r, sia d'ordine n. Consideriamo il ramo (od uno dei rami) γ che ha per origine un punto O, semplice o multiplo, di C, ed esso abbia i caratteri $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$. Sia inoltre M un punto di C che si avvicini ad O, sul ramo γ. Allora i gruppi della g_n^r delle sezioni iperpiane di C, che passano per M, formano (n.i 16, 23) una g_n^{r-1} che ha il punto M, almeno, come fisso.

Ma se M è abbastanza vicino ad O, ognuno di quei gruppi ha altri $\alpha - 1$ punti su γ, i quali, col tendere di M ad O, tendono ad O. In altre parole: I gruppi della g_n^{r-1} staccata dagli iperpiani uscenti da O hanno α punti coincidenti *sul ramo* γ. Il punto O, *come origine del ramo* γ, è α-plo per ∞^{r-1} gruppi della serie. Naturalmente, se O è origine di un altro ramo γ', di ordine α', il punto O, *come origine del ramo* γ', sarà α'-plo per i medesimi ∞^{r-1} gruppi della serie. Insomma qui, trattandosi di una proprietà di geometria sull'ente, il punto O andrà considerato come la sovrapposizione di tanti punti distinti, quanti sono i rami di cui esso è origine (n. 23).

Procediamo oltre, considerando gli ∞^{r-2} gruppi della g_n^{r-1} staccata dagl'iperpiani per O, che passano per M. Al limite si ha similmente che pei gruppi della g_n^{r-2} staccata dagli iperpiani per la tangente a γ, il punto O, come origine di γ, è $(\alpha + \alpha_1)$-plo. E così proseguendo.

Viceversa: se, data una serie (semplice) g_n^r, priva di punti fissi, sopra un modello proiettivo C', privo di punti multipli, il punto O' di C' è α-plo per ∞^{r-1} gruppi della serie (cioè se i gruppi della g_n^r che passano per O' hanno soltanto $n - \alpha$ punti variabili), $(\alpha + \alpha_1)$-plo per ∞^{r-2} gruppi (cioè se i gruppi della g_n^r che passano per O' e per un punto M' di C', che si avvicini ad O', al limite formano una g_n^{r-2} i cui gruppi hanno soltanto $n - \alpha - \alpha_1$ punti variabili); $(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2)$-plo per ∞^{r-3} gruppi;...; $(\alpha + \alpha_1 + ... + \alpha_{r-1})$-plo per *un* gruppo; allora l'imagine proiettiva della g_n^r è una curva C, d'ordine n, dello S_r, per la quale il punto O, omologo di O', è origine di un ramo di caratteri $(\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{r-1})$.

Se la g_n^r è composta con un'involuzione γ_μ^1, si perviene, con qualche avvertenza complementare, ad una conclusione analoga nei riguardi della curva C (birazionalmente equivalente alla γ_μ^1) imagine della g_n^r. E cioè un punto O di C, origine di un ramo di ordine α, proverrà da μ punti di C', coniugati nella γ_μ^1, e α-pli pei medesimi ∞^{r-1} gruppi di g_n^r; ecc. ecc.

OSSERVAZIONE 2ª. — *Il concetto di molteplicità d'intersezione* di un ramo γ, con una forma F_0, di ordine m, nell'origine O del ramo, *può anche stabilirsi a prescindere dalla rappresentazione analitica del ramo, muovendo invece dalla definizione sintetica del n. 23.*

Il ramo γ appartenga alla curva irriducibile C, d'ordine n, dello S_r, e sia g_{nm}^d la serie lineare staccata su C da tutte le forme d'ordine m di S_r. Il gruppo generico di g_{nm}^d consta di nm punti distinti (e semplici) (n. 15, Oss.). Quando la forma generica d'ordine m, F, tende ad F_0, alcuni degli nm punti in cui F sega C, e sieno p. es. I, tendono ad O *sul ramo* γ; e questo numero I è il medesimo, comunque F tenda al limite F_0; onde esso può definirsi come molteplicità d'intersezione di F_0 con γ in O.

Invero, se C' è una trasformata birazionale piana di C, tale che al punto O di C corrispondano su C' punti tutti semplici, tra cui il punto O', origine del ramo γ' omologo di γ, la serie corrispondente a g_{nm}^d sarà segata su C' da un certo sistema lineare ∞^d di curve. Detta φ la curva generica di questo sistema e φ_0 la curva che stacca su C' il gruppo omologo a quello segato su C da F_0, il numero I rappresenterà l'eccesso della molteplicità d'intersezione di φ_0 con C' in O', sulla molteplicità d'intersezione di φ con C' nello stesso punto (1), per guisa che, quando il gruppo segato da φ tende comunque al gruppo segato da φ_0 (cioè φ tende a φ_0), I punti di quello tendono ad O'.

26. Proiezioni di un ramo. — Sia il ramo γ di origine O e di caratteri $(\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{r-1})$, appartenente allo S_r.

Preso un punto generico P, come centro di proiezione, il ramo da P si proietta biunivocamente (n. 18) sopra un iperpiano π, in un insieme γ' di punti, che soddisfa evidentemente alla definizione analitica di ramo (n. 24). Sia O' l'origine del ramo γ'.

Un S_{r-2} di π, abbastanza prossimo a passare per O', sega γ' in α punti, che son le proiezioni di quelli ove γ è segato dall'iperpiano che proietta da P lo S_{r-2} considerato. Onde γ' è di ordine α. Fanno eccezione gli S_{r-2} che son prossimi a contenere, oltre al punto O', la retta proiezione da P della tangente al ramo γ; essi incontrano generalmente γ' in $\alpha + \alpha_1$ punti. Quella retta è dunque la tangente al ramo γ' e α_1 è il primo rango di γ'. Ecc. ecc. Si conclude che:

(1) Si ricordi che il concetto di molteplicità d'intersezione di due curve piane in un punto, si stabilisce con mezzi algebrici elementari (ved. la citazione a pag. 11).

Un ramo di caratteri $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ *si proietta genericamente da un punto in un ramo di caratteri* $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-2})$.

Se invece P giace sull'iperpiano osculatore a γ in O, ma tuttavia la proiezione è ancora biunivoca, si vede similmente che il ramo γ' ha i caratteri $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-3}, \alpha_{r-2} + \alpha_{r-1})$. In generale:

Se un ramo di caratteri $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ *si proietta biunivocamente da un punto P, situato sullo* S_k *osculatore nell'origine* $(k \leq r-1)$, *ma non sugli spazi osculatori inferiori, il ramo proiezione ha i caratteri* $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1} + \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots)$.

Cumulando le proiezioni da punti, si constata come si trasforma il ramo per proiezione da un S_{r-h-1} sopra un S_h: il che del resto si può anche vedere direttamente [1].

Si capisce come, mediante proiezioni convenienti, un ramo con dati caratteri possa ottenersi da un ramo lineare ordinario di uno spazio superiore. Non c'indugiamo su ciò, trattandosi di argomento di geometria proiettiva iperspaziale, che non ha attinenza diretta col nostro studio [2].

[1] Per più ampli dettagli in proposito, ved. BERTINI, *Iperspazi*, p. 452.

[2] Di tale argomento si occupò VERONESE, *Behandlung* (citata a pag. 67) p. 201-202, e più diffusamente DEL PEZZO, Acc. Napoli Rend. 7_2 15 (1893).

CAPITOLO TERZO

Gruppi equivalenti. Serie lineari complete.

27. **Ordine di una funzione razionale di un punto variabile sopra una curva, in un punto dato.** — Abbiamo già osservato (n. 14) che una g^1_n, data sopra una curva irriducibile C, è l'insieme dei gruppi di livello costante di una determinata funzione razionale del punto variabile su C. Gli eventuali punti fissi della g^1_n son punti d'indeterminazione della funzione razionale, e come tali posson supporsi aggregati a tutti i gruppi di livello. Ma, poichè la loro considerazione non ha alcuna importanza per la nozione che vogliamo introdurre, supporremo addirittura la g^1_n priva di punti fissi, cosicchè, a norma del n. 15 (Oss.), un gruppo generico di g^1_n sarà costituito da n punti distinti e semplici per C. La curva si può inoltre supporre piana, e ciò senza introdurre una restrizione essenziale dal punto di vista della geometria sull'ente. La sua equazione sia:

$$f(x, y) = 0,$$

e l'espressione analitica della data funzione razionale sia:

$$\theta(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi'(x, y)}$$

ove φ, φ' son polinomii in x, y.

L'ordine n della g^1_n si chiama, con WEIERSTRASS, *grado* della θ (con KLEIN, *valenza*).

Perchè in un punto P (a, b) di C la θ sia nulla (od infinita) bisogna, ma non basta, che in quel punto si annulli φ (o risp. φ'). Il punto P, secondo quanto già dicemmo nel n. 23, dovrà esser considerato come la sovrapposizione di tanti punti distinti (semplici, in un conveniente modello proiettivo di C), quanti sono i rami di C, di cui esso è origine. Sia γ uno di questi, e limitiamoci a considerare P come punto di γ, avvertendo che le medesime riflessioni potrebbero farsi considerando P sugli altri rami.

Sieno i_1, i_2 le molteplicità d'intersezione (n. 25) del ramo γ colle curve $\varphi=0$, $\varphi'=0$ nell'origine P, e le

$$x = a + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$
$$y = b + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

rappresentino il ramo (talune delle costanti a, b posson esser nulle). Sostituite queste serie nei polinomi φ, φ' avremo:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi(x, y) &= t^{i_1}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots) \\ \varphi'(x, y) &= t^{i_2}(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots), \end{aligned}$$

ove le α, β sono costanti, talune eventualmente anche nulle; ma $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Risulterà pertanto:

$$(2) \qquad \theta(x, y) = t^{i_1 - i_2}(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots),$$

in cui $\gamma_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \neq 0$. Ne deriva che, se $i_1 > i_2$, la θ è infinitesima con t, d'ordine $i_1 - i_2$, o, come anche si dice, ha per $t=0$, cioè nel punto P del ramo γ, uno *zero d'ordine* $i_1 - i_2$. Se invece $i_1 < i_2$, la θ è infinita per $t=0$, d'ordine $i_2 - i_1$; cioè essa possiede nell'origine di γ, un *polo d'ordine* $i_2 - i_1$. Se infine $i_1 = i_2$, la funzione θ assume in P il valore finito e non nullo γ_0.

Chiamiamo *ordine della funzione razionale* θ *in un punto* P *di* C (in quanto P si considera come origine di un ramo determinato di C), il numero positivo r, quando θ ha in P uno zero d'ordine r; il numero negativo $-r$, quando θ ha in P un polo d'ordine r; il numero zero, se in P la θ non diventa nè nulla nè infinita. Si conclude allora col teorema seguente:

L'ordine di una funzione razionale $\theta = \varphi : \varphi'$ *di un punto variabile sopra una curva irriducibile* C, *in un dato punto* P *della curva, considerato come origine di un determinato ramo* γ, *è eguale alla differenza fra le molteplicità d'intersezione delle curve* $\varphi=0$, $\varphi'=0$ *col ramo* γ, *nell'origine* P.

La medesima conclusione varrebbe evidentemente anche se C fosse una curva sghemba o iperspaziale: soltanto allora i polinomi φ, φ', eguagliati a zero, rappresenterebbero due forme algebriche del rispettivo spazio. Nulla però ci sarebbe da mutare di essenziale nel ragionamento.

La conclusione stessa può pure riferirsi ad un punto all'infinito di C. Per un tal punto P_∞ uno dei due rapporti $y:x$ o $x:y$ delle coordinate, sarà certo finito (lo sono entrambi se la direzione P_∞ non è parallela ad alcuno degli assi coordinati). Sia p. es. finito ed eguale ad a_0 il rapporto $y:x$, cosicchè P_∞ non appartiene all'asse y. Si posson allora assumere come coordinate omogenee di un punto situato in un ramo γ, di cui P_∞ sia origine [1], i numeri $x_0 = y:x$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, e quindi (n. 24) il ramo γ sarà rappresentato da relazioni del tipo:

$$x_0 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0.$$

Sieno ora i_1, i_2 le molteplicità d'intersezione di $\varphi=0$, $\varphi'=0$ col ramo γ in P_∞. Trasformati i polinomi φ, φ' colla introduzione delle coordinate omogenee definite dalle $x = x_1 : x_2$, $y = x_0 : x_2$, e sostituiti poscia in essi i valori di x_0, x_1, x_2, che competono al punto variabile in γ, si ottengono per φ, φ' due espressioni come le (1), e, a partire da esse, si conclude come sopra.

Per la g_n^1 definita su C dall'eguagliare θ a una costante arbitraria, il gruppo degli zeri ed il gruppo dei poli di θ sono due particolari gruppi di livello (0 e ∞). Va da sè che ogni zero (o polo), nel rispettivo gruppo della g_n^1, va contato col proprio ordine. In altri termini *un punto in cui la* θ *abbia l'ordine* $\pm r (r > 0)$ *è un punto* r*-plo per la* g_n^1 (cioè per un suo gruppo).

Una trasformazione birazionale di C muta la funzione razionale θ in una funzione razionale Θ di un punto variabile sopra la curva trasformata (n. 14), per guisa che in due punti omologhi le θ, Θ hanno lo stesso valore. Di più un punto r-plo per la g_n^1 definita da θ si muta in un punto r-plo per la g_n^1 definita da Θ. Dunque:

L'ordine di una funzione razionale in un punto dato della curva, è invariante per trasformazioni birazionali.

[1] Il concetto di ramo, avendo carattere proiettivo, vale anche quando l'origine sia all'infinito. Per ottenere la rappresentazione analitica in questo caso, basta operare con una trasformazione omografica (o anche birazionale) che trasporti l'origine al finito (cfr. colla pag. 84).

È opportuno porre in rilievo che, *mentre* θ *definisce su* C *una ben determinata* g_n^1, *questa non individua* θ, *se non quando si sieno fissati tre gruppi distinti di* g_n^1, *in cui la funzione razionale debba assumere tre distinti livelli* (*p. es.* $0, 1, \infty$).

Invero, definire una funzione razionale θ, di cui la g_n^1 possa considerarsi come insieme dei gruppi di livello costante, equivale a fissare una determinata corrispondenza birazionale fra i gruppi della g_n^1 (ente razionale ∞^1) e i punti di una retta, ove si distendano i valori di θ. Ora noi sappiamo (Noz. introd. IV) che le sole corrispondenze birazionali fra due enti razionali ∞^1, sono le omografie; e d'altro canto il teorema fondamentale della geometria proiettiva c'insegna che un'omografia fra due rette è individuata quando siano assegnate tre coppie di punti corrispondenti.

Se p. es. la g_n^1 è definita mediante una data θ e si vuole la funzione razionale θ', capace di definire la stessa g_n^1, e che assuma i valori $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ nei gruppi ove θ assume i valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, basterà risolvere rispetto a θ' la relazione

$$(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\theta', \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$$

fra i birapporti

$$(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\theta', \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3).$$

In particolare, per $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2 = 1$, $\lambda'_3 = \infty$, la θ' richiesta si otterrà operando su θ con la sostituzione lineare fratta:

$$\theta' = 1 - \frac{(\theta - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\theta - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Così *si può ottenere ad es. che la funzione razionale, mediante cui si definisce la* g_n^1, *abbia i suoi poli (e se vuolsi anche i suoi zeri ed i suoi punti di un altro dato livello) in punti semplici e distinti della curva.*

In particolare:

Una funzione razionale è individuata a meno di un fattore moltiplicativo dai suoi poli e dai suoi zeri.

Osservazione. — Sieno θ, θ' due funzioni razionali del punto di C. Tenendo conto dell'espressione (2), relativa ad un punto P di C, e dell'analoga cui dà luogo θ', si deduce che un punto in cui θ, θ' abbiano gli ordini rispettivi r, r' è d'ordine $r+r'$ pel prodotto $\theta\theta'$ e d'ordine $r-r'$ pel quoziente $\theta:\theta'$. Qualora poi r, r' abbiano lo stesso segno, e sia p. es. r quello dei due numeri che ha il minimo valore relativo ($r \leq r'$), la somma o differenza $\theta \pm \theta'$ delle due funzioni ha, nel punto considerato, l'ordine r. Se r, r' hanno segni contrari, $\theta \pm \theta'$ ha per ordine quello dei due numeri r, r', che è negativo.

Siamo così in grado di assegnare l'ordine in un punto della curva, di una qualunque funzione razionale di più funzioni razionali del punto variabile sulla curva stessa, mediante gli ordini di queste.

28. Equivalenza di due gruppi di punti sopra una curva. Concetto di serie lineare completa. — Sieno A, B due gruppi di un egual numero n di punti sopra una curva irriducibile Γ.

S'intende che i due gruppi si considerano dal punto di vista della geometria sull'ente, e quindi, più che i punti costituenti A, B, son dati i rami che hanno le origini nei punti dei due gruppi; e tanti sono i rami, tanti sono i punti che debbonsi riguardare distinti, anche se non lo sono sul modello proiettivo che si fissa per la curva Γ [1] (n. 23).

I due gruppi diconsi *equivalenti*, e si scrive

$$A \equiv B,$$

quando esiste una g_n^r, e quindi una g_n^1, di cui essi sono gruppi totali. Dunque:

Due gruppi equivalenti son due gruppi di livello costante per una funzione razionale del punto della curva.

Essi posson anzi assumersi come gruppo degli zeri e come gruppo dei poli della funzione stessa, eseguendo eventualmente sulla funzione una conveniente sostituzione lineare (n. prec.).

Sussiste il seguente *teorema fondamentale dell'equivalenza (o proprietà transitiva dell'equivalenza)*:

Due gruppi equivalenti ad un terzo lo sono tra loro; ossia, in simboli:

Se $A \equiv B$ *e* $B \equiv C$, *segue* $A \equiv C$.

Infatti, sia $\dfrac{\varphi}{\varphi_0}$ una funzione razionale avente B come gruppo dei poli e A come gruppo degli zeri; φ, φ_0 essendo due polinomi (funzioni razionali intere del punto variabile

[1] Osservazioni analoghe in seguito verranno ormai sottintese.

su Γ). Similmente, sia $\frac{\psi}{\psi_0}$ una funzione razionale coi poli in B e gli zeri in C; ψ, ψ_0 essendo, pur essi, polinomi. Allora la funzione razionale quoziente $\frac{\varphi\psi_0}{\varphi_0\psi}$, avrà i poli in C e gli zeri in A (n. prec. Oss.) e quindi i gruppi A, C saranno equivalenti.

Si può anche, se vuolsi, considerare la funzione razionale $\frac{\varphi}{\varphi_0} + \lambda \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\varphi\psi_0 + \lambda\varphi_0\psi}{\varphi_0\psi_0}$, dipendente del parametro λ. Essa ha il gruppo dei poli fisso in B (n. prec. Oss.) ed il gruppo degli zeri variabile in una g^2_n (n. 16), che contiene $A(\lambda = 0)$ e $C(\lambda = \infty)$.

Ciò presuppone che i gruppi A, C non abbiano punti comuni con B. Se p. es. A ha un punto r-plo comune con B, questo si potrà contare, colla molteplicità r, fra gli zeri e fra i poli di $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ e ragionare pel resto come sopra.

Il teorema precedente può anche enunciarsi come segue:

Se sopra una curva irriducibile due serie lineari g^r_n, g_n hanno un gruppo comune, esse appartengono ad una medesima serie d'ordine n, più ampia di entrambe.

Il gruppo comune sia B. Assuntolo come gruppo dei poli delle funzioni razionali, dipendenti rispettivamente da $r - 1$ e da $s - 1$ costanti arbitrarie, di cui le date serie rappresentano i gruppi di livello, le funzioni stesse saranno espresse da (n. 16):

$$\theta = \frac{\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r}{\varphi_0}$$

$$\theta' = \frac{\mu_1\psi_1 + \ldots + \mu_{s-1}\psi_{s-1} + \psi_s}{\psi_0}.$$

I gruppi di livello della funzione razionale $\theta + \lambda\theta'$ (con λ nuovo parametro) che ha lo stesso gruppo B di poli, costituiscono appunto una serie lineare d'ordine n, che (per $\lambda = 0$, o $\lambda = \infty$) contiene totalmente le due date.

In altre parole si può dire:

La g^r_n e la g^s_n sieno staccate, fuori dei punti fissi, dai sistemi lineari (di curve o superficie o forme algebriche):

$$\varepsilon_0\varphi_0 + \varepsilon_1\varphi_1 + \ldots + \varepsilon_{r-1}\varphi_{r-1} + \varepsilon_r\varphi_r = 0,$$

$$\eta_0\psi_0 + \eta_1\psi_1 + \ldots + \eta_{s-1}\psi_{s-1} + \eta_s\psi_s = 0.$$

Allora il sistema lineare:

$$(3) \quad \varepsilon\varphi_0\psi_0 + \psi_0(\varepsilon_1\varphi_1 + \ldots + \varepsilon_r\varphi_r) + \varphi_0(\eta_1\psi_1 + \ldots + \eta_s\psi_s) = 0$$

stacca su Γ, fuori dei punti fissi, una serie lineare d'ordine n, che contiene le due date.

La solita osservazione deve farsi se le due serie hanno punti fissi (se ne fa prima astrazione, eppoi si torna ad aggiungerli).

Dal teorema dimostrato seguono concetti e proposizioni molto importanti.

Data su Γ una g^r_n, abbiamo già avvertito (n. 16) che $r \leq n$, cosicchè, se esistono serie lineari più ampie della g^r_n, che la contengano totalmente, è certo che le dimensioni di queste serie non posson crescere oltre ogni limite (non posson superare n). Orbene, dal teorema fondamentale si deduce che esiste una sola serie lineare più ampia di tutte quelle che contengono totalmente la data g^r_n, ed in cui anzi queste serie son contenute totalmente. Infatti, se g^r_n è contenuta in due diverse serie g^R_n, g^S_n, queste, avendo in comune tutti i gruppi di g^r_n, sono contenute totalmente in una più ampia di entrambe.

Chiameremo *serie lineare completa* una g^r_n che non sia contenuta in una più ampia dello stesso ordine; e potremo pertanto enunciare che:

È unica la serie lineare completa in cui è contenuta totalmente una data serie lineare g^r_n (in particolare un gruppo di punti: $r = 0$).

Naturalmente un gruppo di punti può esso medesimo costituire una serie lineare completa, quando non esista alcuna serie lineare infinita, che lo contenga totalmente. Presto ne vedremo esempi.

Se A è un gruppo di punti di Γ, la serie lineare completa *individuata* da A, si denota col simbolo $|A|$.

È evidente che *la serie lineare completa $|A|$, individuata da A, può considerarsi come l'insieme di tutti i gruppi di punti equivalenti ad A.*

Si può anche dire, con Riemann, quando la serie $|A|$ è almeno ∞^1, che $|A|$ è determinata dalla *più generale (cioè contenente il maggior numero di costanti arbitrarie) funzione razionale che ha i poli nel gruppo dato A.*

Una serie lineare non completa, dicesi *parziale*, e chiamasi *deficienza* o *difetto di completezza* la differenza fra la dimensione d'una serie parziale e la dimensione della serie completa da essa individuata.

Una trasformazione birazionale della curva Γ muta gruppi equivalenti in gruppi equivalenti e quindi una serie completa in una serie completa. Perciò *il concetto di serie lineare completa (o parziale) appartiene alla geometria sull'ente.*

Osservazione. — Entro una data serie lineare g_n^r *ogni* g_n^1 è perfettamente individuata da due suoi gruppi di punti (ciò equivale infatti ad affermare che una funzione razionale è individuata, a meno di un fattore moltiplicativo, dal gruppo dei suoi poli e dal gruppo dei suoi zeri); e quindi le sole g_n^1, contenute nella g_n^r, son quelle staccate su Γ dai fasci di forme contenuti nel sistema lineare di forme, Σ, che stacca g_n^r.

Assimilando la g_n^r ai punti di uno spazio lineare S_r, di cui gli elementi siano i gruppi della serie (e ciò è sempre lecito, perchè la g_n^r è in corrispondenza biunivoca continua, senza eccezioni, colle forme del sistema Σ, ∞^r), le g_n^1 contenute in g_n^r son dunque quelle, e quelle sole, che vengon rappresentate dalle rette di S_r.

Ne deriva che una g_n^k $(k<r)$ contenuta in g_n^r è rappresentata da una varietà razionale ∞^k di punti di S_r, tale che ogni retta contenente due punti di questa varietà, giace interamente in essa. La varietà è dunque un S_k (1). Pertanto *le* g_n^k *contenute in* g_n^r *son quelle, e quelle sole, che son rappresentate dagli* S_k *di* S_r*; epperciò non sono altre che quelle staccate su* Γ *dai sistemi lineari* ∞^k *subordinati a* Σ. Risultato questo che avevamo già stabilito diversamente, seguendo Segre, al n. 20.

Dalla perfetta assimilazione, che ne deriva, delle serie lineari subordinate a una data, agli spazi lineari subordinati ad un dato, segue che:

Una g_n^r *ed una* g_n^s *che abbiano qualche gruppo totale comune (e quindi sieno contenute in una medesima serie completa), non posson che avere in comune una* g_n^i $(i \geq 0)$. *La serie lineare minima che le contiene entrambe, è allora una* g_n^{r+s-i}.

(1) Così p. es. una superficie (irriducibile) di S_r che contenga ogni retta individuata da due suoi punti, è un piano, perchè può generarsi mediante le rette che passano per un suo punto e si appoggiano a una sua retta; una varietà a tre dimensioni, che gode della proprietà analoga, contiene quanti si vogliano piani, e può generarsi mediante le rette che passano per un suo punto e si appoggiano ad un suo piano, onde è un S_3; ecc. ecc.

Resta così maggiormente precisato un teorema poco sopra enunciato.

Il teorema della unicità della serie completa che contiene una data serie lineare, risale in sostanza a Riemann, dal cui punto di vista — quello delle funzioni razionali di un punto della curva (superficie di Riemann) — esso è pressochè immediato. La trattazione che noi ne abbiamo fatto s'ispira appunto a Riemann. Ma per circa quaranta anni non si era mai pensato di inquadrare il concetto riemanniano di quel teorema in una trattazione algebrico-geometrica della geometria sopra una curva (la quale d'altronde non può prescindere dalla nozione di ramo). Così Brill e Noether, nella loro prima classica trattazione algebrico-geometrica della teoria (1873), della quale avremo da discorrer diffusamente in seguito, hanno dedotto la proprietà in questione dal celebre teorema $Af+B\varphi$ di Noether, di cui diremo in un successivo Cap.; e Segre, nella trattazione iperspaziale della teoria stessa, sviluppata da lui e da Castelnuovo dal 1886 al 1889, e della quale pure parleremo in appresso, ha dedotto il teorema da proprietà delle rigate algebriche (Torino Atti, **21** (1886); Math. Ann., **30** (1887); *Introduzione*, n. 54. Ad Enriques spetta di aver osservato che il concetto riemanniano poteva agevolmente inserirsi in una trattazione algebrico-geometrica, mediante la considerazione del sistema lineare (3) [Torino Atti, **37** (1901)]. La denominazione di *serie lineare completa* (Vollschar) è stata introdotta da Brill e Noether, i quali, per la ragione che vedremo più tardi, chiamavano *corresiduali* i gruppi *equivalenti*. Quest'ultima denominazione è di Dedekind e Weber (1880).

29. Operazioni di somma e di sottrazione sulle serie lineari. — Sia g_n^r una serie lineare completa sopra la curva irriducibile Γ, e B sia un gruppo di m punti, contenuto parzialmente nella g_n^r (che sia cioè parte di qualche gruppo della g_n^r, o magari di di tutti, se B è un gruppo di punti fissi della serie).

I gruppi della g_n^r che contengono B costituiscono (nn. 16, 23) una serie lineare di dimensione $\leq r$. Facendo astrazione in tale serie dal gruppo B, avremo una g_{n-m}^{r-s}, dove s denota il numero delle condizioni che i punti di B presentano ai gruppi della g_n^r, che debbono contenerli $(0 \leq s \leq m)$. Proviamo ora che la g_{n-m}^{r-s} è completa. Supponiamo, invero, che la g_{n-m}^{r-s} sia contenuta totalmente in una serie più ampia; aggiungendo ai gruppi di questa serie i punti di B, otteniamo una serie d'ordine n, avente in comune con g_n^r, ∞^{r-s} gruppi, ma non in essa contenuta; il che contraddice all'ipotesi che la g_n^r sia completa. Chiameremo *resto* di un gruppo B, rispetto ad una data serie lineare g_n^r, ogni gruppo che insieme a B dia un gruppo della g_n^r (cioè un gruppo qualunque della serie g_{n-m}^{r-s}). Allora il risultato precedente potrà enunciarsi dicendo che:

I resti di un dato gruppo di punti rispetto ad una serie lineare completa, costituiscono una serie lineare completa.

Questa serie lineare completa si chiama la *serie lineare residua* del gruppo B rispetto a g_n^r.

Sieno ora $|A|, |B|$ due serie lineari complete degli ordini m, n. È facile verificare che tutti i gruppi di $m+n$ punti ottenuti aggiungendo a un gruppo qualunque della prima un gruppo qualunque della seconda, sono tra di loro equivalenti.

Diciamo infatti A', B' altri due gruppi delle serie individuate da A, B, e indichiamo in modo generale con $A+B$ il gruppo formato dall' insieme dei gruppi A, B. Avremo allora le relazioni:

$$A+B \equiv A+B', \quad A+B' \equiv A'+B',$$

la prima delle quali ci dice che $A+B$, $A+B'$ appartengono alla serie lineare ottenuta da $|B|$ aggiungendo i punti fissi del gruppo A; e la seconda che $A+B'$, $A'+B'$ appartengono alla serie lineare ottenuta da $|A|$ aggiungendo i punti fissi del gruppo B'.

La proprietà transitiva dell' equivalenza, ci permette di trarre dalle due relazioni scritte, la:

$$A+B \equiv A'+B',$$

e ciò prova quel che si era asserito.

Questa osservazione conduce naturalmente a definire la *somma di due date serie lineari* $|A|, |B|$, come la serie lineare completa che contiene tutti i gruppi della forma $A+B$, cioè la serie $|A+B|$ individuata dal gruppo $A+B$.

Dal concetto di somma segue poi subito la nozione di *differenza di due serie* $|C|$ *ed* $|A|$. Supposto che un gruppo fissato A della serie $|A|$ sia contenuto parzialmente in $|C|$, diciamo $|B|$ la serie residua di A rispetto a $|C|$; allora la somma delle due serie $|A|, |B|$ sarà precisamente $|C|$, cioè potrà scriversi:

$$|C| = |A+B|.$$

La serie $|B|$ si chiamerà la *serie residua di* $|A|$ *rispetto a* $|C|$ od anche *differenza delle due serie* e si indicherà col simbolo $|C-A|$.

In verità noi abbiamo ottenuto $|B|$ come serie residua del particolare gruppo A rispetto a $|C|$; ma poichè la serie $|A+B|$ contiene tutti i gruppi ottenuti riunendo un qualunque A ad un qualunque B, così la serie residua di ogni gruppo A rispetto alla serie $|A+B|$, cioè alla $|C|$, è sempre la serie lineare $|B|$. Donde la opportunità di considerare $|B|$ come residua della *serie* $|A|$, e non del solo *gruppo* A, rispetto a $|C|$.

Perveniamo pertanto al seguente *teorema del resto*:

I resti di un dato gruppo di punti rispetto ad una serie lineare completa, in cui esso sia contenuto parzialmente, son resti, rispetto alla stessa serie, di ogni altro gruppo equivalente a quello.

La definizione di somma si estende a più serie lineari $|A_1|, |A_2|, |A_3|, \ldots$; giacchè anche in questo caso generale i gruppi del tipo $A_1+A_2+A_3+\ldots$ appartengono ad una medesima serie lineare $|A_1+A_2+A_3+\ldots|$, come si riconosce subito col processo d' induzione.

Se in particolare le serie $|A_1|, |A_2|, |A_3|, \ldots$ coincidono in una stessa $|A|$, la loro somma chiamasi un *multiplo della serie* $|A|$ *secondo il numero* k, se le serie sono in numero di k. Tale multiplo s' indica con $|kA|$.

Oltre alla somma $|A+B|$ di due serie lineari complete, si può anche definire la *somma minima* di due serie lineari qualunque, anche parziali.

Sieno g_n^r, g_m^s le due serie. Come abbiamo visto, i gruppi di $n+m$ punti ottenuti aggregando ad un gruppo qualunque della prima un gruppo qualunque della seconda, sono equivalenti; ma non è affatto detto che la serie lineare completa g_{n+m}^d cui essi appartengono, sia la serie lineare di dimensione minima che li contiene tutti. Quel che è certo si è che la serie lineare di dimensione minima g_{n+m}^h, che contiene quei gruppi, è perfettamente individuata; perchè se vi fossero due siffatte serie distinte g_{n+m}^h, la totalità dei gruppi ad esse comuni formerebbe una serie lineare di dimensione $<h$, contenente i gruppi stessi.

Ebbene, la serie g_{n+m}^h così individuata, si chiamerà la *somma minima delle due date serie (parziali o complete).*

Sieno:

$$(4)\quad \lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_r\varphi_r=0, \quad \mu_0\psi_0+\mu_1\psi_1+\ldots+\mu_s\psi_s=0$$

i sistemi lineari, che staccano sulla curva Γ le date serie g_n^r, g_m^s (sistemi lineari di curve o superficie o forme algebriche, secondo che Γ è piana o sghemba o iperspaziale). Le due serie sono staccate su Γ, fuori di certi punti fissi, costituenti rispettivamente i gruppi K, L; gli altri punti fissi, eventualmente esistenti, facendo parte di tutti i loro gruppi [1]. Ciò posto, consideriamo il sistema lineare:

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\nu_{ij}\varphi_i\psi_j=0. \tag{5}$$

Poichè il prodotto delle (4) appartiene a questo sistema lineare, e precisamente in corrispondenza ai particolari valori

$$\nu_{ij}=\lambda_i\mu_j \tag{6}$$

dei parametri, così ogni gruppo costituito da un gruppo della prima serie e da un gruppo della seconda, vien segato, fuori del gruppo $K+L$, da una particolare forma di (5) [2]. Onde la serie lineare d'ordine $n+m$, staccata da (5) su Γ, fuori di $K+L$, contiene la somma minima delle due serie o coincide con essa.

Per provare che effettivamente il sistema (5) stacca su Γ la somma minima, occorre provare che non può esistere un sistema subordinato a (5), contenente tutte le forme che corrispondono ai valori (6) dei parametri; o, in altre parole, che i valori (6) non posson soddisfare ad alcuna relazione lineare del tipo:

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\varepsilon_{ij}\lambda_i\mu_j=0, \tag{7}$$

per valori non tutti nulli dei coefficienti ε.

Supposto, invero, che una tal relazione esista, poichè le λ e le μ sono affatto indipendenti tra di loro, e la relazione deve esser soddisfatta qualunque sieno le λ e le μ, potremo porre eguali a zero tutte le μ, tranne una: p. es. μ_j che porremo

[1] Qui occorre la solita considerazione dei punti multipli di Γ come sovrapposizioni di più punti, quanti sono i rami di cui essi sono origini (n. 23).

[2] Se le g_n^r, g_n^s avessero punti fissi comuni, ciascuno di questi figurerebbe in uno dei gruppi considerati, con molteplicità eguale alla somma delle molteplicità ch' esso possiede nei gruppi di g_n^r e di g_m^s di cui fa parte.

eguale ad 1. La relazione (7) si riduce allora a

$$\sum_{i=0}^{r}\varepsilon_{ij}\lambda_i=0;$$

e siccome le λ sono indipendenti fra di loro, ciò implica che sia $\varepsilon_{ij}=0\ (i=0,\dots,r)$. D'altronde l'indice j della μ_j che si è supposta non nulla, può assumere uno qualunque dei valori $0, 1\ \dots, s$; dunque tutte le ε son nulle.

Però, dal fatto che il sistema (5) stacca su Γ, fuori di $K+L$, la somma minima delle due date serie, non si può certo trarre la conseguenza che la dimensione della somma minima sia $(r+1)(s+1)-1$, che è il numero delle forme della combinazione lineare (5), diminuito di un'unità. Perchè così fosse, bisognerebbe che le forme $\varphi_i\psi_j$ fossero linearmente indipendenti fra di loro e che nessuna delle forme del sistema (5) contenesse Γ. Nè l'una nè l'altra circostanza conseguono puramente e semplicemente dal fatto che alle condizioni analoghe soddisfanno i sistemi lineari (4).

Nel caso particolare in cui le due serie date coincidono in una sola, g_n^r, e quindi i sistemi (4) possono assumersi coincidenti col primo di essi, il sistema lineare (5) diviene:

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{r}\nu_{ij}\varphi_i\varphi_j=0, \tag{5'}$$

e le forme prodotto di due forme del primo dei sistemi (4), sono ancora date dai valori (6) dei parametri ν.

Però in tal caso le forme distinte della combinazione lineare (5′) riduconsi a $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ (tante quante le combinazioni con ripetizione di $r+1$ elementi a 2 a 2), perchè $\varphi_i\varphi_j=\varphi_j\varphi_i$, e quindi (5′) può anche scriversi:

$$\Sigma a_{ij}\varphi_i\varphi_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ij}), \tag{5''}$$

che è una forma quadratica degli argomenti φ, eguagliata a zero.

La considerazione si estende ovviamente a quante si vogliano serie $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_k}^{r_k}$; le quali siano staccate su Γ, fuori di certi gruppi di punti fissi $L_1, L_2, \dots, L_k$, da sistemi lineari:

$$\lambda_0^{(1)}\varphi_0^{(1)}+\dots+\lambda_{r_1}^{(1)}\varphi_{r_1}^{(1)}=0,\ \dots,\ \lambda_0^{(k)}\varphi_0^{(k)}+\dots+\lambda_{r_k}^{(k)}\varphi_{r_k}^{(k)}=0.$$

La loro *somma minima* è staccata su Γ, fuori del gruppo $L_1 + L_2 + \ldots + L_k$, dal sistema lineare:

$$(7) \qquad \sum_{i_1=0}^{r_1}\sum_{i_2=0}^{r_2}\ldots\sum_{i_k=0}^{r_k} \nu_{i_1 i_2 \ldots i_k}\varphi_{i_1}^{(1)}\varphi_{i_2}^{(2)}\ldots\varphi_{i_k}^{(k)} = 0,$$

che contiene tutti i prodotti di k forme dei precedenti sistemi. Questi prodotti corrispondono ai valori

$$(8) \qquad \nu_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \lambda_{i_1}^{(1)}\lambda_{i_2}^{(2)}\ldots\lambda_{i_k}^{(k)}$$

dei parametri ν.

Quando le k serie coincidono in una sola, la loro somma minima si chiama anche la *serie multipla minima, secondo l'intero k*, di una di esse.

Da quanto precede si trae il corollario seguente, che ci giova notare per ulteriori applicazioni:

Il minimo multiplo secondo l'intero k della serie lineare delle sezioni iperpiane di una curva irriducibile Γ di S_r, è staccato su Γ dalle forme d'ordine k dello S_r.

Osservazione. — È senz'altro evidente che i *concetti di somma (completa e minima), di differenza e di multipli (completi o minimi) di serie lineari date sopra una curva, sono invarianti per trasformazioni birazionali.*

Il concetto di serie lineare somma (completa) o differenza di due altre è contenuto sostanzialmente in Brill e Noether [Math. Annalen, 7, 287 (1873)]. Essi danno il teorema del resto (*Restsatz*) sotto una forma proiettiva, che sarà esposta più tardi, e dalla quale si deduce subito il teorema del resto sotto forma invariantiva per trasformazioni birazionali, quale noi l'abbiamo esposta in questo n. — La somma minima di due o più serie lineari (e la serie multipla minima di una data), di cui vedremo in seguito importanti applicazioni, fu considerata da Castelnuovo [Palermo Rend. 7, 79 (1893)]. Le operazioni di somma e di sottrazione in senso generale (con riferimento cioè alle serie complete), furono considerate in modo sistematico da Castelnuovo-Enriques [Math. Annalen, 48, 257 (1896)].

Nello spazio lineare ad $(r_1+1)\ldots(r_k+1)-1$ dimensioni, in cui le ν son coordinate omogenee di punto, le (8) dànno la rappresentazione parametrica della cosidetta *varietà di* Segre [Palermo Rend., 5, 192 (1891)], che rappresenta le k-ple di punti tolti da k spazi lineari $S_{r_1}, \ldots, S_{r_k}$. La studieremo in un prossimo volume, in cui ci occuperemo della geometria numerativa. Vedi anche, a tal proposito, Bertini, *Iperspazi*, p. 380. Se le k serie coincidono in una sola, ∞^r, la varietà rappresentativa del k-plo minimo di questa, appartiene ad uno spazio a $\binom{r+k}{k}-1$ dimensioni. Ved., a proposito di questa varietà, Bordiga, Ann. di Mat., 27_3, 1 (1917).

30. Gruppi e serie lineari virtuali. — Sulla curva Γ sia data l'equivalenza:

$$(9) \qquad A + B' \equiv A' + B,$$

ove A, B, A', B' son gruppi di Γ. Scriveremo pure la precedente sotto la forma:

$$(10) \qquad A - B \equiv A' - B',$$

e ciò anche se non esiste la serie residua $|A-B|$ (e quindi la $|A'-B'|$).

Diremo che il simbolo $A - B$ rappresenta un *gruppo virtuale di punti* su Γ: in particolare un gruppo *effettivo* (anzi tutta una serie di gruppi equivalenti fra loro) se esiste $|A-B|$. Resta così definita anche una *equivalenza fra gruppi virtuali*, come la (10). Essa riducesi alla equivalenza (9) fra gruppi effettivi.

Se $A \equiv B$, il gruppo virtuale $A - B$ s'indica pure col simbolo zero e si scrive

$$A - B \equiv 0.$$

L'insieme dei gruppi virtuali equivalenti ad un dato [cioè dei simboli del tipo $A - B$, tra i quali intercedano relazioni come la (10)] dicesi una *serie lineare virtuale* (completa) e s'indica con $|A-B|$. *Ordine* di tale serie virtuale è la differenza fra gli ordini delle $|A|$, $|B|$. Quando $A \equiv B$, la serie lineare virtuale $|A-B|$ chiamasi la *serie lineare nulla*. Qualora A, B constino dello stesso numero di punti, ma non sieno equivalenti, la serie $|A-B|$ *è bensì di ordine zero, ma non è la serie lineare nulla.*

Se C è un gruppo effettivo, tale che $|C|$ contenga B, e C' è un gruppo equivalente a C, dalla (9) o (10) si trae:

$$C + A - B \equiv C' + A' - B';$$

e, poichè esiste la serie $|C+A-B| = |(C-B)+A|$, esisterà anche la serie $|C'+A'-B'|$. In parole:

Se un gruppo virtuale aggiunto ad un gruppo effettivo individua una serie lineare effettiva, la stessa serie resta individuata sostituendo ai due gruppi considerati due gruppi equivalenti.

Un gruppo virtuale $A - B$ può quindi considerarsi come un simbolo operativo $+A-B$, che, applicato ad un conveniente gruppo effettivo, permette d'individuare una serie lineare effettiva. Da questo punto di vista, due gruppi virtuali equivalenti non sono che due simboli operativi identici.

Introdotte le convenzioni sopra espresse (allo scopo di abbreviare il linguaggio), e tenuto conto del n. prec., si può affermare che:

In un' equivalenza un gruppo può trasportarsi da un membro all' altro, purchè si cambi di segno.

Più equivalenze si possono sommare a membro a membro fra di loro, magari dopo averle moltiplicate per arbitrari numeri interi (positivi o negativi).

Nel seguito, ove non si aggiunga alcun attributo, s'intenderà di parlare di gruppi e di serie effettivi.

La nozione di gruppi e di serie virtuali, accennata per la prima volta dall'Autore in una Memoria sulle corrispondenze algebriche, citata più tardi, è analoga a quella dei numeri negativi nell'algebra. È particolarmente utile la nozione corrispondente di curve e di sistemi lineari virtuali sopra una superficie, sviluppata dall'Autore, il quale ha assegnato una condizione aritmetica sufficiente [Ist. Lomb. Rend., 38_2, 859 (1905)] ed una condizione geometrica, necessaria e sufficiente, perchè una curva, data a priori come virtuale, sia effettiva [Ist. Veneto Atti, 68, 836 (1909)].

31. Interpretazione proiettiva delle serie lineari complete. Curve normali. — Consideriamo una curva irriducibile C, d'ordine n, appartenente allo spazio S_r. Se la g_n^r delle sue sezioni iperpiane è una serie completa, la curva non può essere proiezione di una curva *dello stesso ordine* appartenente ad uno spazio superiore (n. 21). In questo caso, essa dicesi una *curva normale.* Così p. es. la cubica gobba è una curva normale; come pure la *quartica gobba di 1ª specie* (intersezione di due quadriche generiche di S_3). Mentre la *quartica gobba di 2ª specie* (n. 21) non è una curva normale, essendo essa proiezione di una quartica (razionale) dello spazio S_4.

Quando la g_n^r delle sezioni iperpiane di C non è completa, ed è g_n^R la serie completa che la contiene, si può sempre costruire una curva Γ, imagine proiettiva della g_n^R (la quale è certo semplice, perchè contiene la serie semplice g_n^r), che sia situata in uno spazio S_R passante per lo S_r di C, e tale inoltre che C sia proiezione di Γ da un certo S_{R-r-1} non appoggiato a Γ (n. 21, Oss. 1ª). Pertanto, quando la g_n^r delle sezioni iperpiane non è completa, la curva C non è normale. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva irriducibile C non sia proiezione di una curva dello stesso ordine di uno spazio superiore (cioè perchè C sia normale), è che la serie delle sezioni iperpiane di C sia completa.

Osservazione. — Il teorema del resto ci dice che una serie $g_{n-k}^{r'}$ $(k>0)$ è contenuta parzialmente in una g_n^r completa, la g_{n-k}^{ρ} completa, che contiene $g_{n-k}^{r'}$ $(\rho \geq r')$, si può ottenere considerando i resti dei gruppi di g_n^r passanti per un certo gruppo di k punti fissi (distinti o coincidenti) della curva. Riprendendo il ragionamento del n. 21 (Oss. 2ª) in questo caso, si conclude che *come imagine proiettiva di una $g_{n-k}^{r'}$, che sia contenuta parzialmente in una data g_n^r completa $(k>0)$, può assumersi una proiezione di una imagine proiettiva di g_n^r, da un centro di proiezione che incontra questa imagine in k punti.*

Si vede così che, come avevamo preannunciato al n. 21, il teorema là dimostrato si può invertire, sotto la condizione che la g_n^r sia completa.

La denominazione di *curva normale*, usata da Brill-Noether in un senso non ben precisato, fu adoperata in seguito da Segre (1888) nel senso determinato, sopra espresso.

32. Applicazione alle curve razionali. — Vogliamo ora applicare i teoremi ultimamente dimostrati alle curve razionali (curve birazionalmente equivalenti ad una retta).

Osserviamo anzitutto che, sopra una retta, la totalità dei gruppi di n punti costituisce una g_n^n, la quale si può segare p. es. col sistema lineare di tutte le curve piane d'ordine n.

Ne segue che, sopra una retta, una g_n^r, con $r<n$, è sempre parziale, la serie completa che la contiene essendo la g_n^n di tutti i gruppi di n punti. Lo stesso accadrà sopra una curva razionale, dato il carattere invariante della nozione di serie completa, di fronte alle trasformazioni birazionali.

Sussiste anche il teorema inverso: una curva irriducibile contenente una g_n^n (necessariamente completa) è razionale.

Per provare ciò, osserviamo in primo luogo che la g_n^n non può avere punti fissi, se no, tralasciandoli, si avrebbe una serie di ordine minore della dimensione (cfr. col n. 16). Inoltre la g_n^n non può esser composta, giacchè, se tutti i gruppi di g_n^n che passano per un punto P della curva, passassero per altri punti Q, R,... della medesima, togliendo dagli ∞^{n-1} gruppi che passano per P, i punti ad essi comuni P, Q, R, ... si avrebbe di nuovo una serie d'ordine minore della dimensione. Sicchè il resto del punto P rispetto alla g_n^n è una g_{n-1}^{n-1}, per la quale può ripetersi lo stesso ragionamento, ottenendosi come resto una g_{n-2}^{n-2}; e così proseguendo, finchè si ottenga una g_1^1, la quale pone una corrispondenza birazionale fra una retta e la curva, che risulta così razionale.

La imagine proiettiva della g_n^n è una curva C d'ordine n dello spazio S_n, priva di punti multipli, perchè l'argomentazione precedente, che ci ha fatto escludere che la serie g_n^n fosse composta, vale per ogni posizione di P, e non soltanto per un punto generico; cosicchè i gruppi della serie segata su C dagl' iperpiani passanti per un suo punto *qualunque*, contengono $n-1$ punti variabili.

Concludendo:

Sopra una curva algebrica irriducibile la dimensione r di una serie lineare g_n^r può raggiungere il massimo n, soltanto se la curva è razionale.

Inoltre:

Se una curva irriducibile C, d' ordine n, appartiene allo S_r, è $r \leq n$, e l' uguaglianza può valere soltanto se la curva è razionale. Una curva C razionale, d' ordine n, dello spazio S_r, con $r < n$, è sempre proiezione di una curva normale dello stesso ordine, appartenente ad S_n, la quale è priva di punti multipli.

Le curve razionali normali d' ordine n son omografiche fra loro, perchè alla g_n^n delle sezioni iperpiane dell' una corrisponde la serie delle sezioni iperpiane di ogni altra (n. 19).

Le curve razionali normali sono state considerate pel primo da Clifford [Phil. Trans. **164**, 663 (1879)].

CAPITOLO QUARTO

Il genere di una curva.

33. Gruppo jacobiano di una serie lineare ∞^1. Serie jacobiana di una serie ∞^r. — Sia g_n^1 una serie lineare, senza punti fissi, sopra una curva irriducibile C. Sappiamo (n. 15, Oss.) che vi è solo un numero finito di gruppi della g_n^1 dotati di punti multipli, che, in generale, saranno doppi. Così p. es. la serie lineare staccata sopra una curva di un S_r, priva di punti multipli, dagli iperpiani che passano per un generico S_{r-2}, ha gruppi con soli punti doppi, che sono i punti di contatto delle tangenti della curva appoggiate al dato S_{r-2}. Lo stesso si può dire se la curva è piana e dotata di soli rami lineari (in particolare di soli punti doppi nodali), nei riguardi della serie staccata dalle rette di un fascio generico; i punti doppi di gruppi della serie cadono nei punti di contatto delle tangenti passanti pel centro del fascio.

I punti multipli di gruppi della serie si chiamano brevemente *punti multipli della serie.* È superfluo avvertire, ancora una volta, che un punto multiplo di un gruppo della serie potrà soltanto aversi se più punti del gruppo — considerato come limite di un gruppo variabile nella serie — vengono a coincidere sul medesimo ramo (n. 23). E, con quest' avvertenza, è senz' altro chiaro che *mediante una trasformazione birazionale un punto di data molteplicità per una serie, si muta in un punto di egual molteplicità per la serie trasformata.*

Gruppo jacobiano della data g_n^1 chiamasi il gruppo de' suoi punti doppi, o, se la g_n^1 ha punti più che doppi, *il gruppo dei punti multipli, nel quale ciascun punto α-plo per la serie, sia contato $\alpha - 1$ volte.* La ragione per la quale in questa definizione ogni punto α-plo viene contato $\alpha - 1$ volte, apparisce dal seguito.

Denoteremo con J il gruppo jacobiano della serie data g_n^1.

Come modello proiettivo di C possiamo assumere una curva piana d'ordine m:

$$(1)\qquad f(x, y) = 0,$$

dotata di soli nodi (n. 22).

Sia φ la funzione razionale del punto di f, di cui la g_n^1, imagine della data, è insieme dei gruppi di livello costante. Senza restrizione alcuna possiamo inoltre supporre che i poli di φ sieno n distinti fra di loro (cioè tutti del 1° ordine) (n. 27). Denoteremo il loro gruppo con G.

Assoggettando, se occorre, la curva f ad una generica trasformazione omografica, si può ottenere:

a) che la retta all'infinito seghi f in m punti distinti;

b) che le tangenti di f parallele all'asse y sieno tutte a contatto bipunto; e ciò perchè le tangenti di f a contatto più che bipunto sono in numero finito (n. 25);

c) che i punti del gruppo jacobiano J della g_n^1 ed i poli di φ, sieno tutti al finito e diversi dai predetti punti di contatto.

Denoteremo con G' il gruppo dei punti all'infinito di f e con J' il gruppo dei punti di contatto delle tangenti $x =$ cost., cioè il gruppo jacobiano della g_m^1 staccata su f dalle parallele all'asse y.

La φ, funzione razionale del punto mobile su f, si può anche considerare come funzione della variabile indipendente x, purchè nella $\varphi(x, y)$ s'intenda che y sia la funzione implicita di x definita dalla (1). Si può pertanto considerare la derivata (totale) di φ rispetto ad x: la $\frac{d\varphi}{dx}$. Essa è alla sua volta funzione razionale del punto scorrente su f, perchè si esprime mediante la:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'_x + \varphi'_y \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'_x f'_y - \varphi'_y f'_x}{f'_y}.$$

Ci proponiamo di cercare gli zeri ed i poli di $\frac{d\varphi}{dx}$. A questo scopo, consideriamo un punto $P(a, b)$ di f, al finito e diverso dai punti di J'. Il ramo di origine P, od uno dei due rami, se P è uno dei nodi di f, può rappresentarsi esprimendo y con una serie di potenze intere in $x - a$ (convergente in

un certo cerchio di centro a): [1]

$$(2)\qquad y = b + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots.$$

Sia α l'ordine della funzione razionale φ nel punto P, in quanto origine del ramo considerato (n. 27), cosicchè sostituendo nella $\varphi(x, y)$, al posto di y la serie (2), avremo:

$$\varphi = (x - a)^\alpha \psi(x - a),$$

ove ψ è una serie di potenze di $x - a$, non nulla per $x = a$. Verrà pertanto, per $\alpha \neq 0$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = (x - a)^{\alpha - 1}[\alpha\psi(x - a) + (x - a)\psi'(x - a)];$$

e poichè per $x = a$ l'espressione fra parentesi quadre riducesi alla quantità non nulla $\alpha\psi(0)$, così $\frac{d\varphi}{dx}$ avrà l'ordine $\alpha - 1$ nel punto P.

Se, quindi, $\alpha > 0$, ossia se φ ha in P uno zero α-plo, $\frac{d\varphi}{dx}$ avrà in P uno zero $(\alpha - 1)$-plo, qualora sia $\alpha > 1$, e un punto in cui essa non si annulla nè diventa infinita, se $\alpha = 1$.

Se $\alpha < 0$ e φ ha dunque in P un polo di molteplicità $-\alpha$ (nel nostro caso, per l'ipotesi fatta, è $\alpha = -1$), $\frac{d\varphi}{dx}$ avrà in P un polo di molteplicità $1 - \alpha$, e quindi, nel nostro caso, doppio.

Resta da esaminare il caso $\alpha = 0$. Allora φ è della forma:

$$\varphi = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots \qquad (c_0 \neq 0).$$

Ora, se $c_1 \neq 0$, segue senz'altro che in P la $\frac{d\varphi}{dx}$ è finita e

[1] Invero, per quel ramo che è di 1° ordine e colla tangente non parallela all'asse y, si ha una rappresentazione del tipo:

$$x = a + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$
$$y = b + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

con $a_1 \neq 0$ (n. 25). Ma poichè la $\frac{dx}{dt}$ assume in $t = 0$ il valore non nullo a_1, così (ved. BIANCHI, l. c. § 56; PINCHERLE, l. c. p. 208) t può considerarsi come funzione analitica regolare di $x - a$ nell'intorno di $x = a$; e quindi anche y è funzione analitica regolare di $x - a$ nell'intorno $x = a$, e si può pertanto sviluppare in una serie come quella considerata nel testo.

non nulla. Ma può darsi che c_1 sia nullo; anzi in generale che siano nulli taluni coefficienti successivi: p. es. $c_1, c_2, \ldots, c_{\beta-1}$, Per guisa che:

$$\varphi = c_0 + c_\beta(x-a)^\beta + \ldots \qquad (c_0 \neq 0,\ c_\beta \neq 0).$$

Allora in P la $\dfrac{d\varphi}{dx}$ possiede uno zero $(\beta-1)$-plo. Ebbene, in questo caso il punto P è β-plo per il particolar gruppo $\varphi = c_0$ della data g^1_n.

Riassumendo: in un punto P, diverso dai punti di G', J', la $\dfrac{d\varphi}{dx}$ possiede uno zero $(\alpha-1)$-plo allora e solo allora che quel punto sia α-plo $(\alpha \geq 2)$ per un qualche gruppo della g^1_n, e possiede un polo doppio allora e solo allora che quel punto sia un polo (semplice) di φ.

Per completare l'esame del comportamento di $\dfrac{d\varphi}{dz}$ nei singoli punti di f, occorre adesso prendere in considerazione i punti dei gruppi G', J'.

E cominciamo dai punti di G'. La trasformazione omografica:

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

muta f in una curva dello stesso ordine F, di equazione:

$$F(x', y') = 0;$$

e al gruppo G' dei punti all'infinito di f, fa corrispondere il gruppo G'_1 staccato su F dall'asse $y'(x'=0)$, cioè un gruppo di m punti al finito, che, essendo distinti, non coincidono con alcuno dei punti di contatto delle tangenti di F parallele all'asse y'.

La funzione $\varphi(x, y)$ vien mutata in una funzione razionale $\Phi(x', y')$; e poichè $\varphi - k$, ove k sia una costante *arbitraria*, non ha in G' nè zeri multipli (che apparterrebbero al gruppo J) nè poli, così $\Phi - k$ non avrà in G_1', nè zeri multipli nè poli.

E quindi, per quanto precede, $\dfrac{d\Phi}{dx'}$ avrà, in ogni punto di G_1', l'ordine zero.

Ora si ha:

$$\frac{d\Phi}{dx'} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dx'},$$

cioè:

$$\frac{d\Phi}{dx'} = -x^2\frac{d\varphi}{dx};$$

e siccome nei punti di F in cui $x'=0$, la $\dfrac{d\Phi}{dx'}$ è finita e non nulla, così la funzione razionale $x^2\dfrac{d\varphi}{dx}$ è finita e non nulla nei punti all'infinito di f: il che prova che $\dfrac{d\varphi}{dx}$ ha in ognuno di tali punti uno zero doppio.

Esaminiamo infine i punti di J'. A tale scopo ricorriamo alla trasformazione omografica

$$x = y', \quad y = x',$$

la quale muta f in una curva dello stesso ordine:

$$H(x', y') = 0,$$

e al gruppo J' fa corrispondere il gruppo J'_1 dei punti di contatto di H colle tangenti parallele all'asse x'. In ciascuno di questi punti, che è proprio, la tangente ad H non è dunque parallela all'asse y'.

La funzione $\varphi(x, y)$ vien mutata in una funzione razionale $\Psi(x', y')$; e poichè $\varphi - k$ non ha in J' nè zeri multipli nè poli, lo stesso potrà affermarsi di $\Psi - k$ nei riguardi del gruppo J'_1; onde, per quanto precede, $\dfrac{d\Psi}{dx'}$ avrà, in ogni punto di J'_1, l'ordine zero. Osservando che

$$\frac{d\Psi}{dx'} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dx'} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dy},$$

cioè:

$$\frac{d\Psi}{dx'} = -\frac{f'_y}{f'_x}\frac{d\varphi}{dx},$$

e che la funzione razionale $\dfrac{f_y'}{f_x}$ ha in ogni punto di J' uno zero semplice [1], se ne trae che il prodotto $\frac{f'_y}{f'_x}\frac{d\varphi}{dx}$ non può restare finito e non nullo in ciascuno dei punti di J', se $\frac{d\varphi}{dx}$ non ha, in ognuno di tali punti, un polo semplice [2].

La conclusione è che il gruppo degli zeri della funzione razionale $\frac{d\varphi}{dx}$ è costituito dal gruppo J (in cui ogni punto α-plo per la g^1_n si conti $\alpha - 1$ volte) e dal gruppo G', contato due volte; mentre il gruppo dei poli è costituito dal gruppo J', di cui ogni punto è polo semplice, e dal gruppo G, contato due volte. Si ha dunque l'equivalenza:

$$J + 2G' \equiv J' + 2G,$$

nella quale si può addirittura supporre che G, G' denotino due gruppi qualunque appartenenti rispettivamente alla g^1_n e alla g^1_m considerata.

Sia ora sulla curva f (cioè su C) un'altra serie lineare $g^1_{n_1}$ (priva di punti fissi), di cui denotiamo con J_1 il gruppo jacobiano e con G_1 un gruppo generico. Verrà similmente:

$$J' + 2G_1 \equiv J_1 + 2G',$$

[1] Invero, in ogni punto $P(a, b)$ di J' è $f'_y = 0$ e $f'_x \neq 0$ e di più la molteplicità d'intersezione di $f'_y = 0$ con $f = 0$ nel punto stesso è 1, perchè $f'_y = 0$ passa per quel punto semplicemente colla relativa tangente non parallela all'asse y. Ciò si verifica sviluppando $f(x, y)$ in P colla formula di Taylor:

$$f(x, y) = (x - a)f'_x(a, b) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(x - a)^2 f''_{xx}(a, b) + 2(x - a)(x - b)f''_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f''_{yy}(a, b)\right] + \dots$$

Da questa si deduce che, affinchè la tangente $x = a$ in P, abbia con f contatto bipunto, deve essere $f_{yy}''(a, b) \neq 0$, il che prova l'asserto.

[2] La ricerca dei poli e degli zeri della funzione $\frac{d\varphi}{dx}$ potrebbe anche effettuarsi a partire dall'espressione di tale funzione. Se $\varphi = \frac{u}{v}$, ove u, v son due polinomi in x, y, risalta $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{(vu'_x - uv'_x)f'_y - (vu'_y - uv'_y)f'_x}{v^2 f'_y}$, che, sopra f, può scriversi anche sotto la forma $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{v^2 f'_y}\begin{vmatrix} f & u & v \\ f'_x & u'_x & v'_x \\ f'_y & u'_y & v'_y \end{vmatrix}$. Però l'indagine, completa e rigorosa, non sarebbe più semplice. Essa è accennata, da un punto di vista leggermente diverso, in ENRIQUES-CHISINI, vol. III, 62 (1924). Ved. pure il nostro successivo n. 34, Oss. 1ª.

e addizionando a membro a membro questa e la precedente:

$$J + 2G_1 \equiv J_1 + 2G;$$

cioè (n. 30):

(3) $$J - 2G \equiv J_1 - 2G_1.$$

Possiamo dunque dire:

La differenza fra il gruppo jacobiano J di una g^1_n, data sopra una curva C irriducibile, e il doppio di un gruppo G della serie, individua una serie lineare $|J - 2G|$, effettiva o virtuale, che non muta cangiando comunque la g^1_n considerata.

Nel gruppo jacobiano ogni punto α-plo della g^1_n deve contarsi $\alpha - 1$ volte.

Questa conclusione sta anche se la serie g^1_n ha dei punti fissi, purchè ciascuno di questi si conti adeguatamente nel gruppo J. Precisamente: Suppongasi in primo luogo che P sia fisso per la g^1_n, ma che non appartenga al gruppo jacobiano J_0 della $g^1_{n_0}$, che si ottiene dalla g^1_n astraendo dai punti fissi. Sia inoltre K il gruppo dei punti fissi, entro cui P conti β volte, e G_0 sia un gruppo generico della $g^1_{n_0}$; cosicchè $G = K + G_0$ sarà il gruppo generico della g^1_n.

Si ha allora, conservando le notazioni precedenti:

$$J_0 + 2G_1 \equiv J_1 + 2G_0,$$

donde:

$$(J_0 + 2K) + 2G_1 \equiv J_1 + 2G,$$

sicchè, posto $J = J_0 + 2K$, varrà ancora la (3). Il teorema è pertanto vero anche per le g^1_n con punti fissi, purchè come gruppo jacobiano di una tal serie si assuma il gruppo jacobiano della $g^1_{n_0}$ ottenuta astraendo dai punti fissi, al quale si aggiunga il gruppo dei punti stessi, contato 2 volte.

In particolare il punto P conterà 2β volte come punto di J. Che se P appartenesse anche al gruppo J_0, e ciò perchè fosse un punto α-plo ($\alpha > 1$) della $g^1_{n_0}$, è chiaro ch'esso conterebbe $2\beta + \alpha - 1$ volte in J. Si può in conclusione affermare che:

Un punto, il quale sia β-plo per un gruppo generico di una g^1_n e ($\beta + \alpha$) plo per un gruppo particolare (ben determinato), conta $2\beta + \alpha - 1$ volte nel gruppo jacobiano della serie.

La opportunità di estendere la portata della (3) alle serie con punti fissi, ci ha indotto a definire come gruppo jacobiano J di una g^1_n con un gruppo K di punti fissi, il gruppo $J_0 + 2K$. Orbene, questa definizione ha un contenuto sostanziale, che a priori non apparisce dal modo formale come è stata data.

E cioè:

Tutte le volte che una data g^1_n, con un gruppo K di punti fissi, può considerarsi come limite di una g^1_n variabile, priva di punti fissi, il gruppo jacobiano della g^1_n variabile ha per limite il gruppo dei punti doppi (o multipli) della g^1_n data, cui deve aggiungersi il gruppo K contato due volte.

Dicasi $\bar{J}$ il gruppo jacobiano della $\bar{g}^1_n$ variabile ed J il suo limite, allorchè la $\bar{g}^1_n$ tende alla g^1_n fissa. Se un punto di $\bar{J}$ ha per limite un punto non fisso della g^1_n, questo punto è certo un punto multiplo di un gruppo della g^1_n.

Dunque il limite J di $\bar{J}$ sarà formato dai punti multipli dei gruppi della g^1_n, costituenti il gruppo J_0, ed eventualmente dal gruppo fisso K contato x volte ($x \geq 0$).

Ma poichè, detto $\bar{G}$ un gruppo generico di $\bar{g}^1_n$ e G un gruppo generico di g^1_n, durante la variazione continua di g^1_n sussiste sempre la relazione:

$$\bar{J} - 2\bar{G} \equiv J_1 - 2G_1,$$

al limite avremo:

$$J - 2G \equiv J_1 - 2G_1,$$

cioè:

$$(J_0 + xK) - 2(G_0 + K) \equiv J_1 - 2G_1,$$

ove G_0 denota un gruppo della $g^1_{n_0}$ ottenuta da g^1_n astraendo dai punti fissi. E siccome è pure:

$$J_0 - 2G_0 \equiv J_1 - 2G_1,$$

il confronto di questa colla precedente fornisce, in definitiva, $x = 2$.

Il teorema relativo alla indipendenza della serie, effettiva o virtuale, $|J - 2G|$, dalla g^1_n da cui si prende le mosse, è della massima importanza.

Una prima conseguenza di esso è che *i gruppi jacobiani delle g^1_n estratte da una qualunque g^r_n, sono equivalenti fra loro.* Infatti, detti J, J' due tali gruppi e G, G' due gruppi

di due g^1_n tolte da g^r_n, si ha:

$$J - 2G \equiv J' - 2G'$$

e, poichè $G \equiv G'$, ne segue $J \equiv J'$.

La serie lineare completa cui appartengono totalmente i gruppi jacobiani delle g^1_n estratte da una data g^r_n, dicesi la *serie jacobiana* della serie data. Se G è un gruppo della serie data, la serie jacobiana s' indica con $|G_J|$. Essa è manifestamente una *serie covariante* di $|G|$ nelle trasformazioni birazionali della curva; cioè la jacobiana della trasformata di $|G|$ è la trasformata della jacobiana.

È opportuno di avvertire che l'insieme dei gruppi jacobiani delle g^1_n di una data g^r_n, appena sia $r > 2$, non costituisce da solo una serie lineare; ma è quell'insieme, completato da tutti i gruppi equivalenti, che costituisce la serie lineare jacobiana. Così p. es. per una curva sghemba, d'ordine n, priva di singolarità, l'insieme dei gruppi jacobiani delle g^1_n tolte dalla g^3_n delle sezioni piane, è costituito dai gruppi di contatto delle tangenti della curva appoggiate alle singole rette dello spazio; insieme, che, essendo riferito birazionalmente alla totalità delle rette dello spazio, *è razionale, ma non lineare* (1).

In generale per r qualunque (> 2) l'insieme dei gruppi jacobiani delle g^1_n tolte da g^r_n, è riferibile biunivocamente, *senza eccezioni*, all'insieme delle g^1_n stesse, cioè all'insieme delle rette di un S_r, il quale è razionale, ma non lineare (2).

Per $r = 1$, il gruppo jacobiano (unico) costituisce una serie lineare di dimensione zero. Per $r = 2$, l'insieme dei gruppi jacobiani delle g^1_n tolte dalla g^2_n, è birazionalmente riferibile, senza eccezioni, alle rette, e, quindi ai punti di un piano. In tal caso, esso costituisce una serie lineare ∞^2. E, invero, dati due punti generici P, Q della curva, vi è *un* gruppo G della data g^2_n che ha un punto doppio in P ed *un* altro gruppo G',

(1) Se fosse lineare, potrebbe riferirsi birazionalmente *senza eccezioni* ai punti di S_4; mentre è noto che ciò non è possibile. Il predetto insieme può, invece riferirsi birazionalmente, senza eccezioni, ai punti di una forma quadrica generale di S_5 (KLEIN). Per 4 punti generici della curva passano 2 gruppi dell'insieme stesso.

(2) La varietà degli S_k di un S_r (*varietà grassmanniana*) verrà studiata diffusamente in un successivo volume. Si vegga in proposito una Memoria dell'Autore [Ann. di Mat., 24_3, 89 (1915)].

che ha un punto doppio in Q. I due gruppi individuano una g_n^1, contenuta nella data g_n^2; e del gruppo jacobiano di questa g_n^1 fanno parte P, Q. È poi chiaro che questo è l'unico degli ∞^2 gruppi jacobiani che si considerano, passante per P, Q. Pertanto questi ∞^2 gruppi costituiscono, entro la serie jacobiana (completa), un sistema algebrico tale che per due punti generici della curva passa uno solo di quei gruppi; e perciò (n. 20) quel sistema è una serie lineare.

Siano ora $|A|$, $|B|$ due serie lineari complete ed $|A+B|$ la loro somma. Fra le serie semplicemente infinite contenute totalmente in $|A+B|$, vi sono quelle formate da una serie ∞^1 contenuta totalmente in $|A|$, cui si aggreghi un gruppo fisso B della seconda serie. E poichè il gruppo jacobiano di una tal serie semplicemente infinita, è A_j+2B, così la serie jacobiana di $|A+B|$ sarà $|A_j+2B|$. Similmente, mutando le veci delle due serie. Si può pertanto enunciare il *teorema fondamentale della serie jacobiana*:

Se $|A|$, $|B|$ son due serie lineari appartenenti ad una medesima curva irriducibile, la serie jacobiana della somma $|A+B|$ è espressa da:

$$|(A+B)_j|=|A_j+2B|=|B_j+2A|.$$

34. La serie canonica di una curva ed il genere. — Data sulla curva irriducibile C, una serie lineare $|A|$, d'ordine n, detto ν l'ordine della rispettiva serie $|A_j|$, la serie virtuale od effettiva $|A_j-2A|$ dicesi la *serie canonica* di C. Essa dipende soltanto da C e non dalla serie lineare $|A|$ da cui siamo partiti; ed è d'ordine $\nu-2n$. Manifestamente, poichè la $|A_j|$ è serie covariante di $|A|$, *la serie canonica è invariante nelle trasformazioni birazionali della curva.*

E quindi è invariante il suo ordine $\nu-2n$; sicchè posto:

$$2p-2=\nu-2n,$$

cioè:

$$p=\frac{1}{2}\nu-n+1,$$

il numero (a priori anche frazionario e negativo) *p sarà invariante nelle trasformazioni birazionali di C. Esso chiamasi il genere della curva e gode della proprietà di esser sempre intero e non negativo* [cioè ν è sempre pari e $\geq 2(n-1)$].

Per dimostrarlo, scelgasi come serie $|A|$ quella che contiene totalmente le sezioni rettilinee di un modello proiettivo piano f di C, il quale sia dotato di soli nodi.

Allora il gruppo jacobiano della g_n^1 staccata su f dalle rette di un fascio generico di centro O, è costituito dai punti di contatto delle tangenti mandate da O alla curva, le quali tangenti sono tutte a contatto bipunto e *quindi* (n. 33) distinte fra loro ([1]). La prima formula di PLÜCKER (pag. 43) ci dà il numero ν di queste tangenti (*classe* di f):

$$\nu=n(n-1)-2d,$$

ove d è il numero dei nodi di f. Sicchè risulta:

$$p=\frac{1}{2}[n(n-1)-2d]-n+1,$$

cioè:

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d. \tag{4}$$

Questa intanto prova che p è intero. È inoltre facile dedurre che $p\geq 0$.

Infatti, poichè $\nu\geq 0$ ($=0$ soltanto se $n=1$), così risulta:

$$n(n-1)-2d\geq 0$$

e quindi:

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-d\geq n-1\geq 0.$$

Se, pertanto, è $n>1$, si può disporre degli $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ parametri da cui dipende una curva piana d'ordine $n-1$, per costruire una curva D di tal ordine, che passi pei punti doppi di f e per $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-d$ ulteriori punti semplici della curva stessa. Poichè la f è irriducibile, essa taglia D in $n(n-1)$ punti, e quindi si ha:

$$n(n-1)\geq 2d+\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}-d\right],$$

cioè:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\geq d,\quad \text{ovvero:}\quad p\geq 0.$$

([1]) I punti di contatto di queste tangenti sono le intersezioni di f colla prima polare di O rispetto alla curva, fuori delle intersezioni assorbite dai nodi di f, per ciascun dei quali la prima polare passa semplicemente.

Se $n=1$, è pure $d=0$, e quindi risulta senz'altro $p=0$.

Poichè $p=0$ per la retta, ogni curva razionale avrà il genere nullo. Viceversa, proviamo che una curva irriducibile f di genere nullo è razionale.

Invero, essendo $p=0$, vi sono $\infty^h (h \geq 1)$ curve D di ordine $n-1$, che passan pei d punti doppi e per

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - d - 1 = 2n - 3$$

punti semplici di f. Ognuna di queste curve taglia f, fuori dei punti fissi assegnati, in un solo punto, perchè:

$$n(n-1) - 2d - (2n-3) = 1.$$

Perciò risulta anche necessariamente $h=1$; e così i punti di f risultano riferiti birazionalmente alle curve del fascio delle D, che è un ente razionale. Pertanto f è una curva razionale. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sia razionale, è che abbia il genere nullo.

Nel caso di una curva razionale, la serie jacobiana $|A_j|$ di una data serie $|A|$ di ordine n, avendo l'ordine $2n-2$, è contenuta (n. 32) nella serie $|2A|$, che è d'ordine $2n$; cosicchè esiste la serie $|2A - A_j|$ e coincide colla g_2^2 delle coppie di punti della curva. *In tal caso la serie canonica* $|A_j - 2A|$ *è certo virtuale*: l'operazione $+(A_j - 2A)$, applicata ad una serie lineare, equivale a considerare la serie residua della g_2^2 delle coppie di punti, rispetto alla data serie lineare.

Verificheremo ora facilmente che *questo delle curve razionali e quello delle curve di genere $p=1$ (curve ellittiche), in cui la serie canonica è la serie lineare zero* (n. 30), *sono i soli casi in cui la serie canonica è virtuale. Per $p>1$ essa è sempre effettiva.*

Invero, se $p \geq 1$ risulta

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq d + 1,$$

e quindi vi sono almeno ∞^{p-1} curve d'ordine $n-3$ passanti pei d punti doppi di f (*curve aggiunte* ad f, di ordine $n-3$). Le intersezioni di una generica di queste aggiunte, con f, all'infuori delle $2d$ assorbite dai punti doppi, sono in numero di

$$n(n-3) - 2d = 2p - 2;$$

pertanto, se $p=1$, le predette aggiunte non tagliano affatto f, fuori di quelle $2d$ intersezioni, o, se vuolsi, segano su f la serie lineare zero (cosicchè, nel caso $p=1$ non può esservi che *una sola* aggiunta d'ordine $n-3$); mentre, se $p>1$, le aggiunte d'ordine $n-3$ segano su f, fuori delle $2d$ intersezioni, una serie lineare, di dimensione $\geq p-1$, e d'ordine $2p-2$. Sia nel caso $p=1$, come nel caso $p>1$, aggiungendo ad un gruppo della serie così definita, la sezione di f con una conica, si ottiene un gruppo tagliato, fuori delle $2d$ intersezioni assorbite dai punti doppi, da un'aggiunta di ordine $n-1$; cioè un gruppo equivalente al gruppo jacobiano della g_n^1 segnata su f da un fascio generico di rette; il qual gruppo (n. 33) è appunto segato, fuori dei nodi, da un'aggiunta d'ordine $n-1$ (prima polare del centro del fascio).

Pertanto *le aggiunte d'ordine $n-3$ segano su f, fuori dei nodi, gruppi della serie canonica*, e resta provato quanto avevamo detto circa l'esistenza della serie canonica, per $p>1$. Inoltre possiamo fin d'ora affermare che *la serie canonica ha la dimensione non minore di $p-1$.*

Osservazione 1ª. — La determinazione del gruppo jacobiano J di una g_m^1, che sia segata, fuori dei punti fissi, sulla curva f, d'ordine n, e di equazione:

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

ove x_0, x_1, x_2, son coordinate omogenee di punto in un piano, dal fascio:

$$\lambda\varphi(x_0, x_1, x_2) + \mu\psi(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

potrebbe anche farsi avvertendo che J appartiene alla *curva jacobiana* delle tre curve f, φ, ψ, cioè alla curva ottenuta eguagliando a zero il determinante funzionale o jacobiano:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

delle f, φ, ψ.

Supposto infatti che i punti base del fascio ed i punti di J sieno distinti fra loro e dai punti doppi di f, un punto P di J sarà caratterizzato dal fatto che in esso *una* curva del fascio ha molteplicità d'intersezione 2 (almeno) con f; per il che occorre e basta che quella curva tocchi f in P oppure che vi abbia un punto doppio (almeno). Pertanto le tre equazioni:

$$\rho \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2),$$

per convenienti valori non tutti nulli di λ, μ, ρ, saranno soddisfatte dalle coordinate di P, il quale, dunque, apparterrà a Δ. Il ragionamento s'inverte e si conclude che ognuna delle intersezioni di Δ, f, fuori dei punti fissi e dei nodi di f, appartiene ad J.

D'altronde Δ passa pei nodi di f, e si potrebbe verificare, che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, vi passa semplicemente, senza toccare f. Si potrebbe inoltre verificare che in ogni punto base Q del fascio, tale che la curva generica di questo abbia con f in Q molteplicità d'intersezione $i \geq 1$, la curva Δ ha con f molteplicità d'intersezione $2i$.

Ora, indicato con l l'ordine della curva generica del fascio; con G un gruppo della data g^1_m, con K il gruppo delle intersezioni fisse di quella curva con f, contate ciascuna colla rispettiva molteplicità d'intersezione i; con H il gruppo (effettivo o virtuale) di intersezione ulteriore di f, fuori dei nodi, con una generica aggiunta d'ordine $n-3$, e infine con G' il gruppo segato su f da una retta generica del piano, poichè Δ è una curva aggiunta d'ordine $2l+n-3$, si ha:

$$G + K \equiv lG', \qquad 2K + J \equiv 2lG' + H,$$

donde:

$$J \equiv 2G + H.$$

I risultati dei nn. 33-34 si potrebbero pertanto ottenere anche completando il procedimento qui accennato; sul fondamento di quei risultati può invece dedursi la molteplicità d'intersezione di f, Δ, in ciascun dei punti comuni [1].

[1] La curva jacobiana di tre date curve, così denominata di SYLVESTER, che la studiò pel primo (1853), fu poi studiata da CREMONA (1861), da GERBALDI (1893) e da GUCCIA (1893).

È appunto dal legame fra il gruppo jacobiano d'una serie lineare e la curva jacobiana di tre date curve, che ha preso origine la denominazione di gruppo jacobiano.

OSSERVAZIONE 2ª — La formula (4) fornisce il genere d'una curva piana con soli nodi. Se la curva f, d'ordine n, oltre ai d nodi, ha k cuspidi, il suo genere è espresso dalla:

$$(5) \qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - k.$$

L'espressione analoga di p per una curva dotata di singolarità qualunque, verrà data in seguito. Intanto possiamo stabilir subito la (5), facendo capo alla formula:

$$(6) \qquad p = \frac{1}{2}\Sigma(\alpha - 1) - n + 1,$$

che dà il genere di una curva irriducibile, contenente una g^1_n, priva di punti fissi, e dotata di punti multipli qualunque. Nella (6), che si deduce senz'altro dalla definizione del genere, α denota la molteplicità di uno di questi punti multipli.

Applicando la (6) alla g^1_n staccata sulla f, d'ordine n e di classe m, dotata di d nodi e di k cuspidi ordinarie o di prima specie (origini di rami di 2° ordine e di classe 1; pag. 90), viene:

$$p = \frac{1}{2}(m + k) - n + 1,$$

e, tenuta presente la prima formula di Plücker (pag. 43), da questa si trae la (5).

35. Applicazioni: Trasformazione per dualità di un ramo di curva piana. La seconda e la terza formula di Plücker. — La curva piana irriducibile f, d'ordine n e di classe m, possegga punti multipli di natura qualunque e quindi anche rami superlineari. Sia γ un ramo f, di origine A, d'ordine α e di classe α_1; a sia la tangente a γ in A.

Il gruppo jacobiano della g^1_n staccata su f dalle rette di un fascio, avente un centro generico Q, consta dei punti di contatto delle m tangenti da Q ad f (le quali sono a contatto bipunto, perchè le tangenti singolari, come i punti singolari, sono in numero finito) e delle origini dei rami di ordine $\alpha > 1$, contate ciascuna $\alpha - 1$ volte.

Se ora Q s'approssima ad un generico punto R di a, poichè la retta RA, limite della QA, ha con γ molteplicità d'intersezione $\alpha+\alpha_1$, il punto A, come origine di γ, conta $\alpha+\alpha_1-1$ volte nel gruppo jacobiano della g_n^1 limite. Il che significa che α_1 delle m tangenti da Q ad f, al limite vengon ad esser assorbite da a. Giungiamo così alla seguente nuova definizione della classe α_1: numero delle tangenti a γ, che passan per un punto Q prossimo alla tangente a, ma non all'origine A, le quali tendono ad a, quando Q tende ad un punto di a, diverso da A.

Premesso questo, trasformiamo f con una reciprocità piana, mediante cui alla curva luogo f viene a corrispondere una curva inviluppo f_1, birazionalmente equivalente ad f (pag. 91): la *curva duale* di f. Detti n_1, m_1 l'ordine e la classe di f_1, sarà:

$$n_1 = m, \quad m_1 = n.$$

Come si trasforma il ramo γ? Ad esso corrisponde un insieme di tangenti di f_1, i cui punti di contatto costituiscono l'ente trasformato di γ nella corrispondenza birazionale fra f, f_1; cioè (pag. 80) l'insieme delle tangenti di un ramo γ_1, la cui origine A_1, sarà il punto di contatto della retta a_1, omologa di A. Pertanto A_1 sarà il punto omologo di a, nella reciprocità.

Trasformando mediante la reciprocità la definizione sopra ottenuta della classe α_1, vediamo che una retta prossima a passare per A_1, ma che formi un angolo non infinitesimo con a_1, incontra γ_1 in α_1 punti, i quali tendono ad A_1, quando a_1 si avvicina all'origine A_1. Onde γ_1 è di ordine α_1; e perciò (mutando le veci delle due curve) di classe α. Si conclude che:

L'ordine e la classe di un ramo di curva piana son numeri fra loro duali.

La (6) fornisce il genere della curva f. Applicando la formula alle g_n^1, g_m^1 segate su f e sulla curva duale f_1, da fasci generici di rette ed eguagliando le due espressioni del genere, si ottiene:

$$3(n-m) = \Sigma(\alpha-1) - \Sigma(\alpha_1-1), \tag{7}$$

che è una formula generale, la quale lega ordine e classe di una curva con singolarità qualunque. In essa α è l'ordine di un qualsiasi ramo d'ordine >1 di f ed α_1 la classe di un qualsiasi ramo di classe >1.

Si può anche ottenere, come immediata applicazione, la *seconda formula di* Plücker:

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3i, \tag{8}$$

ove δ è il numero delle tangenti doppie (a punti di contatto distinti) della curva f, dotata delle singolarità più elementari, ed i il numero dei *flessi ordinari* (origini di rami di 1° ordine e di classe 2). Invero, le tangenti doppie corrispondon per dualità ai nodi e i flessi ordinari alle cuspidi ordinarie.

Uguagliando l'espressione (5) del genere all'espressione duale, viene:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \delta - i, \tag{9}$$

ed eliminando m, δ fra le prime due formule di Plücker e la (9), si ottiene la *terza formula* di Plücker:

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8k, \tag{10}$$

dalla quale, per dualità, si deduce la *quarta*:

$$k = 3m(m-2) - 6\delta - 8i,$$

che però non rappresenta un legame essenzialmente nuovo fra i caratteri n, m, d, δ, k, i della curva f, in quanto essa è una conseguenza algebrica delle prime tre (o delle prime due e della (9)).

Talora alla terza formula di Plücker si sostituisce la

$$3(n-m) = k - i,$$

che deriva immediatamente dalla (7).

Per l'estensione delle formule di Plücker ad una curva f, con singolarità qualunque, veggasi il Cap. sulle singolarità delle curve.

36. Ulteriore applicazione: Normali ad una curva piana da un punto. — Riprendiamo ora, da un altro punto di vista, la questione trattata nel n. 11, della ricerca cioè delle normali condotte ad una curva piana irriducibile f, d'ordine n e di classe m, da un generico punto P del piano. La curva f stavolta abbia singolarità qualunque e sia, in modo generico, α l'ordine di uno de' suoi rami superlineari.

Consideriamo dapprima il caso generale, in cui f non passa pei punti ciclici. I piedi delle normali da P ad f non sono altro che i punti di contatto, al finito, della f con circoli di centro P. Ora questi circoli formano un fascio-schiera (avente come punti base i due punti ciclici e come tangenti fisse ivi le rette isotrope per P), di cui fa parte la retta all'infinito, contata due volte. Essi segano dunque su f una g^1_{2n}, priva di punti fissi, il cui gruppo jacobiano J consta:

a) dei piedi delle normali da P ad f, formanti il gruppo N;

b) del gruppo S costituito dalle origini dei rami di ordine $\alpha > 1$, contate ciascuna $\alpha - 1$ volte;

c) del gruppo G delle intersezioni di f colla retta all'infinito.

Indicato pertanto con K un gruppo canonico, effettivo o virtuale, di f, avremo:

$$N + S + G \equiv 4G + K,$$

perchè un gruppo della g^1_{2n} equivale a $2G$. Se ne ricava *la equivalenza*:

$$N \equiv 3G + K - S,$$

che fornisce il gruppo dei piedi delle normali alla curva data da un punto generico.

E siccome $2G + K - S$ equivale al gruppo dei punti di contatto delle tangenti mandate ad f da P, così può dirsi che N equivale a questo gruppo aumentato di una sezione rettilinea di f. Ne segue che *il numero delle normali è dato da* $n + m$, come avevamo trovato al n. 11, per altra via e sotto ipotesi più particolari. Qui *il risultato è reso più significativo, perchè riesce caratterizzata la funzione razionale che ha N come gruppo di poli.*

Se la curva f passa pei punti ciclici con molteplicità qualunque, comportandosi comunque rispetto alla retta impropria e alle rette isotrope per P, dal gruppo $3G + K - S$, per avere un gruppo equivalente al gruppo N dei piedi delle normali, occorrerà togliere ciascuno dei punti ciclici contato tante volte quant'è indicato dalla regola di pag. 119.

Così p. es. se f passa per uno, I, dei punti ciclici con r rami lineari non tangenti nè alla retta all'infinito nè alla retta isotropa PI, il punto I, come origine di ognuno di quei rami, deve togliersi 2 volte dal gruppo $3G + K - S$, perchè è punto fisso semplice per un generico gruppo della g^1_{2n} e punto doppio per un gruppo particolare.

37. Altre importanti applicazioni: Gruppo dei punti multipli secondo $r+1$ di una serie g^r_n. Trasformazione per dualità di un ramo di curva iperspaziale. — Abbiamo veduto che una g^1_n sopra una curva irriducibile ha un numero finito di punti doppi (o multipli) (pag. 55), e, più generalmente, che una g^r_n semplice non può avere che *un numero finito* di punti di molteplicità maggiore di r, cioè di punti $(r+1)$-pli (almeno) per gruppi della serie, perchè, fatta l'imagine proiettiva della g^r_n, un punto generico di C è un punto semplice ordinario (pag. 90).

Questa proprietà potrebbe estendersi agevolmente alle serie composte; ma, senza distinguere le serie semplici dalle composte, poniamoci più in generale le questioni che seguono.

Una g^r_n data sopra una curva irriducibile C, possiede sempre un numero finito di punti $(r+1)$-pli (almeno)? Vi è una equivalenza, analoga a quella che esprime il gruppo jacobiano di una g^1_n, che leghi il gruppo $M_{n,r}$ dei punti $(r+1)$-pli, ad un gruppo G della serie data e ad un gruppo canonico K (effettivo o virtuale)? E qual'è dunque il numero dei punti $(r+1)$-pli, in funzione di n e del genere p della curva? Quand'è che un punto conta più volte nel gruppo dei punti $(r+1)$-pli? A queste domande risponde il teorema:

Una g^r_n, priva di punti fissi, sopra una curva irriducibile C, possiede sempre soltanto un numero finito di punti (almeno) $(r+1)$-pli. Detto $M_{n,r}$ il gruppo di questi punti, G un gruppo di g^r_n, K un gruppo canonico, effettivo o virtuale, di C, sussiste la equivalenza:

$$M_{n,r} \equiv (r+1)G + \binom{r+1}{2}K. \tag{11}$$

Un punto di C, che sia i_0-plo per gli ∞^{r-1} gruppi della g^r_n, che lo contengono, i_1-plo per ∞^{r-2} gruppi, i_2-plo per $\infty^{r-3}, \ldots, i_{r-2}$-plo per ∞^1 ed i_{r-1}-plo per un gruppo, conta $i_0 + i_1 + \ldots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}$ volte nel gruppo $M_{n,r}$.

Dimostreremo questo teorema per induzione, supponendolo acquisito per le serie di dimensione $< r$, posto che già sappiamo ch'esso è vero per $r = 1$. Rappresentiamo proiettivamente i gruppi della g^r_n cogli iperpiani di un S_r, e ciò non collo scopo di costruire la imagine proiettiva della g^r_n, che potrebbe anche essere una curva multipla (nel caso che la g^r_n fosse composta) (pag. 63); ma sibbene per aver meglio presenti le proprietà della g^r_n come ente lineare (pagg. 70, 102).

Ad ogni punto di S_r, in quanto centro di una stella di iperpiani, corrisponde una g_n^{r-1} contenuta in g_n^r. Diciamo Σ_a il sistema ∞^1 di g_n^{r-1} che corrisponde ai punti di una retta a di S_r. Il sistema Σ_a gode della proprietà che, dato un gruppo di g_n^r, o esso appartiene a tutte le g_n^{r-1} del sistema o appartiene a una sola di esse.

Ciò posto, consideriamo il gruppo $M_{n,r-1}$ dei punti r-pli di una g_n^{r-1} variabile in Σ_a. Dico che $M_{n,r-1}$ varia descrivendo una serie lineare, ∞^1, g_ν^1 (di ordine ν eguale al numero dei punti di $M_{n,r-1}$). Invero, detto P un punto generico di C, esso non può esser r-plo che per un sol gruppo della g_n^r, perchè se fosse r-plo per ∞^1 (almeno) gruppi, ad ogni g_n^{r-1} di g_n^r apparterrebbe uno (almeno) di quei gruppi e quindi la g_n^{r-1} avrebbe infiniti punti r-pli. Dicasi G_p il gruppo di g_n^r per cui P è r-plo. Non può darsi che G_p appartenga a tutte le g_n^{r-1} di Σ_a, perchè se no ognuna di queste possiederebbe infiniti punti r-pli: dunque esiste una ed una sola g_n^{r-1} di Σ_a per cui P è r-plo; cioè uno ed un sol gruppo $M_{n,r-1}$ della ∞^1 considerata, che passi per P. Pertanto la serie ∞^1 dei gruppi $M_{n,r-1}$ è d'indice 1, e poichè essa è manifestamente razionale, così ne segue (pag. 51) che è una g_ν^1.

Quand'è che la g_ν^1 può avere un punto Q fisso? Se $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$ sono i caratteri di Q per la g_n^r data (caratteri che hanno i valori

$$(12) \qquad i_0 = 1, \quad i_1 = 2, \ldots, \; i_{r-1} = r$$

allorchè il punto Q non sia singolare rispetto alla g_n^r) o accadrà che il gruppo di g_n^r che ha Q come i_{r-1}-plo appartiene a tutte le g_n^{r-1} di Σ_a; cioè che la retta a di S_r è contenuta nell'iperpiano imagine di quel gruppo; oppure Q è r-plo (almeno) per infiniti gruppi di g_n^r e quindi $(r+1)$-plo (almeno) per uno (almeno) di essi. Pertanto, qualora si scelga a in modo generico, e precisamente in guisa che non sia contenuta in alcuno degli ∞^1 iperpiani imagini dei gruppi di g_n^r che nei singoli punti di C hanno molteplicità eguale ad r o maggiore, i soli punti fissi *eventuali* di g_ν^1, apparterranno ad $M_{n,r}$.

Come vedremo tosto, la nostra ricerca riducesi allo studio del gruppo jacobiano della g_ν^1. Occorre però premettere la determinazione dei caratteri $i'_0, \ldots, i'_{r-2}$ che un punto Q possiede rispetto ad una g_n^{r-1} di g_n^r, in funzione dei caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$ di Q rispetto a g_n^r.

Se la g_n^{r-1} non contiene il gruppo di g_n^r che ha Q come i_{r-1}-plo, gli ∞^1 gruppi di g_n^r aventi Q come i_{r-2}-plo (tra i quali trovasi il gruppo precedente) hanno in comune con g_n^{r-1} un sol gruppo, possedente in Q la molteplicità i_{r-2}. Dunque $i'_{r-2} = i_{r-2}$. Similmente, gli ∞^2 gruppi di g_n^r che hanno Q come i_{r-3}-plo (tra i quali trovansi i precedenti), hanno in comune con g_n^{r-1} una g_n^1, pel cui gruppo generico Q è i_{r-3}-plo. Onde $i'_{r-3} = i_{r-3}$. E in generale si conclude che $i'_k = i_k$ $(k = 0, 1, \ldots, r-2)$.

Quando invece la g_n^{r-1} contiene il gruppo di g_n^r col punto i_{r-1}-plo Q, o, più generalmente, quando essa contiene tutti i gruppi di g_n^r col punto i_k-plo Q, senza tuttavia contenere tutti quelli col punto i_{k-1}-plo Q, si conclude in modo analogo che:

$$i'_0 = i_0, \; i'_1 = i_1, \ldots, \; i'_{k-2} = i_{k-2}, \; i'_{k-1} = i_k, \; i'_k = i_{k+1}, \ldots, \; i'_{r-2} = i_{r-1} \text{ [1]}.$$

Ciò premesso, cerchiamo di caratterizzare un punto Q appartenente al gruppo jacobiano J della g_ν^1. Fra i punti Q trovansi certamente i punti del gruppo $M_{n,r}$ formato dai punti $(r+1)$-pli (almeno) di g_n^r, perchè un tal punto è $(r+1)$-plo per qualche g_n^{r-1} di Σ_a: e precisamente per una, se $i_{r-2} = r-1$, per tutte, se $i_{r-2} \geq r$.

Donde intanto la prima conseguenza, che i punti $(r+1)$-pli (almeno) per la g_n^r sono in numero finito, essendo compresi nel gruppo J.

Consideriamo ora un punto Q di J non appartenente alla categoria precedente. Esso non potrà che essere r-plo per un sol gruppo della g_n^r, perchè, se fosse r-plo per infiniti gruppi, sarebbe $(r+1)$-plo almeno per uno di essi. Similmente, Q non potrà che essere $(r-1)$-plo per ∞^1 gruppi di g_n^r; $(r-2)$-plo per ∞^2; ecc. Sicchè i caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$ di Q, rispetto alla g_n^r, avranno i valori normali (12). D'altronde deve esistere *una* g_n^{r-1} di Σ_a pel cui gruppo $M_{n,r-1}$ il punto Q sia multiplo: una sola, attesa la mancanza di punti fissi di g_ν^1, fuori del gruppo $M_{n,r}$.

Tenuto conto dell'osservazione premessa, si conclude che, non potendo i caratteri $i'_0, \ldots, i'_{r-2}$ di Q, rispetto alla g_n^{r-1}, essere eguali ai primi $r-1$ valori (12) (se no Q non appar-

[1] Conclusione da raffrontarsi con quella del n. 26, circa i caratteri della proiezione di un ramo da un punto, alla quale conclusione essa appunto riducesi, se g_n^r è la serie delle sezioni iperpiane di una curva.

terrebbe ad J), varranno le relazioni:

(13) $i'_0=1,\ i'_1=2,\dots,\ i'_{l-1}=l,\ i'_l=l+2,\dots,\ i'_{r-3}=r-1,\ i'_{r-2}=r,$

ove l è compreso fra 0 ed $r-3$ $(0 \leq l \leq r-3)$. Il punto Q conterà allora $r-l-1$ volte nel gruppo $M_{n,r-1}$ relativo alla g_n^{r-1}, e quindi $r-l-2$ volte in J.

Consideriamo adesso la g_n^{r-2}, comune a tutte le g_n^{r-1} di Σ_a. In quanto essa sta sulla suddetta g_n^{r-1}, il punto Q avrà per g_n^{r-2} certi caratteri j, che o saranno eguali a quelli dello stesso indice della successione (13) oppure da un certo k in poi $(h \geq k)$ accadrà che $j_h = i'_{h+1}$. In quest'ultimo caso sarà, in particolare, $j_{r-3}=r$, cioè alla g_n^{r-2} apparterrà il gruppo di g_n^r che ha in Q la molteplicità massima (nel caso attuale: r). Ciò contraddice al modo generico con cui scegliemmo a. Resta dunque soltanto il primo caso, nel quale (sempre in base al teorema ammesso) il punto Q conta $r-l-2$ volte nel gruppo $M_{n,r-2}$ dei punti $(r-1)$-pli di g_n^{r-2}; cioè tante quante esso conta in J.

Si conclude che:

$$J = M_{n,r} + M_{n,r-2}, \tag{14}$$

ove ogni punto di $M_{n,r}$ si conti con conveniente molteplicità, da determinarsi, ed ogni punto di $M_{n,r-2}$ colla molteplicità che gli è propria, in base al teorema ammesso.

D'altronde, in forza del n. 33, è:

$$J \equiv 2M_{n,r-1} + K;$$

dunque:

$$M_{n,r} \equiv K + 2M_{n,r-1} - M_{n,r-2}. \tag{15}$$

Ricordando le espressioni $M_{n,r-1}$, $M_{n,r-2}$, che derivano dal teorema ammesso, se ne deduce senz'altro la (11), che così resta stabilita per r qualunque.

Ci rimane da provare che la (11) in tanto è vera, in quanto ogni punto di $M_{n,r}$ si valuti colla molteplicità indicata dal teorema. Il punto Q, di caratteri $i_0, i_1, \dots, i_{r-1}$ per g_n^r, ha i caratteri $i_0, i_1, \dots, i_{r-2}$ per una generica g_n^{r-1} di Σ_a e quindi è un punto fisso di molteplicità $\beta = i_0 + \dots + i_{r-2} - \frac{r(r-1)}{2} \geq 0$ per la g_γ^1. Di più per la g_n^{r-1} di Σ_a, che contiene il gruppo di g_n^r avente Q come i_{r-1}-plo, questo punto ha i caratteri

$i_0, i_1, \dots, i_{r-3}, i_{r-1}$, ond'esso conta $i_0 + i_1 + \dots + i_{r-3} + i_{r-1} - \frac{r(r-1)}{2}$ volte nel relativo gruppo $M_{n,r-1}$. Il che significa che Q ha la molteplicità β per un gruppo generico di g_γ^1 e la molteplicità

$$\beta + \alpha = i_0 + i_1 + \dots + i_{r-3} + i_{r-1} - \frac{r(r-1)}{2}$$

per un gruppo particolare; sicchè risulta $\alpha = i_{r-1} - i_{r-2}$. Ne segue (pag. 119) che Q conta $2\beta + \alpha - 1$ volte nel gruppo J; ma esso, attesa la genericità di a, figura già come punto di molteplicità $i_0 + i_1 + \dots + i_{r-3} - \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ nel gruppo $M_{n,r-2}$, dunque la (14), cioè la (15), in tanto sono vere, in quanto Q si conti nel gruppo $M_{n,r}$ colla molteplicità:

$$2\beta + \alpha - 1 - \left[i_0 + i_1 + \dots + i_{r-3} - \frac{(r-1)(r-2)}{2}\right] =$$
$$= i_0 + i_1 + \dots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}.$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

Indicato con p il genere di C, la (11) ci dice che:

Il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r, sopra una curva di genere p, è espresso da:

$$(r+1)(n+rp-r), \tag{16}$$

ove ogni punto, che abbia i caratteri $i_0, i_1, \dots, i_{r-1}$ per la g_n^r, si valuti come $i_0 + i_1 + \dots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}$ punti $(r+1)$-pli.

Però questo risultato, di carattere meramente numerativo, è molto meno significativo di quello espresso dalla (11), che caratterizza il gruppo dei punti $(r+1)$-pli rispetto al corpo delle funzioni razionali del punto di C.

La (11), e quindi anche la (16), valgono pure per serie g_n^r con punti fissi, purchè ogni punto che sia i-plo per tutti i gruppi della serie, $(i+i_0)$-plo per ∞^{r-1}, $(i+i_1)$-plo per $\infty^{r-2}, \dots, (i+i_{r-1})$-plo per un gruppo della serie, si conti

$$(r+1)i + i_0 + i_1 + \dots + i_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}$$

volte come punto $(r+1)$-plo.

Tale conclusione si stabilisce ovviamente, imitando il procedimento di pag. 119, relativo al gruppo jacobiano di una g_n^1 con punti fissi.

Quando la g_n^r considerata sia la serie delle sezioni iperpiane di una curva C, d'ordine n, dello S_r, un punto P, che abbia i caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$ per la g_n^r, è origine di un ramo γ di C che ha i caratteri $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, tali che (n. 25, Oss. 1ª):

$$\alpha = i_0, \quad \alpha+\alpha_1 = i_1, \quad \alpha+\alpha_1+\alpha_2 = i_2, \ldots, \alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{r-1} = i_{r-1},$$

onde $i_k - i_{k-1} = \alpha_k$ $(k=1, 2, \ldots, r-1)$.

Diciamo $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$ la tangente, il piano osculatore,..., lo S_{r-1} osculatore a γ in P.

Se O è un punto generico di S_r, per la g_n^{r-1} segata su C dagli iperpiani della stella O, il punto P, come origine di γ, ha i caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{r-2}$ e P quindi conta $i_0+i_1+\ldots+i_{r-2}-\frac{r(r-1)}{2}$ volte nel gruppo $M_{n,r-1}$ relativo a quella g_n^{r-1}. Se invece O sta su t_{r-1}, ma non su t_{r-2}, il punto P ha per g_n^{r-1} i caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{r-3}, i_{r-1}$ e quindi conta $i_0+i_1+\ldots+i_{r-3}+i_{r-1}-\frac{r(r-1)}{2}$ volte nel gruppo $M_{n,r-1}$: il che significa che, quando O dalla posizione generica passa alla posizione situata in t_{r-1}, ma non in t_{r-2}, vi sono $i_{r-1}-i_{r-2}=\alpha_{r-1}$ iperpiani osculatori di C che vanno a coincidere con t_{r-1}.

Si ottiene pertanto questa nuova definizione di α_{r-1}: la classe o ultimo rango di γ è il numero degl'iperpiani osculatori di γ, passanti per un punto O prossimo a giacere su t_{r-1}, che vanno a coincider con t_{r-1}, quando O va a cadere su t_{r-1}, ma non su t_{r-2}.

Suppongasi ora che il punto O di t_{r-1} si muova con continuità, andando a cadere su t_{r-2}, ma non su t_{r-3}. Allora P conterà $i_0+i_1+\ldots+i_{r-4}+i_{r-2}+i_{r-1}-\frac{r(r-1)}{2}$ nel gruppo $M_{n,r-1}$ e vi saranno pertanto altri $i_{r-2}-i_{r-3}=\alpha_{r-2}$ iperpiani osculatori, che verranno a coincidere con t_{r-1}. Perciò α_{r-2} potrà definirsi come il numero degl'iperpiani osculatori di γ, passanti per un punto O di t_{r-1}, prossimo a t_{r-2}, i quali vanno a cadere su t_{r-1}, quando O va sopra t_{r-2}, ma non su t_{r-3}.

Così proseguendo, tenuto conto del n. 25 e della immediata estensione alle curve iperspaziali del ragionamento svolto nel n. 35 per le curve piane, si conclude che:

Se γ è un ramo di ordine α, primo rango α_1, secondo rango α_2,..., ultimo rango o classe α_{r-1}, per dualità all'ordine corrisponde la classe, al rango α_k, il rango α_{r-k-1} $(k=1, 2, \ldots, r-2)$.

È poi chiaro che una reciprocità di S_r, che muti il ramo γ, nel ramo γ_1, fa corrispondere all'origine di γ, l'iperpiano osculatore nell'origine di γ_1; alla tangente origine di γ, lo S_{r-2} osculatore origine di γ_1; ecc.

Conservando le notazioni di poco fa per la g_n^r delle sezioni iperpiane di C, e pel ramo γ di origine P, possiamo dire che P è α-plo per C, o meglio pel ramo γ su cui si è fissata l'attenzione. Qual'è la molteplicità di t_1 per la superficie osculatrice a C, luogo delle tangenti; o meglio per la *falda* di questa superficie, che proviene da γ? Preso un generico S_{r-2} di S_r, il punto P, come origine di γ, è α-plo per la serie segata su C dal fascio di iperpiani passati per lo S_{r-2}; mentre, se lo S_{r-2} appoggiasi, in modo generico a t_1, il punto P è $(\alpha+\alpha_1)$-plo per la serie stessa. Nel primo caso esso assorbe $\alpha-1$ punti del gruppo jacobiano della g_n^1; nel secondo ne assorbe $\alpha+\alpha_1-1$. Onde t_1 ha la molteplicità $(\alpha+\alpha_1-1)-(\alpha-1)=\alpha_1$ per la falda considerata di quella superficie.

Similmente, scelto un generico S_{r-3} di S_r, il punto P è α-plo per ∞^1 gruppi ed $(\alpha+\alpha_1)$-plo per un gruppo della g_n^2 staccata su C dagl'iperpiani passanti per lo S_{r-3}; mentre, quando questo appoggiasi genericamente a t_2, P resta α-plo per ∞^1 gruppi, ma diventa $(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$-plo per uno di essi. E se, infine lo S_{r-3} appoggiasi, in modo generico, a t_1, P diviene $(\alpha+\alpha_1)$-plo per ∞^1 gruppi e $(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$-plo per uno di essi. Nel primo caso P assorbe $2\alpha+\alpha_1-3$ punti del gruppo $M_{n,2}$ di quella g_n^2; nel secondo caso ne assorbe $2\alpha+\alpha_1+\alpha_2-3$; nel terzo $2\alpha+2\alpha_1+\alpha_2-3$. Onde t_2 ha la molteplicità

$$(2\alpha+\alpha_1+\alpha_2-3)-(2\alpha+\alpha_1-3)=\alpha_2$$

per la falda della V_3 riempita da piani osculatori di C, che corrisponde al ramo γ, e t_1 ha per essa la molteplicità

$$(2\alpha+2\alpha_1+\alpha_2-3)-(2\alpha+\alpha_1-3)=\alpha_1+\alpha_2.$$

In generale, si giunge analogamente alla conclusione:

Sia Γ la falda della V_{k+1} osculatrice alla curva C, riempita degli S_k osculatori ad un ramo γ di C, il quale abbia i carat-

teri $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$. *Allora lo* S_h *osculatore nella origine di* γ, *ha, per la falda* Γ, *la molteplicità* $\alpha_h + \alpha_{h+1} + \ldots + \alpha_k$ $(h=0, 1, \ldots, k)$.

Quando l'origine del ramo è un punto generico di C, *lo* S_k *osculatore in esso sarà* $(k+1-h)$*-plo per la* V_{k+1} *osculatrice.*

Ne discende che per ogni varietà osculatrice quella di dimensione immediatamente inferiore è doppia; quella di dimensione inferiore di due unità, tripla; ecc. In particolare, per la V_{k+1} osculatrice la curva C è $(k+1)$-pla.

38. **Formule di** Cayley, **di** Veronese, **e di** Segre. — Le formule di cui intendiamo occuparci in questo numero appartengono, come le formule di Plücker, al campo della geometria proiettiva [1]. Tuttavia le esponiamo qui, quali utili applicazioni numerative dei risultati di geometria sopra una curva finora ottenuti.

Le formule di Cayley, relative alle curve algebriche sghembe, son le analoghe delle formule di Plücker per le curve piane. Esse riferisconsi ad una curva sghemba C, d'ordine n, dotata delle singolarità più elementari. Per una curva siffatta, oltre all'ordine, posson considerarsi i seguenti caratteri proiettivi:

n_1 = rango, cioè numero delle tangenti di C appoggiate ad una retta generica dello spazio;

n_2 = classe, cioè numero dei piani osculatori a C per un punto generico;

ρ = numero delle cuspidi o punti stazionari ordinari, cioè di punti origini di rami (2, 1, 1), di 2° ordine, rango 1, classe 1;

ρ_1 = numero delle tangenti stazionarie o flessi ordinari, cioè di punti origini di rami (1, 2, 1);

ρ_2 = numero dei piani stazionari o piani iperosculatori ordinari, cioè di punti origini di rami (1, 1, 2);

h = numero dei nodi apparenti, cioè dei nodi della proiezione generica di C da un punto sopra un piano, intendendosi incluso in h anche il numero degli eventuali nodi (ordinari) di C, che sono i soli punti multipli, origini di più d'un ramo, che ammettiamo poter esistere sulla curva;

(1) Ved. Bertini, *Iperspazi*, pag. 490 e segg.

b = numero delle bitangenti apparenti, cioè delle bitangenti (ordinarie) della proiezione piana generica di C, intendendosi incluso in b anche il numero delle bitangenti effettive (ordinarie) di C; sicchè in definitiva b risulta la somma del numero di queste bitangenti e della classe della sviluppabile dei piani bitangenti di C;

η = numero duale di h; cioè numero degli *assi* di C giacenti in un piano generico, ove per asse intendesi una retta giacente in due piani osculatori (distinti o coincidenti) in due punti diversi di C;

β = numero duale di b; cioè ordine della linea doppia nodale dello sviluppabile osculatrice a C, della quale fanno parte, in quanto generatrici doppie, le eventuali bitangenti effettive di C.

Applicando le formule di Plücker (nn. 11, 35) alla proiezione piana generica di C, si ottengon subito le relazioni:

$$(17)\qquad \begin{cases} n_1 = n(n-1) - 2h - 3\rho \\ n = n_1(n_1 - 1) - 2b - 3\rho_1 - 3n_2 \\ 3(n_1 - n) = \rho_1 + n_2 - \rho \end{cases};$$

dalle quali, per dualità, si traggono le

$$(18)\qquad \begin{cases} n = n_2(n_2 - 1) - 2\eta - 3\rho_2 \\ n_2 = n_1(n_1 - 1) - 2\beta - 3\rho_1 - 3n \\ 3(n_1 - n_2) = \rho_1 + n - \rho_2 \end{cases}.$$

Le (17), (18) costituiscono insieme le *formule di* Cayley [1].

Le formule di Veronese estendono le formule di Cayley ad una curva iperspaziale C, d'ordine n dello S_r, dotata delle singolarità più elementari, la cui natura preciseremo a mano a mano, ma per la quale introduciamo intanto i seguenti caratteri proiettivi:

n_k = k-esimo rango $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$; cioè numero degli S_k osculatori di C appoggiati ad un S_{r-k-1} generico di S_r;

ρ_k = numero dei punti il cui S_k osculatore è stazionario (in modo affatto generale), cioè dei punti origini di rami

(1) Ved. Journal de Math., $\mathbf{10}_1$, 245 (1845).

aventi tutti i ranghi (ordine = 0-esimo rango) eguali ed 1, tranne il k-esimo.

d_0 = numero dei nodi apparenti (nodi della proiezione di C da un S_{r-3} generico sopra un piano), ivi incluso il numero degli eventuali nodi effettivi di C, che sono i soli punti multipli origini di più d'un ramo, che ammettiamo poter esistere sulla curva;

δ_1 = numero delle bitangenti apparenti, che si scinde nella somma del numero delle eventuali bitangenti effettive di C e del numero degli S_3 bitangenti di C, appoggiati a un generico S_{r-3} secondo una retta.

Applicando alla proiezione piana generica di C le formule di Plücker, si ha:

$$(19)\qquad \begin{cases} n_1 = n(n-1) - 2d_0 - 3\rho_0 \\ n\ = n_1(n_1-1) - 2\delta_1 - 3\rho_1 - 3n_2 \\ 3(n_1 - n) = \rho_1 + n_2 - \rho_0 \end{cases} .$$

Per ottenere altre terne di formule colleganti i caratteri proiettivi di C, applicheremo le (19) alla curva sezione C_k della V_{k+1} osculatrice a C, con un generico S_{r-k}. Per questa C_k c'è da considerare:

n_k = (k-esimo rango di C) = ordine di C_k;

n_{k+1} = [$(k+1)$-esimo rango di C] = primo rango di C_k, perchè le tangenti di C_k sono le traccie sullo S_{r-k} degli S_{k+1} osculatori di C;

n_{k+2} = [$(k+2)$-esimo rango di C] = secondo rango di C_k, perchè i piani osculatori di C_k son le traccie degli S_{k+2} osculatori di C;

$\rho_k + n_{k-1}$ = numero delle cuspidi di C_k (nn. 25, 37);

ρ_{k+1} = numero dei flessi di C_k;

d_k = numero dei nodi apparenti di C_k, ivi incluso il numero degli eventuali nodi effettivi di C_k, che provengono dagli S_k biosculatori di C e dai punti di C_k, che stanno in due diversi S_k osculatori;

δ_{k+1} = numero delle bitangenti apparenti di C_k, tra le quali son comprese le eventuali bitangenti effettive di C_k, che provengono dagli S_{k+1} biosculatori di C o dalle coppie di S_{k+1} osculatori che tagliano S_{r-k} lungo una medesima retta.

Applicando le (19) alla C_k avremo dunque:

$$(20)\qquad \begin{cases} n_{k+1} = n_k(n_k-1) - 2d_k - 3\rho_k - 3n_{k-1} \\ n_k = n_{k+1}(n_{k+1}-1) - 2\delta_{k+1} - 3\rho_{k+1} - 3n_{k+2} \\ 3(n_{k+1} - n_k) = \rho_{k+1} + n_{k+2} - \rho_k - n_{k-1} \end{cases} .$$

Queste formule potranno applicarsi da $k=1$ a $k=r-3$. Per $k=r-2$ si avrà da considerare la V_{r-1} riempita dagli S_{r-2} osculatori di C, ed essa dovrà esser segata con un piano, per ottenere la curva C_{r-2}, alla quale potremo applicare direttamente le formule di Plücker, senza ricorrere ad alcuna proiezione. La C_{r-2} è di ordine n_{r-2}, di classe n_{r-1}; ha $\rho_{r-2}+n_{r-3}$ cuspidi; ρ_{r-1} flessi; d_{r-2} nodi; δ_{r-1} bitangenti; onde:

$$(21)\qquad \begin{cases} n_{r-1} = n_{r-2}(n_{r-2}-1) - 2d_{r-2} - 3\rho_{r-2} - 3n_{r-3} \\ n_{r-2} = n_{r-1}(n_{r-1}-1) - 2\delta_{r-1} - 3\rho_{r-1} \\ 3(n_{r-1} - n_{r-2}) = \rho_{r-1} - \rho_{r-2} - n_{r-3} \end{cases} .$$

Le (19), (20), (21), che sono complessivamente $r-1$ terne, si chiamano le *formule di* Veronese [1].

Formule più generali, colleganti i ranghi di una curva iperspaziale dotata di singolarità qualunque, furono date da Segre [2].

La curva irriducibile C, dello S_r, abbia l'ordine n, i ranghi $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$ e il genere p. Uno generico dei suoi rami abbia i caratteri $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$.

La considerazione della g_n^1 staccata su C da un fascio generico di iperpiani, porge subito una prima relazione:

$$(22)\qquad \Sigma(\alpha-1) + n_1 - 2n = 2p - 2.$$

Altre relazioni si ottengono considerando la C_k intersezione della V_{k+1} osculatrice a C, con un generico S_{r-k}. Teniamo conto (n. prec.) che lo S_k osculatore a C nell'origine di un ramo γ di caratteri $(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$, è α_k-plo per la falda di V_{k+1} corrispondente a γ, cosicchè per C_k la intersezione di quello S_k collo S_{r-k} segante, è origine di un ramo d'ordine α_k. Inoltre C_k ha n_{k-1} cuspidi nei punti ove lo S_{r-k} incontra la V_k osculatrice a C; ed il suo primo rango è n_{k+1}. Considerando pertanto

(1) *Behandlung*, nn. 31-33.

(2) *Introduzione*, n. 43.

la $g^1_{n_k}$ staccata su C_k da un fascio generico d'iperpiani, verrà:

$$(23)\qquad \Sigma(\alpha_k - 1) + n_{k-1} + n_{k+1} - 2n_k = 2p - 2,$$

che potrà applicarsi da $k = 1$ a $k = r - 2$.

La interpretazione numerativa della (15) (n. prec.) dà poi subito:

$$(24)\qquad \Sigma(\alpha_{r-1} - 1) + n_{r-2} - 2n_{r-1} = 2p - 2.$$

Queste formule son in numero di r. Moltiplicando la prima per r, la seconda per $r-1$,..., la penultima per 2, l'ultima per 1, e sommando a membro a membro, viene:

$$(25)\qquad \Sigma\left[r\alpha + (r-1)\alpha_1 + \dots + 2\alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} - \frac{r(r+1)}{2}\right] = $$
$$= (r+1)(n + rp - r),$$

formula che fornisce il numero degli iperpiani stazionari o iperosculatori di C, colla indicazione del numero delle volte che un iperpiano stazionario singolare va contato fra gl'iperpiani stazionari ordinari ($\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_{r-2} = 1$, $\alpha_{r-1} = 2$).

È la formula stessa esposta nel n. prec. pei punti $(r+1)$-pli di una g^r_n (¹). Qui la g^r_n è quella delle sezioni iperpiane di C.

Considerando invece le prime k delle formule di Segre; moltiplicando la prima per k, la seconda per $k-1$,..., l'ultima per 1 e sommando a membro a membro, viene:

$$(26)\qquad n_k = (k+1)(n+kp-k) - \Sigma\left[k\alpha + (k-1)\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} - \frac{k(k+1)}{2}\right],$$

formula che fornisce il k-esimo rango di C (per $k = r-1$, la classe).

Se C non possiede che rami con uno solo dei caratteri eguali a 2 e gli altri eguali ad 1, come nel caso delle formule di Veronese, conservando pel numero di questi rami le notazioni già introdotte, si hanno le formule:

$$(27)\qquad n_k = (k+1)(n+kp-k) - k\rho - (k-1)\rho_1 - \dots - 2\rho_{k-2} - \rho_{k-1},$$
$$(28)\qquad \rho_{r-1} = (r+1)(n+rp-r) - r\rho - (r-1)\rho_1 - \dots - 2\rho_{r-2},$$

che furon date dallo stesso Veronese (²).

(¹) Si badi che non trattasi di una dimostrazione essenzialmente nuova, rispetto a quella del n. prec.

(²) *Behandlung*, n. 33.

La nozione di genere d'una curva, introdotta nel presente Capitolo, è di fondamentale importanza. Essa è dovuta a Riemann [J. f. Math., 54, 115 (1857)] il quale vi giunse attraverso la considerazione della connessione della superficie (detta appunto di Riemann), imagine reale della totalità dei punti complessi della curva; il che noi vedremo in appresso. Riemann stabilì per questa via l'invarianza del genere di fronte alle trasformazioni birazionali e dimostrò pure la formula (6) del n. 34, con un significato formalmente diverso, benchè sostanzialmente equivalente, pei numeri α, n che in essa compajono. A Clebsch [J. f. Math., 63, 189 (1863); 64, 43 (1864)] spetta di aver posto pel primo in rilievo l'importanza del genere per la geometria delle curve algebriche. È sua la denominazione di *Geschlecht*, tradotta in italiano da Cremona con la parola *genere*. Cayley (1865) adottò la denominazione *deficiency*. E Weierstrass introdusse la denominazione *Rang* (rango), considerando il genere p da un diverso punto di vista, che si vedrà nel successivo Capitolo. La formula (5) del n. 34 è di Clebsch. Essa è però collegata ad una proprietà delle aggiunte d'ordine $n-3$ (ved. n. 45), che trovavasi già in Riemann. La prima dimostrazione puramente algebrica dell'invarianza del genere è di Clebsch-Gordan (Th. der Abel'schen Funktionen, Leipzig, 1866, § 15); altre dimostrazioni geometriche furono poi date da Cremona [Bologna Mem. 6_2 (1867)], Bertini [Giorn. di mat. 7, 105 (1869)], Zeuthen [Paris C. R. 70, 743 (1870)], Schubert [Math. Annalen, 16, 180 (1879)].

La definizione del genere mediante la formula (6) del n. 34, che ne pone subito in luce l'invarianza, fu ottenuta per mezzo di brevi e semplici considerazioni geometriche da Segre (Introduzione, § 8); ma essa trovavasi già, sotto veste più analitica, oltre che in Riemann, anche in Noether [Math. Annalen, 8, 497 (1874)]. Un ulteriore passo in questa direzione fu fatto da Enriques, colla introduzione della serie jacobiana, la quale conduce nel modo più rapido sia alla definizione e alla invarianza del genere, come al significato funzionale della (6), e quindi alla nozione ed invarianza della serie canonica. Questa trattazione della teoria, delineata da Enriques [Boll. di bibl. e storia delle matematiche, 2, 76 (1899) e Torino Atti, 37, 19 (1901)], fu sistematicamente sviluppata dall'Autore [Lezioni di geometria algebrica (litografate), Padova, Draghi, 1908 e Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig, Teubner, 1921, Cap. IV]. Si vegga anche, in proposito, la nota dell'Autore in Palermo Rend. 17, 82 (1902). Il procedimento per la determinazione del gruppo jacobiano di una g^1_n, seguito nel presente volume, è diverso da quello delle citate « Lezioni », ed è dovuto a De Franchis [Palermo Rend. 34, 165 (1912)].

La serie canonica (così denominata da Segre) fu considerata prima da Brill e Noether [Math. Annalen, 7, 278 (1873)], come la serie (completa) staccata sulla curva (piana) d'ordine n dalle aggiunte d'ordine $n-3$ (ved. il Cap. V). Nella loro classica Memoria, su cui avremo da tornare, quegli Autori dimostrarono algebricamente la invarianza della serie canonica (Invarianzsatz), che era del resto contenuta implicitamente nel legame scoperto da Riemann, tra gli integrali abeliani di 1ª specie, appartenenti alla curva, e le curve aggiunte di ordine $n-3$ (¹).

(¹) Ved. le mie *Vorlesungen*, Cap. 8°, § 2. La teoria degl'integrali abeliani sarà sviluppata in un successivo volume di questo trattato.

Circa l'applicazione fatta, nei nn. 35-37, della formula riemanniana (6), per stabilire il modo come si corrispondono per dualità i caratteri proiettivi di un ramo di curva piana o iperspaziale, ci limitiamo per ora a ricordare che tale corrispondenza per dualità, intuita, più che dimostrata, da CAYLEY (1866) pei rami di curve piane, fu per essi dimostrata, mediante la loro rappresentazione parametrica, da HALPHEN (1874-77), e, collo stesso strumento analitico, pei rami di curve iperspaziali, da FINE (1886-87) (2). Altre notizie bibliografiche sui rami ci riserviamo di dare più tardi tornando sulle singolarità delle curve.

La formula che fornisce il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r è di BRILL [Math. Annalen, 4, 528 (1871)]. Essa ritrovasi anche in VERONESE (l. c., p. 201) come numero degli iperpiani stazionari di una curva iperspaziale (ved. la formula (28) di pag. 142) e in CASTELNUOVO [Torino Atti, 24, 346 (1889)]. La dimostrazione da noi esposta nel n. 37 è sostanzialmente quella di SEGRE («Introduzione», n. 42), completata in guisa da ottenere la caratterizzazione funzionale del gruppo dei punti $(r+1)$-pli (invece della mera formula numerativa) e semplificata in modo da non aver da studiare a parte il caso delle serie lineari composte. A SEGRE è pure dovuta la formula che assegna la molteplicità di un punto di caratteri $(i_0, i_1, \ldots, i_{r-1})$ entro al gruppo dei punti $(r+1)$-pli («Introduzione», n. 43). Un caso particolare di questa formula trovavasi in VERONESE (formula (28) di pag. 142) e un altro in HURWITZ [Math. Annalen, 41, 211 (1892)]. La formula stessa per le curve razionali era stata data da GUCCIA [Palermo Rend., 7, 54 (1893)]. A questa formula di GUCCIA ci si può ricondurre, osservando che la molteplicità in questione dipende soltanto da proprietà differenziali della curva (ved. più sotto).

Come conseguenza del principio di corrispondenza di CAYLEY-BRILL l'equivalenza (11) trovasi nelle «Lezioni» del 1908 dell'Autore (ved. anche le «Vorlesungen», pag. 187). DE FRANCHIS (l. c.) la stabilisce mediante considerazioni analitiche dirette, estendendo il procedimento esposto al n. 33. Più tardi ENRIQUES [Lincei Rend., 28_5, 370 (1919); ENRIQUES-CHISINI, vol. III, 66 (1924)] indicò un altro metodo per trovare la formula (16) e il suo significato funzionale. Questo metodo consiste nello estendere il procedimento con cui lo stesso ENRIQUES arriva alla serie jacobiana di una data serie. La determinazione di certi coefficienti numerativi, che compajono nella equivalenza da dimostrarsi, quando essa si riferisca ad una serie con punti fissi, considerata come limite di una senza punti fissi, viene ricondotta all'analoga determinazione sulle curve razionali, profittando del carattere differenziale della questione. L'idea di determinare per questa via i coefficienti incogniti di un problema numerativo, trovavasi già in un lavoro dell'Autore [Torino Mem., 50_2, 82 (1901)].

La formula di cui stiamo parlando è caso particolare di una molto generale di JONQUIÈRES (1866), che vedremo in seguito, e della quale il TORELLI (1906) assegnò il significato funzionale.

(2) Il procedimento di FINE, opportunamente semplificato da SEGRE, trovasi in BERTINI, *Iperspazi*, p. 449.

CAPITOLO QUINTO

La geometria delle serie lineari secondo il metodo rapido.

39. Un lemma sopra i gruppi di punti di una curva. — In questo Capitolo arriveremo al punto culminante della geometria sopra una curva, coi teoremi più sostanziali della teoria. Ci giova premettere all'uopo il seguente lemma:

Data una curva algebrica irriducibile C, è sempre possibile determinare un intero positivo ν, tale che ogni gruppo di $m \geq \nu$ punti generici di C sia contenuto in una serie lineare infinita d'ordine m.

Prendiamo come modello proiettivo di C una curva piana f, d'ordine n. Dico che su f un gruppo G di $n^2 + \lambda (\lambda \geq 0)$ punti generici (e quindi semplici e distinti), sta in una $g_{n^2+\lambda}$ almeno ∞^1.

Conduciamo all'uopo per G una curva φ d'ordine $l (\geq n)$, che non contenga come parte f (φ si può formare, ad esempio, mediante rette passanti pei punti di G). Sia H il gruppo delle $ln - n^2 - \lambda$ intersezioni ulteriori di φ con f. L'infinità ρ delle curve d'ordine l per H, soddisfa alla disuguaglianza:

$$\rho \geq \frac{l(l+3)}{2} - ln + n^2 + \lambda .$$

Quindi la serie lineare staccata da esse su f, fuori di H, ha la dimensione:

$$\sigma = \rho - \frac{(l-n)(l-n+3)}{2} - 1 \geq \frac{n(n+3)}{2} + \lambda - 1 .$$

Ora, essendo $n \geq 1$, $\lambda \geq 0$, risulta in ogni caso $\sigma \geq 1$.

Pertanto, esiste un intero $\nu \leq n^2$, che soddisfa al Lemma.

40. **Nuova definizione che ne consegue pel genere di una curva.** — In base al Lemma, c'è un minimo pel numero dei punti della curva irriducibile C, che possono scegliersi genericamente per determinare una serie lineare infinita. Detto $p+1$ questo minimo $(p \geq 0)$, si chiamerà p il *genere della curva.*

Tale definizione coincide, salvo la veste geometrica, con quella (analitica) di WEIERSTRASS, cui accennavamo alla fine del Cap. precedente. La identità del numero p così definito, con quello designato al n. 34 colla stessa lettera e collo stesso nome, risulterà fra breve (n. 43).

Ma prima trarremo molte conseguenze, di cui alcune nuove e notevoli, dall'attuale definizione del genere.

Intanto è chiaro che *il genere è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali.*

Si ritrova inoltre che *le curve razionali son caratterizzate dall'avere $p = 0$.* Invero, le curve razionali son quelle per cui la serie dei singoli punti è una g_1^1.

41. **Serie lineari non speciali e speciali.** — Cerchiamo una relazione fra ordine n e dimensione r di una g_n^r completa, data sulla curva C, di genere p.

Cominciamo da $n = p + 1$. Una g_{p+1} completa *generica* (cioè individuata da $p+1$ punti generici di C) avrà certo dimensione $r = 1$, perchè, se avesse dimensione 2 (o maggiore), un gruppo G di p punti generici di C, insieme ad un altro punto O della curva, individuerebbe una serie $|G+O|$, d'ordine $p+1$, il cui resto, rispetto ad O, sarebbe una serie ∞^1 (almeno) contenente G. E allora $p+1$ non sarebbe il minimo ordine per cui una generica g_{p+1} è infinita.

La totalità degli ∞^{p+1} gruppi di $p+1$ punti di C distribuiscesi dunque in ∞^p serie complete g_{p+1} distinte tra loro. Particolari g_{p+1}, costituenti entro la varietà delle ∞^p serie predette, una varietà subordinata, potranno però avere dimensione > 1.

Passiamo alle serie d'ordine $n > p+1$. Una g_{p+2} completa, generica, avrà dimensione $r = 2$, perchè se no una generica g_{p+1} avrebbe dimensione > 1. Similmente una generica g_{p+3} completa avrà dimensione 3; e così proseguendo. In generale si conclude che:

Sopra una curva C di genere p, una generica serie lineare completa g_n^r d'ordine $n \geq p$, ha la dimensione $r = n - p$. Una g_n^r particolare potrà però avere dimensione $r > n - p$. Gli ∞^n gruppi di n punti di C si distribuiscono in ∞^p serie lineari complete distinte.

Chiameremo *speciale* una g_n^r (d'ordine n, anche minore di p) quando ha la sua dimensione $r > n - p$. *Non speciale* invece è una g_n^r completa di dimensione $r = n - p$ (e perciò di ordine $n \geq p$).

Poichè per una g_n^r completa d'ordine $n < p$, è senz'altro $r > n - p$ $(r \geq 0)$, si può dire che:

Per ogni serie completa g_n^r è $r \geq n - p$.

Inoltre, se si osserva che le g_n complete d'ordine $n \leq p - 1$ dipendono al più da $p - 1$ parametri, se ne trae che *una serie lineare completa g_n^r, variabile in un sistema continuo ∞^p, ha l'ordine $n \geq p$ ed è non speciale.*

Proviamo ora che:

Una serie lineare d'ordine $n > 2p - 2$ è sempre non speciale.

Consideriamo le g_n complete d'ordine $n = 2p - 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$. Dico che, non soltanto la generica di queste g_n, ma *ogni* g_n è non speciale. E invero, se esistesse una g_n^{n-p+1}, ovvero $g_n^{p+\varepsilon}$, preso un gruppo G di p punti variabili su C, la serie residua di G rispetto a quella $g_n^{p+\varepsilon}$, sarebbe una $g_{p-1+\varepsilon}^{\varepsilon}$ variabile, speciale, dipendente da p parametri; mentre abbiamo poco fa osservato che le $g_{p-1+\varepsilon}$ speciali sono meno che ∞^p.

Vale anche il teorema:

Una serie lineare di dimensione $r > p - 1$ è sempre non speciale (ed ha l'ordine $n \geq 2p$).

Se, infatti, per una g_n^r completa è $r = p + \varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$, e quindi $n \geq p + \varepsilon$ $(n \geq r)$, il residuo del predetto gruppo G variabile, rispetto a quella g_n^r, è una g_{n-p}^{ε} completa, variabile in un sistema continuo ∞^p, e quindi, a norma di un'osservazione or ora fatta, l'ordine della serie deve esser non minore di p e la serie stessa dev'essere non speciale. Si ha cioè:

$$n - p \geq p, \quad \varepsilon = (n - p) - p,$$

e perciò $r = n - p$, $n \geq 2p$.

42. **Serie lineari le cui imagini proiettive son curve sicuramente prive di punti multipli.** — Fissiamo sulla solita curva C una g_n^r completa con $n > 2p$ e quindi $r = n - p$. Una tal g_n^r si darà assegnando un gruppo di $n > 2p$ punti

di C. Essa non può avere punti fissi, perchè, se ne avesse i, distinti o coincidenti, tralasciandoli, si otterrebbe una g^r_{n-i}, di dimensione $r > n - i - p$, e quindi certo speciale, il che contrasta col fatto che, essendo $r = n - p > p$, la serie stessa, pel n. prec., non può essere speciale!

Nè la g^r_n può esser composta, perchè se i gruppi di g^r_n passanti per un punto generico P di C, passassero in conseguenza per qualche altro punto Q, il resto della coppia PQ, rispetto alla g^r_n, sarebbe una g^{r-1}_{n-2} speciale con $r - 1 > p - 1$, contrariamente al n. prec.

Si può quindi, mediante la g^r_n, trasformare birazionalmente C in una curva Γ d'ordine n dello S_r, imagine proiettiva della g^r_n.

Dico che Γ non ha punti multipli. Invero, se O è un punto s-plo ($s \geq 1$) di Γ, gl'iperpiani per O staccano ulteriormente su Γ una g^{r-1}_{n-s} completa di dimensione $r - 1 = n - p - 1 > p - 1$, e quindi non speciale. Dovrà perciò essere $r - 1 = (n - s) - p$, donde $s = 1$. La conclusione è che:

Una curva algebrica irriducibile di genere p, può sempre trasformarsi birazionalmente in una curva (normale) di ordine $n > 2p$, dello spazio S_{n-p}, priva di punti multipli. Anzi ogni curva di tali ordine e genere, appartenente allo S_{n-p}, è priva di punti multipli.

Il fatto che Γ sia priva di punti multipli, nei riguardi della g^r_n esistente su C, qualora ogni punto multiplo di C si pensi dal punto di vista della geometria sull'ente (come sovrapposizione cioè di tanti punti per quanti sono i rami di C, di cui esso è origine; n. 23), equivale a ciò: che su C non esista alcun gruppo di s (≥ 2) punti che presenti *una sola* condizione ai gruppi di g^r_n obbligati a contenerlo; o, ciò che è lo stesso, un gruppo di s punti tali che tutti i gruppi di g^r_n contenenti uno di essi, contengano in conseguenza i rimanenti $s - 1$ punti.

Un gruppo siffatto dicesi un *gruppo neutro*, rispetto alla g^r_n. Con questa denominazione si può enunciare:

Sopra una curva di genere p, una g^r_n completa, con $n > 2p$, è priva di gruppi neutri (ed è quindi semplice).

43. Completezza della serie lineare segata sopra una curva piana, dotata di soli nodi, dalle aggiunte di un dato ordine. Equivalenza della definizione del n. 40 e delle precedenti definizioni del genere. — Per conseguire gli scopi indicati dal titolo di questo n., converrà che cominciamo collo stabilire il seguente Lemma, dovuto a CASTELNUOVO (1):

Se sopra una curva C, di genere p, si hanno due serie g^{n-p}_n e g_m, la prima delle quali, completa e non speciale, contenga parzialmente la seconda, e la differenza delle due serie sia ancora non speciale, allora la loro somma minima è completa (non speciale).

Dal seguito risulterà che, se una serie è non speciale, ogni serie che la contenga parzialmente, lo è pure; sicchè, se è non speciale g_n, lo è pure la somma di g_n e di g_m. Ma, anche senza, pel momento, saper questo, a noi basta di dimostrare il lemma nell'ipotesi $n > 2p - 2$, chè allora risultano non speciali, in virtù del n. 41, tanto la serie g_n, come la suddetta somma ($n + m > 2p - 2$).

Se la somma minima g^r_{n+m} non fosse completa ed avesse quindi la dimensione $n + m - p - \delta (\delta > 0)$, un gruppo G_m della serie g_m imporrebbe, ai gruppi di g^r_{n+m}, $m - \delta$ condizioni. E questo è assurdo, perchè G_m, dando come residuo rispetto a g^{n-p}_n, una serie non speciale, impone m condizioni distinte ai gruppi di g^{n-p}_n, che son parti dei gruppi di g^r_{n+m}.

Ciò premesso, e supposto che la curva C che si considera, sia piana, d'ordine n, e dotata di soli nodi, in numero di d, indichiamo pel momento con p' la differenza $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, cioè (n. 34) il genere, nel senso di CLEBSCH.

Alle curve aggiunte a C (curve passanti pei d nodi, n. 34), quando il loro ordine l è abbastanza grande, i nodi di C presentano d condizioni distinte, perchè si può sempre formare, p. es. mediante rette uscenti dai nodi, una curva d'ordine l ($\geq d$) passante per $d - 1$ qualunque dei nodi, e non pel rimanente. Sicchè la dimensione della serie $g^{r_l}_{n_l}$ che esse aggiunte staccano su C, fuori dei nodi, vale:

$$r_l = \frac{l(l+3)}{2} - d - \frac{(l-n)(l-n+3)}{2} - 1 = n_l - p',$$

essendo $n_l = nl - 2d$.

(1) Annali di Matematica, 25_2, 318 (1897) (nota a piè di pagina). Ivi il lemma è dato per tutt'altro scopo.

Proviamo che, quando appunto sia l abbastanza grande, la $g_{n_l}^{r_l}$ è completa (non speciale), cosicchè (n. 41) viene pure $r_l = n_l - p$, e quindi $p = p'$.

Denotiamo perciò con G_q un gruppo di $q > 2p-2$ punti generici di C. Allora la serie completa g_m^r, somma di G_q e della g_n^2 delle sezioni rettilinee di C, è certo non speciale ($m = n + q > 2p - 2$), contiene la g_n^2 e lascia come residuo una serie g_q non speciale. Pel lemma, la somma minima g_{n+m}^s delle g_m^r, g_n^2 è completa non speciale. Allo stesso modo si conclude che è completa non speciale la somma minima di g_{n+m}^s e di g_n^2, e quindi anche la somma minima di g_m^r e di $2g_n^2$ (serie segata su C dalle coniche), perchè questa contiene totalmente la precedente. In generale sarà completa la somma minima di g_m^r e di kg_n^2, ove quest'ultima sia la serie staccata su C da tutte le curve d'ordine k.

Sia ora Σ un sistema lineare di curve piane, che segni su C, fuori di un certo gruppo base K, di t punti, la suddetta serie completa g_m^r. Si può supporre che Σ sia di aggiunte, di un certo ordine l, perchè basta aggregare alle sue curve una parte fissa, che sia aggiunta a C [1].

Le aggiunte d'ordine l segnano dunque su C, fuori di K, una g_m^r completa non speciale. Epperò le aggiunte d'ordine $l+k$ segheranno su C, fuori di K, la serie completa non speciale $g_m^r + kg_n^2$, che ha la dimensione $m + kn - p$, ed è la somma minima delle g_m^r, kg_n^2.

Si può infine scegliere k così grande, che il gruppo K presenti alle aggiunte d'ordine $l+k$, t condizioni distinte. Allora K presenterà altrettante condizioni indipendenti ai gruppi della serie g_{m+kn+t} segata su C, fuori dei nodi, dalle predette aggiunte; e poichè il residuo di K, rispetto a tale serie, ha la dimensione $m + kn - p$, così la serie medesima avrà la dimensione $m + kn + t - p$ e sarà perciò completa non speciale.

La conclusione è quella preannunciata: le aggiunte dell'ordine $l+k$ (o di ordine maggiore) così determinato, segano su C, fuori dei nodi, una serie completa non speciale; e quindi, come s'è detto, $p = p'$.

[1] S'intende che K è il gruppo delle intersezioni fisse delle curve di Σ con C, fuori di quelle che dipendono dalla condizione di aggiunzione (una intersezione per ogni ramo uscente da un nodo di C).

Rimane da estendere il teorema della completezza della serie lineare segata dalle aggiunte, alle aggiunte d'un ordine arbitrario (minore cioè del predetto limite).

All'uopo si osservi che il sistema lineare delle aggiunte d'ordine arbitrario l ha la dimensione $R_l \geq \frac{l(l+3)}{2} - d$, e, se in questa vale il segno $>$, la dimensione della serie segata su C dalle aggiunte di quell'ordine, è maggiore di $n_l - p' = n_l - p$, e quindi trattasi di una serie speciale. Ma siccome per $l = n-3$ (n. 34) $n_l = 2p - 2$, così:

La serie lineare staccata su C dalle aggiunte d'ordine $l > n-3$ è non speciale completa.

Per passare infine ai valori di $l \leq n-3$, basta osservare che la serie lineare staccata su C, fuori dei nodi e di n punti allineati, dalle aggiunte d'ordine $n-2$, passanti per quei punti, è completa; ma poichè queste aggiunte si spezzan tutte nella retta che contiene quegli n punti ed in aggiunte d'ordine $n-3$, si conclude che queste ultime staccan su C una serie completa. Similmente discendesi dall'ordine $n-3$ all'ordine $n-4$; ecc.

La conclusione è che:

Le curve aggiunte, di un ordine arbitrario l, alla curva piana C, dotata di soli nodi, segano su C, fuori dei nodi, una serie lineare completa.

Osservazione I^a. — Uno dei punti essenziali del precedente ragionamento, è là dove si afferma che il gruppo K presenta t condizioni distinte alle curve aggiunte d'ordine abbastanza alto.

La cosa è ovvia, quando i t punti sono distinti tra loro e dai nodi, potendosi formare un'aggiunta d'ordine abbastanza alto, che passi per $t-1$ qualunque di quei punti e non pel rimanente, mediante un'aggiunta non passante per alcuno di quei punti e $t-1$ rette generiche, che escano da altrettanti di essi.

Ma da ciò nulla può dedursi nel caso in cui alcuni dei t punti coincidono (eventualmente anche coi nodi), perchè condizioni in generale indipendenti, possono ben avere per limiti condizioni dipendenti.

Occorre dunque approfondire la cosa. Sia ρ un ramo (lineare) di C, avente l'origine O, potendo O essere anche un nodo della curva. Con un cangiamento di assi può farsi cadere l'origine delle coordinate in O, in modo che nè l'asse x, nè l'asse y siano tangenti ivi a C. Allora (n. 24) la coordinata y dei punti del ramo sarà fornita (per $|x|$ minore di un conveniente numero fisso), in funzione di x, dalla serie

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \dots \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

S'imponga ad una curva d'ordine $l \geq t_1 - 1$ d'avere in O con ρ molteplicità d'intersezione t_1. Per dimostrare che con ciò s'impongono precisamente t_1 condizioni (e non meno), basta provare che esistono curve d'ordine l aventi con ρ in O molteplicità d'intersezione i $(1 \leq i \leq t_1)$ e non superiore. Giacchè allora resta provato che ogni nuova intersezione che si esiga, è una condizione *nuova*, e quindi t_1 intersezioni importano t_1 condizioni indipendenti.

La cosa è evidente per $i = 1$. Basta dunque ammetterla per $i - 1$ e dimostrarla per la molteplicità d'intersezione i. E invero, una curva d'ordine $\geq i - 2$, avente in O con ρ molteplicità d'intersezione esattamente eguale ad $i - 1$, insieme ad una retta generica per O, dà una curva d'ordine $\geq i - 1$, avente in O con ρ molteplicità d'intersezione i e non maggiore.

Si dimostra inoltre facilmente che una curva generica di ordine $l \geq t_1 - 1$, avente O con ρ molteplicità d'intersezione t_1, ha ivi un punto semplice. Si consideri infatti la (1) arrestata ai termini di ordine $< t_1$:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \dots + ex^{t_1 - 1}. \tag{2}$$

La parabola, d'ordine $\leq t_1 - 1$, rappresentata dalla (2), passa per O semplicemente, avendo col ramo ρ molteplicità d'intersezione almeno uguale a t_1. Difatti, sostituendo nella (2), al posto di y, lo sviluppo (1), la serie risultante comincia con termini di ordine $\geq t_1$ in x.

Riferiamoci ora, in modo particolare, al caso in cui O è un nodo di C e δ sia l'altro ramo uscente da O (non tangente a ρ). Una curva d'ordine $\geq t_1$, passante semplicemente per O, e avente ivi con ρ molteplicità d'intersezione $t_1 + 1$ (cioè t_1 intersezioni, oltre quella dipendente dall'aggiunzione), insieme ad una curva d'ordine $\geq j - 1$, passante semplicemente per O, e avente ivi con δ molteplicità d'intersezione j, dà una curva d'ordine $\geq t_1 + j - 1$, che ha con ciascuno dei due rami, all'infuori delle intersezioni dipendenti dall'aggiunzione, molteplicità d'intersezione rispettive t_1, $j - 1$ e non superiori. Facendo variare j da 1 a t_2, si conclude che per le curve d'ordine $l \geq t_1 + t_2 - 1$ passanti per O, l'avere molteplicità d'intersezione ulteriori t_1, t_2, coi rami ρ, δ, equivale a $t_1 + t_2$ condizioni distinte.

Premesso questo, torniamo al nostro sistema Σ. Esso è definito dalla condizione di aggiunzione a C e dall'*ulteriore* gruppo base K. Le condizioni inerenti a K sono di questi tipi:

1) Molteplicità d'intersezione *ulteriore* $t_1 (\geq 0)$, $t_2 (\geq 0)$, delle curve di Σ, coi due rami uscenti da un generico nodo O di C.

2) Molteplicità d'intersezione s delle curve di Σ, col ramo uscente da un generico punto semplice P di C.

Cosicchè risulta $t = \Sigma(t_1 + t_2) + \Sigma s$, la prima somma essendo estesa ai punti analoghi ad O, la seconda ai punti analoghi a P. Orbene, poichè la condizione 1), insieme alla relativa condizione semplice di aggiunzione, può esser separatamente soddisfatta con curve distinte per ciascuno dei nodi, e similmente per la condizione 2), così in complesso la condizione di aggiunzione a C e il gruppo base K, se l è abbastanza grande, equivalgono a $d + t$ condizioni distinte.

Osservazione 2ª. — In un successivo Cap. il teorema concernente la completezza della serie lineare staccata su C dalle aggiunte di un dato ordine, verrà esteso al caso di una curva C con singolarità arbitrarie, definendo opportunamente le curve ad essa aggiunte.

44. Il teorema del resto sotto forma proiettiva. — Nel n. 29 abbiamo dato il teorema del resto sotto forma invariantiva per trasformazioni birazionali ed abbiamo preannunciato una forma proiettiva (dovuta a Brill e Noether) del medesimo teorema.

Chiamato *resto* di un dato gruppo G di punti di C, rispetto alle aggiunte di un dato ordine, un resto del gruppo G rispetto alla serie staccata su C, fuori dei nodi, dalle aggiunte stesse, la forma proiettiva del teorema del resto si enuncia:

Ogni resto di un dato gruppo G rispetto alle aggiunte di determinato ordine, è resto, rispetto alle stesse aggiunte, di un gruppo qualsiasi della serie $|G|$.

Infatti, detto K un resto di G rispetto alle aggiunte di un determinato ordine l, in base al n. prec. le aggiunte di ordine l

passanti per K staccano su C, fuori dei nodi e del gruppo K, la serie lineare *completa* $|G|$, e quindi K è resto di ogni G.

Dalla forma proiettiva del teorema si deduce, viceversa, la forma invariantiva; ma di ciò in seguito, quando esporremo il metodo di BRILL-NOETHER per lo studio della geometria sopra una curva.

Notiamo piuttosto come il teorema proiettivo del resto fornisca *il modo di costruire, mediante le curve aggiunte, una qualunque serie lineare data sulla curva.*

Invero, se si vuol costruire una data serie $|G|$, si sceglierà anzitutto un intero l sì grande, che esistano curve aggiunte passanti per un dato gruppo G della serie. (Una tale aggiunta potrà p. es. formarsi aggregando ad un'aggiunta qualunque, rette uscenti dai singoli punti di G). Considerata una di queste aggiunte, che non contenga come parte C, si costruisca l'ulteriore intersezione K di essa con C (fuori dei nodi e del gruppo G). Allora la serie $|G|$ può essere staccata dalle aggiunte d'ordine l per K.

OSSERVAZIONE. — La costruzione indicata vale pure se la serie $|G|$ possiede punti fissi, costituenti un gruppo H, che farà parte di ogni G. Il ragionamento precedente si riferisce infatti alle serie complete, abbiano esse o no punti fissi.

45. Dimensione della serie canonica. Teorema di riduzione. — Nel n. 34 abbiamo dimostrato che la serie canonica è segata sulla curva C, d'ordine n, fuori dei nodi, dalle aggiunte d'ordine $n-3$. E da ciò abbiamo tratto il limite inferiore $p-1$ per la dimensione della serie canonica. Siamo ora in grado di precisar la cosa dimostrando che *la dimensione della serie canonica è esattamente* $p-1$. Invero, se fosse maggiore, avremmo sulla curva una g^{p}_{2p-2} e un gruppo generico di p punti di C avrebbe come residuo un gruppo di $p-2$ punti: il che è assurdo, perchè allora le serie lineari d'ordine $p-2$ dipenderebbero da p parametri.

La serie canonica è dunque una g^{p-1}_{2p-2}; proveremo anzi tra breve ch'essa è l'unica g^{p-1}_{2p-2} esistente sulla curva.

Nel seguito, per brevità, le curve d'ordine $n-3$ aggiunte a C, si chiameranno, ove non siavi ambiguità, curve φ; e i gruppi della serie canonica si diranno *gruppi canonici*.

Ciò premesso, dimostriamo il seguente *teorema di riduzione* (così chiamato da NOETHER):

Sia $|G|$ una serie lineare (completa), segata da un sistema di curve φ, e P un punto della curva C, che non appartenga a tutte le φ passanti per un gruppo G di quella serie. Allora per la serie completa $|G+P|$ il punto P è fisso.

Dicasi H un resto della serie $|G|$ rispetto alle φ, cosicchè $|G|$ possa segarsi mediante le φ passanti per H; ed a sia una generica retta uscente da P; A il gruppo delle ulteriori $n-1$ intersezioni di questa retta con C. Secondo l'ipotesi, esiste almeno una φ passante pel gruppo $G+H$, ma non per P. Tale φ, insieme ad a, fornisce una curva aggiunta d'ordine $n-2$ passante per $G+H+P+A$. Onde $H+A$ è un resto della serie $|G+P|$ rispetto alle aggiunte d'ordine $n-2$. Ne segue che la serie completa $|G+P|$ è staccata dalle aggiunte d'ordine $n-2$ passanti per $H+A$; e siccome queste aggiunte hanno $n-1$ punti sulla retta a, esse si spezzano tutte nella a e in una φ residua. Ciò significa che P è fisso per la $|G+P|$.

OSSERVAZIONE 1ª. — Il ragionamento non soffre eccezioni quando P coincida con uno dei nodi di C: allora uno dei punti di A coincide con P, ma come origine di quel ramo, cui non appartiene P.

OSSERVAZIONE 2ª. — L'ipotesi del teorema di riduzione è evidentemente soddisfatta quando P è generico sulla curva.

OSSERVAZIONE 3ª. — Il teorema di riduzione assume forma invariante per trasformazioni birazionali, qualora, invece di dire che la serie $|G|$ è segata dalle φ, si dica che è contenuta parzialmente nella serie canonica; e in luogo delle φ passanti per un gruppo G, si parli dei gruppi canonici per G. Come vedremo nel n. successivo le serie contenute nella serie canonica son tutte e sole le serie speciali.

OSSERVAZIONE 4ª. — Poichè la dimensione della serie canonica è $p-1=\frac{n(n-3)}{2}-d$, così *i d punti doppi di C presentano alle aggiunte d'ordine $l \geq n-3$, condizioni indipendenti.* Per $l>n-3$ l'affermazione consegue dal fatto, notato al n. 43, che le curve aggiunte d'ordine $l>n-3$ segano una serie completa non speciale.

46. Il teorema di RIEMANN-ROCH. — Arriviamo finalmente al punto culminante della teoria delle serie lineari, assegnando il significato geometrico della differenza $r-(n-p)$ per una g^r_n completa.

Proviamo anzitutto che *le serie speciali son contenute nella serie canonica.*

Invero, sia, per la nostra g_n^r completa, $r > n - p$. Se $r = 0$ e quindi $n \leq p - 1$, è senz'altro evidente che il gruppo, cui riducesi la g_n^r, appartiene a qualche gruppo canonico. Potremo dunque stabilir l'asserto per induzione dalle g^{r-1} alle g^r.

Sia g_{n-1}^{r-1} il residuo di un punto generico P rispetto alla g_n^r. Poichè $r > n - p$, sarà $(r-1) > (n-1) - p$, e quindi, pel teorema ammesso, la g_{n-1}^{r-1} è contenuta nella serie canonica. Ma allora tutte le φ che passan per un gruppo di g_{n-1}^{r-1} debbon contenere P, se no (n. 45) la serie g_n^r avrebbe il punto P fisso: contro l'ipotesi che questo sia generico. Esiste dunque qualche curva φ contenente un gruppo di g_n^r, epperciò la serie è contenuta nella serie canonica.

Dunque, se un gruppo di una serie completa g_n^r non appartiene ad alcun gruppo canonico, si ha la relazione $r = n - p$.

Suppongasi ora che per un gruppo della serie g_n^r passino i (> 0) gruppi canonici (curve φ) indipendenti.

Essendo $i - 1$ la dimensione della serie residua di un gruppo G della data g_n^r, rispetto alla serie canonica, per $i - 1$, ma non per i punti generici di C, passa *una* curva φ contenente G. Se $i = 1$, ne segue che la serie $|G + P|$, ove P è un punto generico della curva, non è speciale; e poichè essa, a norma del teorema di riduzione, ha il punto fisso P, così la sua dimensione $r = (n + 1) - p$ eguaglia quella della serie $|G| = g_n^r$, la quale è dunque $r = n - p + 1$.

Ebbene, dico che in generale, quando i è qualunque, risulta $r = n - p + i$. Poichè il teorema vale per $i = 0, 1$, supponiamolo vero per il valore $i - 1$ del numero dei gruppi canonici indipendenti passanti per G, e dimostriamolo pel valore i.

Sia dunque i il numero dei gruppi canonici indipendenti passanti per G e P un punto generico. Il numero dei gruppi canonici indipendenti passanti per $G + P$, è $i - 1$, onde la serie $|G + P|$ ha la dimensione $(n + 1) - p + i - 1 = n - p + i$. D'altronde, pel teorema di riduzione, P è fisso per $|G + P|$, onde questa serie ha la stessa dimensione della g_n^r data, e perciò risulta $r = n - p + i$.

Una prima conseguenza della relazione dimostrata è che per una g_n^r contenuta nella serie canonica, essendo $i \geq 1$, risulta $r > n - p$. Cioè s'inverte la proposizione poco fa enunciata e si conclude che *le serie speciali son quelle e soltanto quelle che son contenute nella serie canonica.*

Apparisce allora naturale di assumere come misura della specialità di una serie speciale, il numero i dei gruppi canonici indipendenti, che passano per un gruppo della serie. Chiameremo perciò questo numero *indice di specialità*.

Con tale locuzione, la relazione $r = n - p + i$ si enuncia sotto la forma seguente, che si cita come *teorema di* RIEMANN-ROCH:

Una serie lineare completa d'ordine n e d'indice di specialità i, sopra una curva di genere p, ha la dimensione:

$$r = n - p + i.$$

47. Prime conseguenze del teorema di RIEMANN-ROCH. — Nel n. 45 abbiamo provato che la serie canonica è una g_{2p-2}^{p-1} $(n = 2p - 2,\ i = 1,\ r = p - 1)$. È ora facile dimostrare che *la serie canonica è l'unica serie, esistente sulla data curva di genere p, che abbia l'ordine $2p - 2$ e la dimensione $p - 1$.*

Invero una g_{2p-2}^{p-1}, avendo la dimensione $r = p - 1$ maggiore della differenza $n - p$ fra l'ordine $n = 2p - 2$ e il genere, è speciale, e perciò contenuta (totalmente) nella serie canonica, cioè coincidente con questa, perchè ne ha la dimensione.

La serie canonica non può avere alcun punto fisso, perchè se ne avesse uno, P, astraendone, si otterrebbe una g_{2p-3}^{p-1}; e aggiungendo ai gruppi di questa un altro punto Q, si avrebbe una g_{2p-2}^{p-1} diversa dalla serie canonica.

Altre facili conseguenze del teorema di RIEMANN-ROCH sono le seguenti:

a) *Un gruppo di una g_n^r completa speciale impone ai gruppi canonici che debbano contenerlo, $n - r$ condizioni.*

Detto i l'indice di specialità della g_n^r, si ha infatti

$$i = p - (n - r), \quad \text{ovvero:} \quad i - 1 = p - 1 - (n - r).$$

b) Vale il teorema inverso del teorema di riduzione, così che si può enunciare:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie completa $g_n^r + P$ abbia il punto fisso P, è che la g_n^r sia speciale e che esista qualche gruppo canonico passante per un gruppo di g_n^r, ma non per P (cioè che P non sia fisso per la serie residua di g_n^r rispetto alla serie canonica).

Invero, se $g_n^r + P$ ha il punto fisso P, poichè fra la dimensione e l'ordine della $g_n^r + P$ sussiste la disuguaglianza

$$r \geq (n+1) - p, \quad \text{sarà} \quad r > n - p,$$

e quindi la g_n^r risulterà speciale. Essa sarà inoltre completa, perchè, altrimenti non sarebbe completa la data $g_n^r + P$. Ora, se ogni gruppo canonico per un gruppo di g_n^r passasse anche per P, risulterebbe certo speciale anche la $g_n^r + P$, collo stesso indice di specialità di g_n^r. Cioè un gruppo di g_n^r ed uno di $g_n^r + P$, imporrebbero lo stesso numero di condizioni ai gruppi canonici, contrariamente ad a).

48. **In qual caso la serie canonica è composta. Curve iperellittiche. Teorema di** Clifford. — Cerchiamo se e quando la g_{2p-2}^{p-1} canonica della curva C di genere p, può essere composta con un'involuzione γ_μ^1.

Anzitutto osserveremo che se una g_n^r è composta con una γ_μ^1, deve necessariamente essere $n \geq r\mu$, perchè sulla curva Γ, imagine dell'involuzione, alla g_n^r di C corrisponde una $g_{n:\mu}^r$ (pag. 63); e per questa è $n:\mu \geq r$. Osserviamo inoltre che il segno $=$ può valere solo quando Γ sia razionale, cioè quando la γ_μ^1 riducesi ad una g_μ^1.

Ciò premesso, allorchè sia $n = 2r$, come in particolare accade per la serie canonica, risulterà $n:\mu \geq n:2$ e quindi o $\mu = 1$ o $\mu = 2$. Se la serie è composta, dovrà perciò essere $\mu = 2$ e nella precedente relazione varrà il segno $=$. Dunque:

Una g_{2r}^r (e in particolare la serie canonica) non può che esser composta con una g_2^1.

Viceversa, se sulla curva C di genere $p > 1$ esiste una g_2^1, questa è certo una serie completa e speciale ($r > n - p$) e perciò un suo gruppo presenta $2 - 1 = 1$ condizioni ai gruppi canonici (n. 47, a), cioè tutti i gruppi canonici per un punto di C passano in conseguenza pel punto coniugato di quello nella g_2^1. Si conclude che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè la serie canonica d'una curva di genere $p > 1$ sia composta, è che la curva contenga una g_2^1.

Questa g_2^1 è unica (pag. 63), eppertanto:

Una curva che contenga più di una g_2^1 è razionale ($p = 0$) o ellittica ($p = 1$) (n. 34).

Effettivamente, *una curva razionale contiene $\infty^2 g_2^1$*, che son quelle contenute nella g_2^2 delle coppie di punti della curva.

Invece *una curva ellittica contiene $\infty^1 g_2^1$*. E difatti sopra una curva C di genere 1 ogni serie lineare (effettiva) è non speciale (perchè la serie canonica è di ordine zero; n. 34) e quindi ogni coppia di punti di C definisce una g_2^1 completa. Se si tien fisso un punto A di C e si fa ivi variare un altro punto B, la serie variabile $|A + B|$ descrive tutta la infinità delle g_2^1 di C; la quale infinità risulta perciò birazionalmente equivalente a C, perchè i suoi elementi (serie g_2^1) corrispondono biunivocamente alle posizioni di B.

Una curva di genere $p > 1$, contenente una g_2^1, dicesi *iperellittica*. Le curve di genere $p = 2$ son tutte iperellittiche, perchè la loro serie canonica è una g_2^1. Si può enunciare che:

Se si eccettua il caso delle curve iperellittiche, la serie canonica è sempre semplice.

Dimostriamo ora il seguente *teorema di* Clifford:

Quando g_n^r è speciale, vale la disuguaglianza $n \geq 2r$.

Sia H un resto della g_n^r, che supponiamo completa, rispetto alla serie canonica. Ai gruppi canonici per H un gruppo della g_n^r impone r condizioni, mentre ad un gruppo canonico generico esso impone $n - r$ condizioni (n. 47, a). E poichè, quando si passa da un gruppo canonico generico ad un gruppo variabile in una serie subordinata, com'è il caso appunto dei gruppi canonici per H, non può che accadere che condizioni indipendenti in generale, divengan dipendenti, se riferite alla serie subordinata, così sarà $n - r \geq r$, cioè $n \geq 2r$.

Osservazione. — Evidentemente il teorema è pur vero quando g_n^r sia parziale, ma *il segno $=$ può valere soltanto quando la serie sia completa*, giacchè se g_n^r sta in $g_n^{r'}$ con $r' > r$, sarà $n \geq 2r' > 2r$. Vedremo tosto (n. 50) in quali casi effettivamente può valere il segno $=$.

49. **La curva canonica del genere p.** — Poichè sopra una curva non iperellittica di genere $p (> 2)$ la serie canonica è una g_{2p-2}^{p-1} semplice e senza punti fissi (nn. 47, 48), l'imagine proiettiva di tale serie sarà una curva C d'ordine $2p - 2$ dello spazio S_{p-1}, birazionalmente equivalente alla data curva; e inoltre C resterà definita a meno di una collineazione (pag. 62). Essa chiamasi una *curva canonica* del genere p.

Viceversa, se C è una curva di genere p e d'ordine $2p-2$ dello S_{p-1}, la serie g_{2p-2}^{p-1} delle sue sezioni iperpiane è la serie canonica (n. 47) e quindi C è una curva canonica.

Due curve canoniche del genere p non posson essere birazionalmente equivalenti senza essere omografiche, perchè son le imagini proiettive della medesima serie canonica.

Quando si parla della curva canonica modello di una data curva del genere p, s'intende di alludere ad una qualunque delle curve canoniche omografiche, le quali posson esser costruite a partire dalla data curva.

La curva canonica è normale (pag. 110), perchè la serie canonica è completa.

Se G_n è un gruppo speciale di n punti della curva canonica C, il quale definisca una g_n^r completa, il sistema lineare degli iperpiani di S_{p-1} passanti per G_n avrà (n. 47, *a*) la dimensione $p-1-n+r$, e quindi G_n apparterrà ad uno spazio S_{n-r-1}.

Se, viceversa, un gruppo G_n di n punti di C appartiene ad uno spazio S_{n-r-1} (e non ad uno spazio di dimensione inferiore), l'indice di specialità di quel gruppo sarà $p-n+r$ e perciò esso definirà una g_n^r completa. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di n punti della curva canonica individui una g_n^r completa (speciale), è ch'esso appartenga ad uno spazio di dimensione $n-r-1$ (e non minore).

50. Ulteriore determinazione del teorema di Clifford. — Siamo ora in grado di determinare in quali casi, nella disuguaglianza esprimente il teorema di Clifford (n. 48), vale il segno eguale.

Se per una g_n^r speciale appartenente alla curva canonica C del genere p, è $n=2r$, così che la serie è certo completa (n. 48, Oss.), tutti gl'iperpiani che passan per $r=n-r$ punti generici di C, debbono contenere anche gli r punti, che, insieme ai precedenti, completano il gruppo di g^r da essi individuato.

Il che significa che lo spazio S_{r-1} congiungente r punti generici di C, taglia C in r punti ulteriori. Ora questo è impossibile per $r<p-1$ (pag. 64). D'altronde la dimensione r della g_n^r, che è speciale, non può superare $p-1$; dunque $r=p-1$, $n=2p-2$, e si ha il teorema:

Per una g_n^r speciale, non canonica, sopra una curva non iperellittica, è sempre $n>2r$.

L'ipotesi che la curva non sia iperellittica interviene nel momento in cui si suppone che la g_n^r sia data sulla curva canonica. Nel fatto accade che *sopra una curva iperellittica, per ogni serie speciale completa g_n^r, che sia composta colla g_2^1 e che non possegga punti fissi, vale la relazione $n=2r$.*

Invero, se la data g_n^r è composta colla g_2^1, sarà n pari: $n=2\rho$. Considerata allora sulla curva razionale Γ imagine della g_2^1, la g_ρ^ρ dei gruppi di ρ punti, ad essa corrisponde sulla data curva iperellittica una serie speciale d'ordine $n(\leq 2p-2)$, contenente totalmente la data g_n^r, e quindi coincidente con questa, poichè la g_n^r è completa. Dovrà dunque essere $r=\rho$, cioè $n=2r$.

Viceversa, essendo r arbitrario ($\leq p-1$), la g_n^r ($n=2r$) che sulla data curva iperellittica corrisponde alla g_r^r di Γ, è speciale ed è completa a causa dell'Oss. del n. 48.

Una notevole conseguenza del teorema di Clifford, completato nel modo sopra indicato, è che:

La curva canonica è priva di punti multipli.

Se, invero, un punto P della curva canonica C del genere p, è s-plo per la curva, la serie completa speciale, ma non canonica, staccata su C dagl'iperpiani per P, è una g_{2p-2-s}^{p-2}, e quindi dovrà essere $2p-2-s>2(p-2)$, cioè $s<2$ ovvero $s=1$.

51. Conseguenza dei teoremi precedenti in ordine al problema di trasformare birazionalmente una data curva, in una priva di punti multipli. — Nella Oss. 2ª del n. 21 (pag. 73) abbiamo avvertito che, quando una $g_{n'}^{r'}$ è contenuta parzialmente in una g_n^r, con $n>n'$ ed $r>r'$, non si può sempre affermare che una imagine proiettiva della $g_{n'}^{r'}$ sia omografica alla proiezione di un'imagine proiettiva della g_n^r, fatta da uno spazio appoggiato a quest'ultima curva imagine in $n-n'$ punti; ed abbiamo anche addotto un esempio in contrario.

Possediamo ora tutti gli elementi per approndire la questione, innanzi di veder come si possa, data una curva piana, con singolarità qualunque, costruire una curva iperspaziale, priva di punti multipli, di cui la data sia proiezione.

Anzitutto è chiaro che, se un'imagine proiettiva C' di $g_{n'}^{r'}$ è proiezione di un'imagine proiettiva di g_n^r, fatta da uno spazio $S_{r-r'-1}$ appoggiato a C in $n-n'$ punti, il gruppo K

di questi punti può considerarsi come resto di tutti i gruppi di $g_{n'}^{r'}$ rispetto alla g_n^r.

Viceversa: sulla curva f, ove son date g_n^r e $g_{n'}^{r'}$ esista un gruppo K di $n-n'$ punti, che sia resto di *tutti* i gruppi di $g_{n'}^{r'}$ rispetto a g_n^r. Allora, in un sistema lineare ∞^r di forme, che stacchi su f la g_n^r, scegliamo $r+1$ forme indipendenti $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$, di cui le prime $r'+1$ passino per altrettanti gruppi indipendenti della serie $g_{n'}^{r'}+K$, contenuta totalmente in g_n^r, ed avente il gruppo fisso K. Nello spazio S_r, ove $y_0, y_1, \ldots, y_r$ son coordinate omogenee di punto, la curva C rappresentata da:

$$\rho y_i = \varphi_i \qquad (i=0, 1, \ldots, r),$$

che è un'imagine proiettiva di g_n^r, proiettasi sullo spazio $S_{r'}(y_r = y_{r-1} = \ldots = y_{r'+1} = 0)$, dallo $S_{r-r'-1}$ opposto nella piramide fondamentale delle coordinate, secondo la curva C':

$$\rho y_k = \varphi_k \qquad (k=0, 1, \ldots, r'),$$

la quale risulta appunto un'imagine proiettiva di $g_{n'}^{r'}$.

Dunque *affinchè, date due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ $(n > n', r > r')$, di cui la prima contenga parzialmente la seconda, si possa costruire un'imagine proiettiva della $g_{n'}^{r'}$, che sia proiezione di una conveniente imagine proiettiva della g_n^r, occorre e basta che esista un gruppo di $n-n'$ punti, il quale sia resto di ogni gruppo di $g_{n'}^{r'}$ rispetto a g_n^r.*

Questa condizione, a norma del teorema del resto (n. 29), *è soddisfatta tutte le volte che la g_n^r è completa.* Ma se la g_n^r non è completa, la condizione può non essere soddisfatta. L'eccezione che si presenta per la prima — e di cui l'esempio del n. 21 non è che un caso particolare — è quella di una g_n^r parziale $(r<n)$ sopra una curva razionale (n. 32). Essa contiene la $g_{r'}^{r'}$ dei gruppi di r' punti della curva (qualunque sia $r' \leq r$); e perchè, quando $r'<r$, un'imagine proiettiva di $g_{r'}^{r'}$ sia proiezione di una conveniente imagine di g_n^r, occorre e basta che nello spazio S_r della C, imagine di g_n^r, esista un $S_{r-r'-1}$, che s'appoggi in $n-r'$ punti alla curva. Uno spazio siffatto, allorchè $r' > \dfrac{r}{n-r+1}$, esiste soltanto se la g_n^r data è particolare entro la varietà delle g_n^r della curva razionale [1].

[1] Invero, la condizione affinchè uno spazio $S_{r-r'-1}$ di S_r si appoggi in un punto alla curva C, ha la dimensione r', cosicchè la condizione af-

L'eccezione si generalizza alle curve di genere $p>0$. Supposto $n > 2p+\delta$ $(\delta>0)$, e considerata una $g_n^{n-p-\delta}$ (non speciale e di deficienza δ) sopra una curva f di genere p, appena sia $\delta^2-(n-2p)\delta+p<0$, non esiste generalmente alcun gruppo di $p+\delta$ punti, che imponga ai gruppi della serie soltanto p condizioni [1]; e quindi l'imagine di una $g_{n-p-\delta}^{n-2p-\delta}$ (che è certo contenuta nella $g_n^{n-p-\delta}$ data) non può essere proiezione di un'imagine della serie data.

La determinazione di tutti i possibili casi di eccezione non sembra sia semplice; e non vogliamo attardarci su di essa. Veniamo invece alla questione che forma l'oggetto principale del presente numero.

Sia f una curva piana (irriducibile) d'ordine n e di genere p. Si può determinare su f, mediante un gruppo di m punti generici della curva $(m>2p)$, una g_m^{m-p} completa, non speciale, la quale contenga la serie delle sezioni rettilinee di f. Basta all'uopo assumere p. es. $m \geq n+p$. Allora, a norma del n. 42, ogni curva imagine della g_m^{m-p} è priva di punti multipli; e, attesa la completezza della serie g_m^{m-p}, di queste imagini se ne potrà costruire una tale, C, in uno spazio S_{m-p} contenente il piano π di f, che la proiezione di C, da un conveniente S_{m-p-3}, appoggiato a C in $m-n$ punti, sia proprio f. Dunque:

Una curva algebrica piana, avente punti multipli di natura qualunque, può sempre considerarsi come proiezione di una curva iperspaziale priva di punti multipli.

Se $n>2p$, si potrà addirittura assumere come serie g_m^{m-p} quella individuata da un gruppo di n punti allineati $(m=n)$; *in tal caso quindi la curva piana sarà proiezione di una curva iperspaziale dello stesso ordine, priva di punti multipli.*

Lo stesso si può dire, in virtù del n. prec., se $n \leq 2p-2$ e trattasi di una serie speciale sopra una curva non iperellittica: chè allora f sarà proiezione della curva canonica.

finchè quello spazio incontri C in $n-r'$ punti, ha generalmente la dimensione $r'(n-r')$. E perchè esista uno spazio siffatto occorre che:

$$r'(n-r') \leq (r'+1)(r-r'), \quad \text{cioè} \quad r' \leq \frac{r}{n-r+1}.$$

[1] Invero, la condizione perchè un S_{p-1} di $S_{n-p-\delta}$ sia $(p+\delta)$-secante di una curva C, ha generalmente la dimensione $(p+\delta)(n-2p-\delta)$; e perchè esista uno spazio siffatto, occorre che $(p+\delta)(n-2p-\delta) \leq p(n-2p-\delta+1)$, cioè $\delta^2-(n-2p)\delta+p \geq 0$.

Questi teoremi ci dicono che ogni singolarità, sia pure la più complicata, di una curva algebrica piana, può generarsi mediante proiezioni, a partire da punti semplici.

Teoremi analoghi valgono evidentemente per una curva sghemba o iperspaziale; e la dimostrazione è la stessa.

52. Il teorema delle lacune. — Abbiamo già accennato nel n. 40 al modo con cui WEIERSTRASS introduce il genere (rango) di una curva. Sotto la veste analitica, che egli le ha dato, la definizione si presenta così:

Il genere p di una curva f è un intero (≥ 0), tale che il più piccolo ordine (o grado) di una funzione razionale del punto di f, i cui poli (di 1° ordine) siano assegnabili ad arbitrio, è $p+1$.

Ebbene, un fatto analogo vale quando i poli della funzione sieno scelti coincidenti, in un punto generico di f; cioè $p+1$ è anche il minimo ordine di una funzione razionale avente un solo polo (multiplo) assegnabile ad arbitrio.

Questo fatto consegue dal seguente *teorema delle lacune* (Lückensatz di WEIERSTRASS):

Fra le funzioni razionali d'ordine n, aventi un sol polo d'ordine $n \geq p$ in un punto dato dalla curva, mancano quelle che corrispondono a certi p valori di n.

Dimostreremo il teorema più generale seguente:

Sulla curva f, di genere $p > 1$, sia dato un gruppo non speciale G_n di n punti, distinti o coincidenti, e chiamiamo G_h il gruppo formato dai primi h punti di G_n ($h = 1, 2, \ldots, n$), considerati in un ordine prefissato. Allora fra le funzioni razionali d'ordine h aventi come gruppi dei poli i diversi G_h, mancano quelle corrispondenti ad almeno p valori convenienti di h. Si posson però, in ogni caso, ordinare i punti di G_n in tal guisa che il numero delle funzioni razionali mancanti sia esattamente p.

Cominciamo coll'osservare che se da un gruppo G_h di h punti, individuante una serie completa $|G_h|$, di dimensione r_h e d'indice di specialità i_h, si toglie un punto P, la serie residua $|G_h - P|$ ha o no la stessa dimensione r_h, secondo che P è o no fisso per la serie $|G_h|$. Nel primo caso l'indice di specialità della serie residua è $i_h + 1$, nel secondo è i_h.

Ciò premesso, sia un gruppo G_n non speciale ($n \geq p$) di n punti distinti o coincidenti, individuante dunque una $|G_n|$ di indice di specialità zero. Ordinati i punti del gruppo, in modo arbitrario, in una successione $P_1, P_2, \ldots, P_n$, poniamo

$G_h = P_1 + P_2 + \ldots + P_h$ ($h = 1, \ldots, n$) e consideriamo le serie complete:

$$(3) \qquad |G_n - P_n| = |G_{n-1}|, \quad |G_{n-1} - P_{n-1}| = |G_{n-2}|, \ldots,$$
$$|G_2 - P_2| = |G_1| = |P_1|.$$

Passando da ciascuna alla successiva, l'indice di specialità o non muta o aumenta di un'unità. Ma poichè la serie $|P_1|$ ha l'indice di specialità $p-1 > 0$, dovrà esser accaduto $p-1$ volte che, nel passaggio da una $|G_h|$ alla successiva $|G_{h-1}|$ ($2 \leq h \leq n$), l'indice di specialità è aumentato di una unità. E questo significa che per $p-1$ valori convenienti di h, da n a 2, la serie $|G_h|$ possiede il punto fisso P_h.

E siccome anche la serie $|G_1|$ possiede il punto fisso P_1, complessivamente, variando h da n ad 1, si trovan p serie $|G_h|$ aventi come punto fisso il corrispondente P_h.

Non è però detto che nella successione (3) le sole serie con punti fissi sieno le p suddette; perchè è possibile che per qualche valore di h, p. es. $h = j$, la serie $|G_j|$ abbia punti fissi, ma diversi dall'*ultimo* punto P_j del gruppo che la individua.

Si può dunque dire che nella successione (3) vi sono *almeno* p serie con punti fissi. Ciò equivale ad affermare che fra le funzioni razionali che hanno $G_n, G_{n-1}, \ldots, G_2, G_1$ come gruppi dei poli, ne mancano almeno p. Invero una serie d'ordine h con punti fissi non può considerarsi come insieme dei gruppi di livello di una funzione razionale di grado h (n. 27), ma, se mai, di grado inferiore.

È facile in ultimo trovare un ordinamento dei punti di G_n, tale che nella successione (3) le serie con punti fissi sieno esattamente p. A questo scopo, se G_n non ha punti fissi, prendiamo come P_n, ultimo punto della successione da costruirsi, uno qualunque de' suoi punti; se invece G_n ha punti fissi, prendiamo come P_n uno di questi. Similmente dicasi nei riguardi di G_{n-1}, per la scelta dal penultimo punto P_{n-1}; e così proseguendo.

In questo modo si costruisce una successione $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1$, tale che, se la serie G_h ha punti fissi ($h = 1, \ldots, n$), P_h è certamente fra questi. Onde le serie della successione (3) con punti fissi, son p e soltanto p. Epperò son esattamente p le funzioni razionali mancanti.

Si conclude col teorema enunciato, corollario immediato del quale è il Lückensatz; e, alla sua volta, da questo si trae che:

In un punto P, di una curva di genere $p > 1$, il quale sia distinto dai punti p-pli della serie canonica, la successione degli ordini mancanti è quella dei primi p numeri naturali.

Sia infatti P l'unico polo (d'ordine n) di una funzione razionale φ di grado $n \leq p$. Allora la serie $\varphi = \text{cost.}$ è una g^1_n, priva di punti fissi, col punto n-plo P (n. 27), e questo punto n-plo impone ai gruppi canonici al più $n-1$ condizioni (esattamente tante, se la g^1_n è completa); sicchè vi sono almeno ∞^{p-n} gruppi canonici aventi il punto n-plo P, epperciò almeno uno col punto p-plo P. Dunque P è uno dei punti p-pli della serie canonica, che sappiamo esser sempre in numero finito, eguale a $p(p^2-1)$ (n. 37).

Pertanto, se P non è un punto p-plo della serie canonica, non può esistere una funzione razionale di grado $n \leq p$, avente in P un polo n-plo; epperò gli ordini mancanti in P sono $1, 2, \ldots, p$.

I punti eccezionali, in cui la successione degli ordini mancanti contiene qualche numero $\leq p$, chiamansi *punti di* Weierstrass della curva.

Osservazione 1ª. — Nel caso delle curve ellittiche ($p=1$) un gruppo G_n ($n \geq 2$) è sempre non speciale e individua una $|G_n|$ di dimensione $n-1$, che è certo priva di punti fissi, perchè sopra una curva ellittica non posson esistere g^{n-1}_{n-1}. Dunque l'unico ordine mancante è $n=1$.

Nel caso di una curva razionale ($p=0$), un gruppo G_n ($n \geq 1$) individua una $|G_n|$ di dimensione n, priva di punti fissi, e non vi è alcun ordine mancante.

Osservazione 2ª. — Applicando il procedimento esposto per dimostrare il teorema generale di questo n., ad un gruppo G_n speciale, sopra una curva di genere $p > 1$, si conclude che, qualora G_n individui una g^r_n completa, fra le serie della successione (3) ve ne sono almeno $n-r$ con punti fissi e si posson ordinare i punti di G_n in tal guisa, che tali serie sieno esattamente $n-r$.

53. Limite inferiore pel numero dei punti di Weierstrass distinti sopra una curva di genere $p > 1$. — La curva che si considera, di genere $p > 1$, sia anzitutto non iperellittica. Un punto P di Weierstrass, che sia origine di un ramo, neces-

sariamente lineare (n. 50), della curva canonica C, imagine della curva data, ed in cui i successivi ranghi del ramo sieno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-2}$ (n. 25), conta fra i punti di Weierstrass un numero W di volte, espresso da (n. 37):

$$W = (p-2)(\alpha_1 - 1) + (p-3)(\alpha_2 - 1) + \ldots + 2(\alpha_{p-3} - 1) + (\alpha_{p-2} - 1).$$

Cerchiamo di determinare un limite superiore per W. All'uopo si osservi che uno spazio S_k ($k < p-2$), il quale contenga n punti di C, individua, coi suoi punti d'appoggio su C, una g^r_n speciale completa non canonica, con $r = n-k-1$ talchè risulta (n. 50) $n \geq 2r+1$, cioè $n \leq 2k+1$. In (n. 49), particolare ciò vale quando i punti d'appoggio su C sono infinitamente vicini.

Pertanto, pel punto P considerato, siccome lo S_k osculatore in esso a C, contiene $1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ punti infinitamente vicini della curva, avremo:

$$1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leq 2k + 1,$$

ovvero:

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_k - 1) \leq k,$$

relazione valida per $k = 1, \ldots, p-3$. A questa deve aggiungersi la relazione:

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_{p-2} - 1) \leq p - 1,$$

esprimente che l'iperpiano osculatore a C in P non può avere molteplicità d'intersezione superiore a $2p-2$.

Sommando a membro a membro questa ultima e le relazioni analoghe, corrispondenti ai diversi valori di k, viene, tenuto conto dell'espressione di W:

$$W \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1,$$

la quale si esprime a parole dicendo che:

Nel gruppo dei $p(p^2-1)$ punti di Weierstrass, sopra una curva non iperellittica di genere p, uno qualunque non può contare più di $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ volte.

Se ne deduce che:

Il numero dei punti di Weierstrass distinti è almeno eguale a:

$$\frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)+2} = 2p + 6 + \frac{8(p-3)}{p(p-3)+4},$$

sicchè, per $p=3$, questo limite inferiore assume il valore $12(=2p+6)$, mentre, per $p>3$, è sempre maggiore di $2p+6$. Onde *il numero dei punti di Weierstrass distinti sopra una curva non iperellittica* ($p\geq 3$) *è almeno* $2p+6$.

Passiamo a considerare una curva C iperellittica, di genere $p\geq 2$. I $2p+2$ punti doppi della g_2^1 esistente su C sono distinti fra loro, perchè ognuno di tali punti, non potendo esser che doppio, conta una volta sola nel gruppo jacobiano della g_2^1 (n. 33). D'altronde il gruppo della g_2^1 costituito dal punto P contato due volte, ripetuto $p-1$ volte, fornisce un gruppo della g_{2p-2}^{p-1} canonica; e precisamente quel gruppo che, sulla curva C, corrisponde all'intersezione della curva razionale normale Γ, dello S_{p-1}, imagine della g_2^1, coll'iperpiano osculatore nel punto omologo di P. Dunque P è un punto $2(p-1)$-plo della serie canonica, e perciò un punto di WEIERSTRASS.

Viceversa, un punto p-plo della serie canonica è necessariamente doppio per la g_2^1, perchè altrimenti un gruppo canonico, avente quel punto p-plo, dovrebbe contenere come p-plo anche il coniugato del punto stesso nella g_2^1, e l'ordine della serie canonica risulterebbe almeno uguale a $2p$. Si conclude che:

Il numero dei punti di Weierstrass distinti, sopra una curva iperellittica di genere $p\geq 2$, *è* $2p+2$. *Tali punti sono i punti doppi della* g_2^1 *esistente sulla curva.*

Ne deriva che:

Sopra una curva iperellittica di genere $p\geq 2$, *ogni punto di Weierstrass conta* $\frac{p(p^2-1)}{2p+2}=\frac{p(p-1)}{2}$ *volte nel gruppo dei* $p(p^2-1)$ *punti di Weierstrass.*

Questo risultato si può anche stabilire direttamente mercè la formula del n. 37, che fornisce la molteplicità di un punto nel gruppo dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r.

Le proprietà di geometria sopra una curva, che siam venuti esponendo in questo Capitolo, e che costituiscono il nocciolo fondamentale della teoria, furono in gran parte scoperte da RIEMANN [J. für Math. 54, 115 (1857)] e da CLEBSCH-GORDAN (Th. der Abel'schen Funktionen, Leipzig, 1866) per via trascendente. Con indirizzo algebrico aritmetico furono ottenute da KRONECKER (nelle sue Lezioni) e da DEDEKIND-WEBER [J. für Math. 92, 181 (1880)]. Questo indirizzo è metodicamente sviluppato nella Theorie der alg. Funktionen di HENSEL e LANDSBERG (Leipzig, 1902).

Dal punto di vista della teoria delle funzioni analitiche, strettamente considerata, furono studiate da WEIERSTRASS (nelle sue Lezioni). La trattazione algebrico-geometrica di tali proprietà è dovuta a BRILL-NOETHER [Math. Annalen, 7, 259 (1873)] e perfezionata dai geometri della scuola italiana, come può vedersi nella già citata monografia di BERTINI [Ann. di mat. 22_2, 1 (1894)]. La Memoria di BRILL-NOETHER deve considerarsi come fondamentale rispetto all'indirizzo seguito nel presente volume. In un successivo Cap. verranno esposti gli elementi essenziali della trattazione di BRILL-NOETHER, la quale ha per fondamento una relazione formale, che si cita come il teorema $Af+B\varphi$ di NOETHER. Non è soltanto pel suo interesse storico, che esporremo il metodo di BRILL-NOETHER; ma altresì perchè lo strumento e la concezione fondamentale di esso, ha importanza per sè e troverà poi feconde applicazioni.

Per la medesima ragione esporremo in seguito il cosidetto metodo iperspaziale, dovuto a SEGRE e a CASTELNUOVO, il quale metodo rientra sempre nel quadro algebrico-geometrico, ma ha carattere più spiccatamente sintetico.

Il metodo sviluppato nel presente Capitolo, e che abbiamo chiamato « metodo rapido », perchè giunge più rapidamente alle proprietà centrali della teoria, è stato indicato dall'Autore [Ist. Veneto Atti, 79, 929 (1920)]. Esso differenziasi dal metodo di BRILL-NOETHER fino al momento in cui si consegue il teorema proiettivo del resto (n. 44): poi procede sostanzialmente identico. È appunto nel modo di pervenire al teorema proiettivo del resto, o, se vuolsi, alla completezza della serie lineare staccata dalle aggiunte, che si differenziano i tre metodi di carattere algebrico-geometrico.

Scendendo a più minuti particolari, dirò che il teorema proiettivo del resto, trovasi, appunto sotto la denominazione di *Restsatz*, in BRILL-NOETHER (loc. cit. § 1); e così pure il teorema di riduzione (*Reduktionsatz*) [loc. cit., p. 279; ved. pure NOETHER, J. für Math. 97, 224 (1884); Math. Annalen 37, 424 (1890)]. Il teorema di RIEMANN-ROCH, dovuto nella sua parte essenziale a RIEMANN (Ges. Math. Werke, 1 Aufl., Leipzig, 1857, pagg. 101, 109, 111), fu completato dal ROCH [J. f. Math. 64, 372 (1864)]; il teorema di CLIFFORD fu dato dal grande matematico inglese [Phil. Trans. 169, 681 (1878)] e completato da NOETHER (Berlin. Abhand. (1882), teor. III"); il teorema delle lacune fu dato da WEIERSTRASS (Math. Werke IV, 69, Berlin, 1903), e quello più generale, esposto al n. 52, da NOETHER [J. f. Math. 97, 224 (1884)]. In verità la dimostrazione di NOETHER era in un punto difettosa, e, senza i necessari complementi, essa mostrava soltanto la mancanza di *almeno* p delle funzioni razionali, di cui è questione nel teorema. Ciò è stato osservato dal ROSATI [Boll. Unione Mat. Italiana, 3, 162 (1924)], che ha completato la dimostrazione, restando nell'ordine di idee di NOETHER. Successivamente il CHISINI ha pubblicato una dimostrazione più semplice [Boll. Unione Mat. Italiana, 3, 197 (1924)], che è quella esposta nel n. 52.

Un limite inferiore pel numero dei punti di WEIERSTRASS per una curva di genere p, è stato assegnato pel primo da HURWITZ [Math. Annalen, 41, 403 (1893)], il quale diede $2p+2$ come valore di questo limite, valore raggiunto nel solo caso delle curve iperellittiche. Il risultato più espressivo del n. 53, e la relativa dimostrazione, son dovuti a SEGRE [Lincei Rend. 8_5, 89 (1899)]: altri limiti, anche più elevati, sono stati indicati dalla sig.na CIPOLLA [Lincei Rend. 14_5, 210 (1905); Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, 9 (1905)].

CAPITOLO SESTO

Le corrispondenze fra curve algebriche. Moduli di una curva ellittica o iperellittica.

§ 1. - Trasformazioni birazionali di una curva in sè.

54. **Trasformazioni birazionali di una curva razionale o ellittica in sè medesima.** — Una curva razionale possiede ∞^3 trasformazioni birazionali in sè, che sono le imagini delle ∞^3 proiettività esistenti sopra una retta; ed esse sono le sole, perchè abbiamo già osservato (Noz. introd., pag. 9) che sulla retta una trasformazione birazionale è una omografia. Queste ∞^3 trasformazioni costituiscono un gruppo continuo, nel senso di Lie.

Passiamo alle curve ellittiche. Sia C una tal curva: su essa trovansi intanto infinite trasformazioni birazionali involutorie, che son date dalle ∞^1 g_2^1 esistenti su C (n. 48). Esse chiamansi *trasformazioni di prima specie*.

Il prodotto di due trasformazioni di prima specie è una trasformazione birazionale della C in sè, *diversa* dalle trasformazioni di 1ª specie. Ciò verrà subito provato. Frattanto le nuove trasformazioni, che così s'ottengono, si diranno *trasformazioni di seconda specie.* Fra queste havvi l'identità, risultante dal prodotto di una trasformazione di 1ª specie per sè stessa.

Sia ω una trasformazione di 1ª specie (brevemente: t. 1ª s.). Indicate con A, A'; B, B' due coppie di punti in essa omologhi, verrà per la definizione:

$$A + A' \equiv B + B'. \tag{1}$$

Similmente, indicata con τ un'altra t. 1ª s., e con A_1, B_1 i punti rispettivamente omologhi di A', B' in τ, avremo:

$$B' + B_1 \equiv A' + A_1 . \tag{2}$$

Le (1), (2) addizionate a membro a membro porgono:

$$A + B_1 \equiv B + A_1 ,$$

cioè:

$$A - A_1 \equiv B - B_1 , \tag{3}$$

e questa è *l'equivalenza che lega due coppie* A, A_1; B, B_1 *di punti omologhi in una trasformazione di 2ª specie* (brevemente: t. 2ª s.).

Insomma *una coppia variabile di punti omologhi in una trasformazione di 1ª specie, descrive una serie lineare effettiva di 2° ordine; mentre una coppia variabile di punti omologhi in una trasformazione di 2ª specie, descrive una serie lineare virtuale d'ordine zero* (n. 30).

Risulta perciò evidente che le t. 2ª s. sono distinte dalle t. 1ª s., perchè se la (3) s'identificasse con una t. 1ª s., per A dato e B qualunque, verrebbe $2A \equiv 2B$; mentre la serie $|2A|$ ha soltanto 4 punti doppi. Così è ben chiaro che *una trasformazione di 1ª o di 2ª specie è individuata da una coppia di punti omologhi.*

In generale le t. 2ª s. non sono involutorie, come le t. 1ª s. Perchè una t. 2ª s., di cui sia A, A_1 una coppia di punti omologhi, possa risultare involutoria, occorre e basta, a norma della (3), che

$$A - A_1 \equiv A_1 - A,$$

cioè $2A \equiv 2A_1$, il che implica che A, A_1 sieno due punti doppi di una medesima g_2^1. Sicchè, *fissata* una g_2^1 e detto A uno dei suoi 4 punti doppi, la considerata t. 2ª s. involutoria dovrà mutare A in un altro dei 4 punti doppi; e poichè questi, non potendo esser che doppi, necessariamente sono distinti (n. 33), così ne segue che *esistono tre e tre sole trasformazioni involutorie di 2ª specie.*

Oltre alla t. 2ª s., $\rho (\equiv \omega\tau)$, definita dalla (3), consideriamo un'altra t. 2ª s., σ, la quale faccia corrispondere rispettivamente ai punti A, A_1, B, B_1 i punti $\bar{A}$, $\bar{A}_1$, $\bar{B}$, $\bar{B}_1$. Avremo allora:

$$A + \bar{A}_1 \equiv \bar{A} + A_1 \tag{4}$$

$$\bar{B} + B_1 \equiv B + \bar{B}_1 \tag{5}$$

e per addizione, tenuto conto della (3):

$$\bar{A}_1 + \bar{B} \equiv \bar{A} + \bar{B}_1 ,$$

la quale prova che il prodotto $\rho\sigma$ è ancora una t. 2ª s.

L'equivalenza (4) prova inoltre che $\bar{A}, \bar{A}_1$ è una coppia di punti omologhi nella trasformazione ρ, che può ritenersi definita dalla coppia A, A_1. Pertanto una coppia qualsiasi A, A_1 di punti omologhi in ρ, vien mutata da σ in una coppia analoga, e quindi le due trasformazioni ρ, σ son permutabili.

Dimostriamo ora che il prodotto di un numero dispari di t. 1ª s. è ancora una t. 1ª s. Sieno p. es. tre t. 1ª s., $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, nelle quali (A, A'), (B, B'); (A', A''), (B', B''); (A'', A'''), $(B'' B''')$ sieno coppie di punti omologhi. Viene:

$$A + A' \equiv B + B', \quad B' + B'' \equiv A' + A'', \quad A'' + A''' \equiv B'' + B''',$$

e per addizione:

$$A + A''' \equiv B + B''',$$

la quale prova che il prodotto $\omega_1\omega_2\omega_3$ è una t. 1ª s.

Da ciò segue che le t. 2ª s. s'ottengono tutte facendo i prodotti di una fissata t. 1ª s., ω, colle diverse t. 1ª s. Se, invero, σ denota una qualsiasi t. 2ª s., poichè $\omega\sigma$, come prodotto di tre t. 1ª s. è una t. 1ª s., α, così risulta $\sigma \equiv \omega\alpha$.

Il prodotto di un numero pari di t. 1ª s. è una t. 2ª s., perchè i fattori del prodotto posson associarsi a due a due e danno luogo così ad un prodotto di t. 2ª s.

Abbiamo già osservato (n. 48) che le ∞^1 g_2^1 di C formano un ente birazionalmente equivalente alla curva sostegno. Lo stesso può dirsi delle ∞^1 t. 2ª s., giacchè esse corrispondono biunivocamente ai prodotti del tipo $\omega\alpha$, ω essendo una t. 1ª s. fissa ed α una variabile. Però, mentre la schiera delle ∞^1 t. 1ª s., pur essendo continua, non costituisce un gruppo, le ∞^1 t. 2ª s. formano invece un gruppo continuo permutabile (cioè di trasformazioni a due a due permutabili).

Nei riguardi dei punti uniti (punti omologhi di sè stessi) ogni t. 1ª s., come s'è detto, ha 4 punti uniti distinti; e ogni t. 2ª s., non identica, non ha alcun punto unito, perchè, se A_1 coincide con A, la t. 2ª s. individuata dalla coppia (A, A_1) non può non coincidere coll'identità, che è una t. 2ª s, di cui quella coppia fa parte. (D'altronde, se $A = A_1$, risulta dalla (3), $B \equiv B_1$, e perciò $B = B_1$, in quanto su C non esiste una g_1^1).

Possiamo, riassumendo, enunciare:

Una curva razionale possiede un gruppo continuo di ∞^3 trasformazioni birazionali in sè, isomorfo al gruppo delle omografie sopra una retta.

Una curva ellittica C possiede una schiera continua ∞^1 di trasformazioni (di 1ª specie) involutorie e un gruppo continuo permutabile ∞^1 di trasformazioni (di 2ª specie). Dati due punti di C, vi è una trasformazione di 1ª specie ed una di seconda specie in cui essi son omologhi. Una trasformazione di 1ª specie ha quattro punti uniti distinti; una di 2ª (diversa dall'identità) nessuno.

Gli elementi (trasformazioni) della schiera e del gruppo suddetti, costituiscono enti birazionalmente equivalenti alla curva C.

Osservazione 1ª. — Una trasformazione birazionale della curva C in sè muta una serie lineare, effettiva o virtuale, in una serie analoga, dello stesso ordine, e quindi una t. 1ª s. in una t. 1ª s., una t. 2ª s. in una t. 2ª s.

In particolare, se si trasforma una data g_2^1 mediante le ∞^1 t. 2ª s. (o di 1ª specie), si ottiene un sistema ∞^1 (irriducibile) ellittico di t. 1ª s., e questo sistema abbraccia perciò tutte le t. 1ª s.

Similmente, una data t. 2ª s. trasformasi, mediante le ∞^1 t. 1ª s. (o di 2ª specie), nel sistema di tutte le t. 2ª s.; sicchè *date due trasformazioni della stessa specie esiste sempre una trasformazione di 1ª ed una trasformazione di 2ª specie, che muta l'una nell'altra.*

Osservazione 2ª. — Nel n. 59 dimostreremo che una curva ellittica *in generale* non possiede trasformazioni birazionali in sè, diverse da quelle di 1ª e di 2ª specie.

55. Il teorema di Schwarz-Klein sopra le trasformazioni birazionali in sè di una curva di genere $p > 1$. — Passiamo ora a considerare le trasformazioni birazionali in sè d'una curva C di genere $p > 1$. Per esse vale il teorema seguente:

Sopra una curva di genere $p > 1$ non può esistere che un numero finito di trasformazioni birazionali in sè.

Sia difatti P un punto di Weierstrass della curva C, ed m sia l'ordine minimo ($\leq p$) delle funzioni razionali che hanno il solo polo P; così che esiste *una* sola serie completa g_m^1, priva di punti fissi, per la quale P è m-plo; giacchè, se ne esistessero due, sarebber congiunte da una g_m^2 e vi sarebbe quindi una g_{m-1}^1 col punto $(m-1)$-plo P. Poichè i punti multipli di g_m^1 hanno la molteplicità $\leq m$, ognuno di essi conta $m-1$ volte al più nel gruppo jacobiano della g_m^1 (n. 33); e quindi, essendo $m \leq p$ e perciò $2(m+p-1) > 4(m-1)$, vi saranno più di quattro punti multipli *distinti* della serie g^1_m.

Se ora su C esiste una trasformazione birazionale ω, essa muta P in un punto di WEIERSTRASS P', distinto o coincidente con P, e la serie g^1_m relativa a P, nella serie g^1_m analoga, relativa a P'. Ai gruppi con punti multipli dell'una g^1_m, corrisponderanno gruppi con punti multipli dell'altra; e così avremo fra gli elementi (gruppi) delle due g^1_m una corrispondenza birazionale e perciò proiettiva (Noz. introd., pag. 9), che fa corrispondere due certi fissati gruppi di elementi, costituiti da più di 4 elementi distinti. E siccome una proiettività fra due enti razionali è individuata da tre coppie di elementi omologhi, ne segue che fra le due g^1_m non può esistere che un numero finito di proiettività analoghe a quelle subordinate da ω.

Si tratta adesso di veder se, da questo ultimo fatto, sia possibile dedurre che le eventuali corrispondenze birazionali di C in sè, che mutano P in P', sono in numero finito. Tale deduzione sarà lecita solo quando avremo provato che *le trasformazioni birazionali di C in sè, che mutano in sè ogni gruppo di una data g^1_m, sono in numero finito.* Perchè allora se ne potrà trarre la conseguenza che due trasformazioni ω, τ, che subordinino fra le due g^1_m, sopra considerate, la medesima proiettività, son identiche, oppure l'una si ottiene dall'altra moltiplicandola per una delle trasformazioni birazionali che mutano in sè ogni gruppo di una di quelle g^1_m.

Sieno dunque α, β due trasformazioni birazionali che mutino in sè ogni gruppo di una data g^1_m e che facciano corrispondere al punto A di C il medesimo punto A'. Dico che α, β coincidono. Denotiamo infatti con G il gruppo della g^1_m, cui, per ipotesi, appartengono A, A'. Al variare di A su C, variano A e G, ma sempre in modo che le nuove posizioni di A, A' appartengono alla nuova posizione di G. Cosicchè, quando A va in B, descrivendo un cammino continuo, le α, β fanno ambedue corrispondere a B quel punto B', ben determinato, del gruppo di g^1_m individuato da B, che deriva per continuità da A'. Nè può esservi ambiguità nella definizione di B', se si evita che il cammino descritto, a partire da A, per andare in B, passi per uno dei punti uniti delle corrispondenze α, β. La cosa è sempre possibile, perchè ognuna di queste corrispondenze (non identica) ha un numero finito

di punti uniti, i quali son almeno doppi per la g^1_m. Ma, se ad ogni posizione di B, tanto α che β fanno corrispondere il medesimo punto B', vuol dire che α coincide con β [1].

Ne segue che vi sono al più $m-1$ corrispondenze birazionali distinte fra loro e dall'identità, che mutano in sè ogni gruppo di una data g^1_m; e perciò è finito il numero delle trasformazioni birazionali di C, che mutano P in P'. Tenendo infine conto che è finito il numero dei punti di WEIERSTRASS esistenti su C, si conclude col teorema enunciato.

Corollari immediati del quale, sono i seguenti:

Ogni trasformazione birazionale sopra una curva di genere $p > 1$, è ciclica.

L'insieme di tutte le trasformazioni birazionali sopra una curva di genere $p > 1$, è un gruppo di ordine finito.

56. Limite superiore pel numero dei punti uniti di una trasformazione birazionale sopra una curva. Un'altra dimostrazione del teorema di SCHWARZ-KLEIN. — Sia C curva di genere p, possedente una trasformazione birazionale ω (non identica) in sè medesima. Consideriamo una g^1_{p+1}, di C tale che l'omologo in ω di un punto generico P di C non sia nel gruppo individuato da P. Una g^1_{p+1} siffatta può individuarsi col gruppo $H+P$, ove H è un generico gruppo di p punti di C.

Fra i gruppi della g^1_{p+1}, considerati come elementi di un ente razionale ∞^1, possiamo porre una corrispondenza algebrica, chiamando omologhi due gruppi contenenti punti omologhi in ω. Si ha così fra i gruppi stessi una corrispondenza non identica $(p+1, p+1)$, la quale fa corrispondere, in ambedue i sensi, ad un gruppo generico, $p+1$ gruppi distinti da quello; ed ha perciò $2p+2$ gruppi uniti [2].

Poichè ogni punto unito U di ω dà luogo ad un gruppo unito (e cioè quello cui appartiene U), ne segue che il numero dei punti uniti distinti di ω non supera $2p+2$. Dunque:

Una trasformazione birazionale che muti in sè una curva di genere p, non ha più di $2p+2$ punti uniti distinti, sulla curva.

[1] Questo ragionamento presuppone però che si sappia già concepire la curva C (luogo di punti complessi) come una superficie (di RIEMANN), luogo di ∞^2 punti reali; il che noi vedremo diffusamente più tardi.

[2] Si applica qui il principio di corrispondenza di CHASLES, che si vedrà in seguito.

Per $p=0$ il limite è raggiunto (una proiettività sulla retta può avere due punti uniti distinti), e così per $p=1$, quando trattasi di una trasformazione di 1ª specie.

Se $p>1$, il suddetto limite superiore può abbassarsi a $2p$, fatta eccezione soltanto del caso in cui la curva è iperellittica e la trasformazione è ivi generata dalla g_2^1 della curva.

Invero, se la curva C, di genere $p>1$, non è iperellittica, o se, pur essendo essa iperellittica, la trasformazione ω non è generata dalla g_2^1, esistente allora sulla curva, fra gli ∞^{p-2} gruppi canonici per un generico punto P di C, ve n'è certo qualcuno che non contiene l'omologo di P in ω. Si può quindi, aggiungendo a P un gruppo di $p-1$ punti tolti da un siffatto gruppo canonico, individuare, mediante questi p punti, una g_p^1, tale che l'omologo in ω del generico P, non stia nel gruppo individuato da P.

La ω induce allora, in modo analogo a quanto sopra, una corrispondenza (p, p) fra i gruppi della g_p^1: donde segue che ω non può avere più di $2p$ punti uniti distinti.

Se C è iperellittica e ω è generata dalla g_2^1, ogni gruppo canonico per P, contiene l'omologo di P in ω, e non è più applicabile il ragionamento precedente. In tal caso ω possiede $2p+2$ punti uniti distinti (n. 33).

Dal teorema dimostrato scende, come conseguenza pressochè immediata, quello del n. prec. E infatti, se ω è una trasformazione birazionale di C in sè ($p>1$), essa muta in sè la serie canonica e quindi il gruppo dei punti di Weierstrass. Sia τ un'altra trasformazione birazionale di C in sè, la quale produca sui punti di Weierstrass la medesima sostituzione prodottavi da ω. Allora la trasformazione $\omega\tau^{-1}$ lascia fermo ognuno dei punti di Weierstrass, e poichè questi sono almeno $2p+2$ distinti (n. 53), ne segue che $\omega\tau^{-1}$ è l'identità, ovvero che C è iperellittica e $\omega\tau^{-1}$ coincide colla trasformazione π generata su C dalla g_2^1. Vuol dire che $\omega\equiv\tau$ oppure $\omega\equiv\pi\tau$.

Comunque sia, risulta finito (due al più) il numero delle corrispondenze birazionali di C in sè, che producono sui punti di Weierstrass una data permutazione. E poichè, alla lor volta, queste permutazioni sono in numero finito, così ne segue il teorema di Schwarz-Klein.

Il primo passo per la dimostrazione del teorema del n. 55 fu fatto da Schwarz, il quale provò che una curva di genere $p>1$ non può possedere una serie *continua* di trasformazioni birazionali [J. für Math. **87**, 139 (1875)]. La impossibilità dell'esistenza di una serie infinita *discontinua*, fu dimostrata da Klein in una lettera a Poincaré [Acta Math. **7**, 12 (1885); ved. anche Klein, Ueber Riemanns Theorie der algebr. Funktionen (Leipzig, 1882, p. 67)]. La dimostrazione geometrica del n. 55 è di Segre (Introduzione, n. 88), il quale tuttavia si appoggia al limite superiore del numero dei punti uniti distinti di una trasformazione birazionale, per dedurre che è finito il numero delle trasformazioni che mutano in sè ogni gruppo di una g_m^1. I risultati del n. 56, come la semplice dimostrazione ivi indicata del teorema di Schwarz-Klein, sono di Hurwitz [Math. Annalen, **41**, 403 (1893)], al quale è pure dovuto il limite superiore $84(p-1)$ pel numero delle trasformazioni birazionali in sè di una curva di genere $p>1$. Un'altra semplice dimostrazione del teorema di Schwarz trovasi in De Franchis [Lincei Rend. 12_5, 307 (1903)]. In una memoria dell'Autore [Math. Annalen, **74**, 521 (1913)] si dimostra incidentalmente, come conseguenza del fatto che le curve di dato ordine, sopra una superficie algebrica, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui, che *sopra una curva algebrica le corrispondenze algebriche di dati indici (α, β) si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui.* Ciò vale in particolare per $\alpha=\beta=1$, e, coll'aiuto del teorema di Schwarz, acquisito p. es. come in De Franchis, se ne trae una nuova dimostrazione geometrica del teorema di Klein.

57. Curve algebriche con infinite omografie in sè. — Supponiamo ora che la nostra curva C di genere p, possegga infinite omografie, del proprio spazio S_r, che la mutino in sè. Intanto dovrà essere $p=0$ oppure $p=1$ (n. 55). Di più dico che queste omografie si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui (anzi algebrici) (cfr. le note bibliografiche alla fine del n. prec.).

Invero, una omografia dello S_r in sè è rappresentata da una sostituzione lineare omogenea

$$\rho x_i' = \Sigma a_{ik} x_k ,$$

in cui x_k, x_i' sono le coordinate omogenee delle coppie di punti omologhi. La condizione perchè una siffatta trasformazione muti in sè C, si esprime per mezzo di un sistema di equazioni *algebriche* fra le a_{ik}. Pertanto le omografie che mutano in sè C o son in numero finito (zero incluso) o si distribuiscono in un numero finito di varietà algebriche irriducibili.

Indicato ora con n l'ordine di C, consideriamo la g_n^r staccata su C dagl'iperpiani, e i suoi punti $(r+1)$-pli, che son certo in numero >0 (n. 37). Ognuna delle omografie di C

in sè, muta in sè questo gruppo (di un numero finito, non nullo) di punti $(r+1)$-pli (punti di contatto di iperpiani stazionari); sicchè, se consideriamo una delle predette varietà algebriche ∞^{ρ} $(\rho \geq 1)$, di omografie che mutano in sè C, le omografie di questo sistema, attesa la continuità del medesimo, produrranno sul gruppo dei punti $(r+1)$-pli della g_n^r la stessa sostituzione. Indicata con ω_0 una fissata di esse e con ω una omografia variabile nel sistema, l'omografia, generalmente non identica, $\omega\omega_0^{-1}$, descriverà un sistema continuo ∞^{ρ} (eventualmente coincidente col dato), che conterrà l'identità e le cui trasformazioni lascieranno perciò fermo ognuno dei predetti punti $(r+1)$-pli.

Sia P uno di questi. Se la C fosse ellittica, le trasformazioni ottenute muterebbero in sè la g_2^1 individuata dal punto doppio P, e quindi dovrebbero mutare in sè il gruppo degli altri 3 punti doppi; e cioè, trattandosi di un sistema continuo, che contiene l'identità, ognuno di essi. Ma allora le predette trasformazioni, mutando in sè quattro gruppi distinti della g_2^1, muterebbero in sè ogni gruppo della g_2^1, epperò ognuna si ridurrebbe alla trasformazione birazionale generata su C dalla g_2^1 stessa. Il che è assurdo, perchè si tratta di *infinite* trasformazioni fra loro distinte. Dunque $p=0$, e si conclude:

Una curva che possegga infinite omografie in sè, è necessariamente razionale.

Ogni omografia che muti in sè C, dà ivi luogo ad una corrispondenza imagine di una proiettività della retta. Perciò quell'omografia non può avere sopra C più di due punti uniti distinti; e poichè questi punti uniti, quando l'omografia varî in un conveniente sistema continuo, coincidono coi punti di contatto degli iperpiani stazionari di C, così si conclude che *la curva C, con infinite omografie in sè, non può possedere più di due iperpiani stazionari distinti.*

In altri termini *la più generale curva razionale di ordine $n>r$ (proiezione generica della curva razionale normale di S_n) non può ammettere infinite omografie in sè.*

Fa eccezione il caso $n=r$, perchè non esiste in tal caso alcun iperpiano stazionario. Effettivamente in questo caso la curva possiede ∞^3 omografie in sè, giacchè ognuna delle ∞^3 trasformazioni birazionali ch'essa contiene (n. 54), muta in sè la g_n^n delle sezioni iperpiane ed è perciò un'omografia.

Approfondiamo ulteriormente il caso in cui la curva C, d'ordine $n>r$, possiede infinite omografie. E cominciamo con l'osservare che *il numero dei punti distinti, ove l'iperpiano osculatore è stazionario, non può mai esser minore di due.*

Invero, se $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ sono ordine e ranghi di un punto P di C, ove l'iperpiano osculatore sia stazionario, questo iperpiano, nel numero complessivo $(r+1)(n-r)$ degl'iperpiani stazionari, conta

$$r\alpha+(r-1)\alpha_1+\ldots+2\alpha_{r-2}+\alpha_{r-1}-\frac{r(r+1)}{2}=$$
$$=r(\alpha-1)+(r-1)(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_{r-1}-1)$$

volte (n. 37), e di più è:

$$\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{r-1}\leq n,$$

cioè:

$$(\alpha-1)+(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_{r-1}-1)\leq n-r,$$

onde, essendo $r>1$, risulta:

$$r(\alpha-1)+(r-1)(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_{r-1}-1)<$$
$$<r(\alpha-1)+r(\alpha_1-1)+\ldots+r(\alpha_{r-1}-1)\leq r(n-r),$$

epperò *a fortiori*:

$$r(\alpha-1)+(r-1)(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_{r-1}-1)<(r+1)(n-r),$$

il che prova che P non può assorbire tutti i punti ove l'iperpiano osculatore è stazionario [1].

Combinando questa conclusione con un'osservazione precedente, si deduce che la curva C, contenente infinite omografie in sè, possiede due e due soli punti distinti P, Q ove l'iperpiano osculatore è stazionario.

Le omografie di un sistema continuo, che mutin C in sè, o lasciano fissi P, Q o li permutan fra loro. Nel primo caso quelle omografie hanno per imagini sulla retta le ∞^1 proiettività con due dati punti uniti distinti; cioè esse formano un gruppo continuo ∞^1, che lascia fisso ognuno dei punti P, Q. Nel secondo caso le imagini di quelle omografie sulla retta sono le ∞^1 involuzioni in cui son coniugati due dati punti

[1] Ragionamento e conclusioni validi anche per una curva di genere $p>0$. Bisogna soltanto, nella ultima disuguaglianza, scrivere $(r+1)(n+rp-r)$, invece di $(r+1)(n-r)$. Si raffronti tale ragionamento con quello del n. 53.

distinti. Detta ω_0 una fissata di queste omografie ed ω una variabile, la omografia $\omega\omega_0$, senza esser identica, lascia fissi i punti P, Q; onde, al variare di ω, si ottiene di nuovo un sistema continuo di omografie, che lascian fisso ciascuno dei punti P, Q; e si ricade nel caso precedente.

Tenuto presente che i gruppi continui ∞^1 di proiettività sulla retta son costituiti dalle infinite proiettività aventi due dati punti uniti, distinti o coincidenti, e che i gruppi continui ∞^2 son costituiti dalle proiettività che lascian fisso un punto, si può riassumere come segue il risultato dell'analisi svolta:

Una curva algebrica C, d'ordine n dello S_r, che possegga un gruppo continuo di omografie, se $n > r$, è una curva razionale con due soli iperpiani stazionari in punti distinti; inoltre il gruppo è ∞^1 e lascia fermo ciascuno dei due punti di contatto di quegl'iperpiani.

Se $n = r$, trattasi invece di una curva razionale normale. Il gruppo completo delle omografie ad essa appartenenti è allora ∞^3 e contiene sottogruppi ∞^2 e ∞^1 (gruppo ∞^2 delle omografie che lascian fisso un punto di C o gruppo ∞^1 delle omografie che lascian fissi due punti, distinti o coincidenti, di C).

Le curve (analitiche) di uno spazio S_r possedenti un sistema continuo di omografie in sè (curve W di KLEIN-LIE) furon determinate da KLEIN e LIE, come traiettorie dei gruppi continui ∞^1 di omografie [Comptes rendus, 70, 1222, 1275 (1870); Math. Ann. 4, 50 (1871)]. Se una tal curva è algebrica, segue subito dalla rappresentazione parametrica di KLEIN-LIE, che è razionale. La determinazione algebrico-geometrica delle curve W algebriche è stata fatta da FANO [Lincei Rend. 4_5, 51 (1895)], il cui procedimento, con qualche semplificazione, è quello che si legge nelle « Vorlesungen » dell'Autore (p. 161). Qui alla trattazione medesima vengono arrecati ulteriori complementi. Un'altra trattazione algebrico-geometrica, non molto dissimile da quella delle citate « Vorlesungen », trovasi in ENRIQUES-CHISINI, vol. III, p. 239.

58. Concetto di moduli d'una curva. Moduli d'una curva ellittica od iperellittica. — Consideriamo l'insieme di tutte le curve algebriche di genere dato p, intendendo che un elemento di questo insieme rappresenti ognuna delle curve di genere p, birazionalmente equivalenti ad una data. L'insieme che si considera è, in altre parole, quello di tutti gli enti algebrici ∞^1, di genere p, birazionalmente distinti.

Un'imagine concreta di tale insieme è data dalla totalità delle curve canoniche del genere p, assumendosi come iden-

tiche due siffatte curve, che siano omografiche (n. 49): ad esso appartengono altresì le curve iperellittiche di genere p, ognuna delle quali è rappresentata in S_{p-1} da una curva razionale normale doppia (nn. 17, 48). Vedremo in seguito che l'insieme considerato è una varietà algebrica irriducibile. La sua dimensione indica il numero dei parametri essenziali da cui dipende l'ente algebrico ∞^1, di genere p. Due curve di genere p corrispondenti ai medesimi valori di tali parametri son birazionalmente equivalenti.

Questi parametri si chiamano *moduli della curva*, o, meglio, dell'ente algebrico ∞^1.

Ai moduli, invarianti per trasformazioni birazionali, corrispondono nel campo proiettivo gl'*invarianti* (proiettivi).

Le curve razionali ($p = 0$) non hanno evidentemente moduli, perchè son tutte birazionalmente equivalenti; così come non hanno invarianti proiettivi le curve razionali normali di S_r ($r \geq 1$), perchè sono proiettivamente equivalenti.

Si tratta di contare il numero dei moduli. Il problema generale verrà trattato più tardi. Ora ci limiteremo a dimostrare che *i moduli di una curva di genere $p \geq 1$ contenente una g_2^1 (curva ellittica per $p = 1$, iperellittica per $p > 1$) sono in numero di $2p - 1$.*

Questo numero, per $p > 2$, è inferiore a $3p - 3$, che troveremo in seguito come numero dei moduli di una curva non soggetta ad altre condizioni che d'avere il genere p; per guisa che, allora e soltanto allora, potremo concludere che la più generale curva di un genere p, dato comunque, maggiore di 2, non è iperellittica. Fino a quel momento il fatto che la serie canonica sopra una tal curva sia semplice e che esista pertanto la corrispondente curva canonica (semplice), per quanto verosimile e giustificabile agevolmente per particolari valori del genere, rimarrà allo stato di ipotesi.

Per contare i moduli d'una curva ellittica o iperellittica osserviamo in primo luogo che come modello proiettivo di una curva contenente una g_2^1, si può sempre assumere una curva piana di equazione

$$y^2 = f(x), \tag{6}$$

ove $f(x)$ sia un polinomio di ordine n. In una curva siffatta la g_2^1 è segata dalle rette $x = \text{cost}$.

È invero, basta considerare una g^2_m semplice, che contenga parzialmente la g^1_2 (p. es., per $m = p + 2$, la somma della g^1_2 e di un gruppo di p punti generici della curva); costruire sul piano l'imagine proiettiva di tale g^2_m; operare con una trasformazione omografica che muti il fascio di rette che sega la g^1_2, nel fascio delle rette $\xi = \text{cost.}$, essendo ξ, η un sistema di assi cartesiani. Dopo ciò l'equazione della imagine proiettiva suddetta assumerà la forma:

$$\eta^2\varphi(\xi) + 2\eta\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) = 0, \tag{7}$$

φ, φ_1, φ_2 essendo polinomi in ξ e l'equazione risultando di grado m complessivamente nelle ξ, η.

La (7) mediante la trasformazione birazionale:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - \varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

riducesi al tipo (6).

In secondo luogo osserviamo che, se $x = a$ è una radice $(2k + h)$-pla $(h = 0, 1)$ dell'equazione $f(x) = 0$, la (6) può trasformarsi nella

$$y'^2 = \psi(x'), \quad \left[\psi(x') = \frac{f(x')}{(x' - a)^{2k}}\right],$$

mediante la trasformazione birazionale:

$$x = x', \quad y = y'(x' - a)^h.$$

Si può pertanto, senza restrizione, supporre che il polinomio f, nella (6), sia ridotto ad avere soltanto zeri semplici.

Ad ogni punto dell'asse x corrispondono due punti della (6), costituenti una coppia della considerata g^1_2; mentre ad ogni punto della curva corrisponde un sol punto dell'asse x. La (6) è cioè rappresentata doppiamente sull'asse x, imagine delle coppie della g^1_2 (pag. 63).

I punti della retta, imagini dei $2p + 2$ gruppi della g^1_2 costituiti da due punti coincidenti, formano il cosidetto *gruppo di diramazione* della retta doppia x, su cui si rappresenta la nostra curva.

La ragione della denominazione e l'importanza della nozione introdotta si vedranno più tardi.

Si è osservato (pag. 168) che i $2p + 2$ punti doppi della g^1_2 sono fra loro distinti, perchè ognuno di tali punti, non potendo esser che doppio, conta una sola volta nel gruppo jacobiano della g^1_2 (n. 33). Sicchè il gruppo di diramazione consta di $2p + 2$ punti distinti dell'asse x.

È chiaro che un *punto di diramazione* (al finito) deve avere per ascissa una radice dell'equazione $f(x) = 0$; ma viceversa si può anche subito verificare che ogni radice (ormai semplice) di tale equazione, è un punto di diramazione, cioè un punto cui corrispondono sulla curva due punti coincidenti *sullo stesso ramo*.

E invero, se $x = a$ è una radice (semplice) di $f = 0$, il punto $x = a$, $y = 0$ della curva (6) è un punto semplice, eppero origine di un sol ramo, perchè la retta $y = 0$ taglia la curva (6) d'ordine n, in altri $n - 1$ punti distinti da quello.

Tali osservazioni provano anche senz'altro che una curva del tipo (6), ove f sia, lo ripetiamo, privo di zeri multipli, è *irriducibile*. Giacchè, se essa si spezzasse in due parti (necessariamente razionali), ognuna di queste taglierebbe l'asse x negli stessi punti $f(x) = 0$, i quali risulterebbero dunque doppi per la (6), contráriamente alla conclusione precedente.

Questo ragionamento vale anche se f ha una sola radice semplice o di molteplicità dispari, perchè in quest'ultimo caso con una trasformazione birazionale si può, come abbiamo visto, ridurci al caso di una radice semplice.

Se invece tutte le radici $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ di $f = 0$ son di molteplicità pari, e precisamente di molteplicità rispettive

$$2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_\nu,$$

la (6) si spezza nelle due curve razionali:

$$y = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_\nu)^{k_\nu},$$
$$y = -(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_\nu)^{k_\nu}.$$

Abbiamo detto che i punti di diramazione di ascissa finita sono tutte e sole le radici del polinomio f, privo di zeri multipli. Pertanto, se il punto $x = \infty$ non è di diramazione, il grado del polinomio f è $n = 2p + 2$.

Che poi effettivamente, quando $n = 2p + 1$, il punto $x = \infty$ risulti di diramazione, si vede subito coll'aiuto della trasformazione birazionale involutoria:

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'^{p+1}},$$

la quale muta la (6) in una curva $y'^2 = F(x')$ dello stesso tipo, ove però F ha il grado $2p+2$ ed $x'=0$ è una radice semplice di $F=0$, corrispondente al vecchio punto diramazione $x=\infty$.

Dunque *l'equazione* (6), *ove f sia un polinomio di grado $n=2p+1$ od $n=2p+2$, privo di zeri multipli, al variare dei coefficienti che in esso figurano, è suscettibile di rappresentare una qualunque curva iperellittica di genere p (ellittica, per $p=1$).*

Pertanto, per contare i moduli, occorrerà togliere dal numero $2p+2$ dei parametri essenziali, che compaiono nella (6), il numero del parametri da cui dipendono le curve del tipo (6) birazionalmente equivalenti ad una data di esse.

A questo scopo dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza birazionale di due curve del tipo (6), *è che sieno proiettivi i loro gruppi di diramazione.*

Se infatti le due curve

$$y^2 = f(x), \quad Y^2 = F(X)$$

godon della proprietà che i loro gruppi di diramazione, $f(x)=0$, $F(X)=0$, si corrispondono in una proiettività non degenere

$$x = \frac{aX+b}{cX+d} \qquad (ad-bc \neq 0),$$

ognuna delle due trasformazioni birazionali

$$x = \frac{aX+b}{cX+d}, \quad y = \pm \frac{kY}{(cX+d)^{p+1}},$$

ove k è una costante conveniente, muta la prima curva nella seconda.

La proprietà s'inverte subito, quando sia $p>1$. Invero allora una trasformazione birazionale che muti l'una curva nell'altra, muta l'unica (pag. 158) g_2^1 dell'una nella g_2^1 dell'altra, subordinando fra i due enti razionali, cioè fra le rette che li rappresentano, una proiettività, la quale muta il gruppo di diramazione dell'una nel gruppo di diramazione dell'altra.

Il caso $p=1$ ha bisogno di una trattazione speciale, appunto perchè le due curve contengono infinite g_2^1. Sieno dunque C, C' le due curve ellittiche considerate. Allora la g_2^1, diciamola h, che corrisponde su C ai punti dell'asse x, vien mutata, dalla trasformazione birazionale π esistente fra C, C', in una g_2^1, h', di C'; ma non necessariamente nella g_2^1 imagine dell'asse X. Esiste però una trasformazione (di 1ª o di 2ª specie) τ, che muta h' in quest'ultima g_2^1 (n. 54, Oss. 1ª); cosicchè la trasformazione birazionale $\pi\tau$ muta C in C', e la g_2^1 imagine di x, nella g_2^1 imagine di X. Onde i gruppi di diramazione delle due curve risultano ancora proiettivi.

Poichè sopra una retta i gruppi proiettivi ad un dato sono ∞^3, ne segue che vi sono ∞^3 curve del tipo (6) birazionalmente equivalenti ad una data, e si conclude che i moduli sono proprio $2p-1$, secondo avevamo preannunziato.

Come moduli si posson assumere i $2p-1$ birapporti di tre fissati punti di diramazione coi $2p-1$ punti ulteriori, perchè l'eguaglianza di tali birapporti, relativi a due diversi gruppi di diramazione, esprime appunto la loro equivalenza proiettiva.

Il caso ellittico è particolarmente notevole. Considerata, sulla curva ellittica data, la g_3^2 (necessariamente semplice, perchè d'ordine primo) individuata da tre punti della curva, si può assumer come modello proiettivo di questa, l'imagine proiettiva della g_3^2, che è una cubica piana, senza punti doppi (n. 34). Le g_2^1 sulla cubica son segate dai fasci di rette che hanno i centri nei singoli punti della curva. E il gruppo jacobiano della g_2^1 relativa a un dato punto P della cubica, è costituito dai punti di contatto delle 4 tangenti, che escon da P a toccare altrove la curva.

Poichè il birapporto di queste 4 tangenti è l'unico modulo della cubica, si conclude col *teorema di* SALMON [1]:

La quaderna delle tangenti, che escono da un punto P di una cubica ellittica a toccare altrove la curva, riman proiettiva a se stessa, al variare di P sulla cubica.

59. Le corrispondenze birazionali singolari sulle curve ellittiche. — Poniamoci la questione se, sopra una curva ellittica C, possan esistere altre trasformazioni birazionali, oltre a quelle trovate nel n. 54.

Sia anzitutto su C una trasformazione birazionale non identica α, possedente qualche punto unito, e sia M uno di

[1] Journ. f. Math., **42**, 274 (1851)

questi. La g_2^1, che ha un punto doppio in M, vien mutata in sè da α; cosicchè se, mediante quella g_2^1, la curva C si rappresenta sopra una retta doppia r, la corrispondenza α vien ivi rappresentata da una proiettività α', che deve trasformare in sè il gruppo M', N', P', Q' dei quattro punti di diramazione, tra i quali trovasi il punto M' imagine del punto doppio M.

Per α' il punto M' sarà unito. Ora, se il gruppo $M'N'P'Q'$ non è nè armonico nè equianarmonico, una proiettività che lo muti in sè, lasciandone fisso un punto, è necessariamente l'identità. Sicchè α coincide colla trasformazione di 1ª specie generata dalla predetta g_2^1.

Consideriamo il caso in cui la trasformazione non identica α, esistente sulla curva C, che abbia il modulo (birapporto dei 4 punti di diramazione) generale (ossia non armonico, nè equianarmonico), è priva di punti uniti. Sieno A, A' due punti di C, omologhi in α, e ρ sia la t. 2ª s. ben determinata (n. 54), che muta A in A'. Dico che $\alpha = \rho$, cioè che il prodotto $\alpha\rho^{-1}$ è la trasformazione identica. Infatti, se così non fosse, la trasformazione non identica $\alpha\rho^{-1}$, avendo il punto unito A, coinciderebbe, per quel che precede, colla t. 1ª s., β, che ha un punto doppio in A. Si avrebbe dunque $\alpha\rho^{-1} = \beta$ donde $\alpha = \beta\rho$; epperò (n. 54) α sarebbe una t. 1ª s., contrariamente al supposto che sia priva di punti uniti. Si conclude che:

Sopra una curva ellittica di modulo generale (nè armonico, nè equianarmonico) non esistono corrispondenze birazionali diverse da quelle di prima e di seconda specie.

Una corrispondenza esistente sopra una curva ellittica armonica od equianarmonica, diversa dalle *corrispondenze ordinarie* di 1ª e di 2ª specie, dicesi una *corrispondenza singolare.*

Sia α una tal corrispondenza, sulla curva ellittica C. Il prodotto di α con una trasformazione di 2ª specie ρ, possiederà un certo numero $k \geq 0$ di punti uniti; e questo numero resterà invariato mutando con continuità ρ nel gruppo ∞^1 delle t. 2ª s. In particolare, quando ρ diventa l'identità, k designa il numero dei punti uniti di α. Se fosse $k = 0$, ciò significherebbe che la α e la ρ variabile non avrebbero nessuna coppia comune di punti omologhi, perchè ogni tal coppia darebbe un punto unito della corrispondenza $\alpha\rho^{-1}$, che è pur

essa del tipo $\alpha\rho$. Ma questa conclusione è assurda, perchè, considerata una coppia A, A' di punti omologhi in α, c'è sempre una t. 2ª s. che ha comune con α la coppia A, A'. Dunque $k > 0$, e si può enunciare:

Sopra una curva ellittica, anche singolare, non esistono trasformazioni prive di punti uniti, diverse da quelle di 2ª specie.

Passiamo ad esaminare il caso d'una curva armonica od equianarmonica, al fine di determinare le sue corrispondenze birazionali singolari.

Sia C una curva armonica ed α una sua corrispondenza singolare, dotata necessariamente di almeno un punto unito M. Rappresentando C sopra una retta doppia r, mediante la g_2^1, avente il punto doppio in M, si ha su r una proiettività α', non identica, col punto unito M', corrispondente ad M. La α' muta in sè il gruppo di diramazione $M'N'P'Q'$, che è armonico. Pertanto α' non è che l'involuzione avente come punti doppi M' ed il coniugato armonico N' di M' rispetto alla coppia P', Q'.

Scelto su r un sistema di coordinate proiettive x, tale che i punti $M'N'P'Q'$ sieno determinati dai valori 0, ∞, 1, -1 di x, la curva C trasformasi birazionalmente nella cubica piana:

$$y^2 = x(x^2 - 1), \tag{8}$$

e la proiettività α', sull'asse x, è data dall'equazione $x' = -x$.

La corrispondenza α sulla curva C, che può ormai addirittura identificarsi colla curva (8), è rappresentata dalle formule:

$$x' = -x, \quad y' = \pm iy. \tag{9}$$

Alla proiettività α' corrispondono dunque su C due diverse trasformazioni singolari ($x' = -x$, $y' = iy$ e $x' = -x$, $y' = -iy$), che posson esser ottenute l'una dall'altra facendone il prodotto colla t. 1ª s. σ ($x' = x$, $y' = -y$), generata dalla g_2^1 col punto doppio M (di coordinate $x = y = 0$). Le suddette trasformazioni sono cicliche del 4° ordine, come mostran le formule (9). Sullo speciale modello (8) esse sono omografie. Il loro quadrato è σ [omografia involutoria, sullo speciale modello (8)]. Esse lasciano fermi due punti doppi M, N di σ e scambiano fra loro gli altri due P, Q. Inoltre dalla (9) si trae che, indicata con α una di queste trasformazioni, l'altra eguaglia α^3 ed α^{-1}.

In simil guisa posson ottenersi altre due corrispondenze singolari, aventi i punti uniti P, Q e permutanti tra di loro M, N. Alla g_2^1 considerata corrispondon così quattro trasformazioni singolari, ognuna delle quali dà per quadrato σ.

Per ogni punto M di C si ottengon dunque due corrispondenze singolari, che lascian fermo M: α e $\beta=\alpha^3$. Se M, M_1 son due punti di C, le α_1, β_1 relative ad M_1, sono evidentemente le trasformate rispettive di α, β mediante la trasformazione di 2ª specie, che porta M in M_1.

Finchè M_1 non è unito per α, β, è chiaro che le α_1, β_1 son distinte da α, β; se M_1 coincide col punto unito di α, β diverso da M, le α_1, β_1, coincidono rispettivamente con α, β, perchè ognuna delle α, β muta in sè la t. 2ª s. che porta M in M_1 (n. 54, Oss. 1ª). Dunque i due sistemi continui ∞^1 in cui le t. 2ª s. portano α, β, non hanno trasformazioni comuni.

Ciascuno di questi sistemi continui non può esser contenuto in un sistema più ampio, ∞^2 almeno, di trasformazioni (singolari); perchè, se così fosse, dal momento che ogni trasformazione di C muta una g_2^1 in una g_2^1, vi sarebbero infinite trasformazioni singolari mutanti in sè una data g_2^1; mentre non ve ne sono che quattro.

Ora i prodotti di una α colle ∞^1 trasformazioni di 1ª specie dànno luogo ad un sistema ∞^1 di corrispondenze, tra cui c'è $\beta=\alpha\cdot\alpha^2$; e mutando la α, questo sistema non può cangiare, perchè se no le β apparterrebbero ad un sistema ∞^2 di trasformazioni singolari. Dunque il sistema cui appartiene β può altresì ottenersi facendo i prodotti del tipo $\alpha\lambda$, ove λ sia una trasformazione di 1ª specie.

Similmente, scindendo β in $\alpha^2\cdot\alpha$ si conclude che lo stesso sistema è ottenibile dai prodotti del tipo $\lambda\alpha$. Si può infine nella deduzione scambiare α con β. Perveniamo così al teorema:

Le trasformazioni birazionali singolari di una curva ellittica armonica, si distribuiscono in due sistemi continui ∞^1, non aventi alcuna corrispondenza comune. Ognuno di questi sistemi contiene le inverse delle corrispondenze dell'altro. Ogni corrispondenza singolare è ciclica di 4° ordine; possiede due punti uniti e una coppia involutoria.

Inoltre:

Il prodotto di due trasformazioni singolari dello stesso sistema è una trasformazione di 1ª specie, mentre il prodotto di due trasformazioni di diverso sistema è una trasformazione di 2ª specie.

Prese infatti due β, e sieno:

$$\beta=\alpha^3,\quad \beta_1=\alpha\lambda_1,$$

il loro prodotto $\beta\beta_1$ riducesi alla t. 1ª s. λ_1; prese una α ed una β, e siano:

$$\alpha,\quad \beta_1=\alpha\lambda_1,$$

il prodotto $\alpha\beta_1$ riducesi alla t. 2ª s. $\alpha^2\lambda_1$.

Trattiamo ora brevemente il caso d'una curva ellittica equianarmonica C.

Risulta già, da quanto precede, che una trasformazione singolare α di C ha almeno un punto unito M. Rappresentata, al solito, la curva sopra una retta doppia r, per mezzo della g_2^1 col punto doppio M, otteniamo su r, come imagine di α, una proiettività α', che muta in sè il gruppo di diramazione equianarmonico $M'N'P'Q'$, lasciando fisso M'. Pertanto α' è una proiettività ciclica di 3° ordine, di cui $N'P'Q'$ è un ciclo. Scelto su r un sistema di coordinate x, tale che i punti $M'N'P'Q'$ corrispondano rispettivamente a $x=\infty$, 1, ε, ε^2, dove ε è una radice cubica complessa dell'unità, la C trasformasi birazionalmente nella cubica piana:

$$y^2=x^3-1,$$

colla quale ormai la identificheremo. La proiettività α' è rappresentata da $x'=\varepsilon x$ ed α da $x'=\varepsilon x$, $y'=\pm y$.

Se si sceglie nella seconda formula il segno $+$, si ottiene su C una corrispondenza, $x'=\varepsilon x$, $y'=y$, ciclica del 3° ordine, coi 3 punti di coincidenza M (punto all'infinito dell'asse y), ($x=0$, $y=i$), ($x=0$, $y=-i$); gli ultimi due corrispondendo all'ulteriore punto unito ($x=0$) di α'. Se invece si sceglie il segno $-$, si ottiene su C la corrispondenza ciclica del 6° ordine $x'=\varepsilon x$, $y'=-y$, coll'unico punto unito M e la coppia involutoria $(0, i)$, $(0, -i)$. Ambedue queste corrispondenze, sullo speciale modello proiettivo considerato, sono omografie.

L'una di tali corrispondenze si ottiene dall'altra moltiplicandola per la t. 1ª s. σ, $x'=x$, $y'=-y$, generata dalla g_2^1 col punto doppio M. Ciascuna di esse muta in sè σ.

Il quadrato delle due corrispondenze relative al punto unito M, è una medesima trasformazione ciclica del 3° ordine,

$x' = \varepsilon^2 x$, $y' = y$, che pure muta in sè σ. Tale corrispondenza è l'inversa di $x' = \varepsilon x$, $y' = y$. Per completare il sistema delle corrispondenze singolari, che mutano in sè σ, occorre aggiungere la $x' = \varepsilon^2 x$, $y' = -y$, che è l'inversa della $x' = \varepsilon x$, $y' = -y$.

S'ottengono in tal modo quattro corrispondenze singolari col punto unito M: due cicliche del 3° ordine, inverse l'una dell'altra, e due cicliche del 6° ordine, inverse pure l'una dall'altra. Gli ulteriori punti uniti delle corrispondenze cicliche del 3° ordine, sono coppie della g_2^1 considerata. Sicchè per ognuno dei punti doppi di σ si ottengono 4 corrispondenze: in tutto sedici.

Ripetendo, a questo punto, colle lievi debite varianti, il ragionamento svolto nel caso di una curva armonica, si conclude che:

Le corrispondenze birazionali singolari di una curva equianarmonica si distribuiscono in quattro sistemi continui ∞^1, non aventi corrispondenze comuni. Due sono di trasformazioni cicliche del 3° ordine ed ognuno di questi contiene le inverse delle corrispondenze dell'altro sistema; e similmente dicasi degli altri due sistemi, che sono di trasformazioni cicliche del 6° ordine. Ogni trasformazione del 3° ordine possiede tre punti uniti; ogni trasformazione del 6° ordine un punto unito ed una coppia involutoria. Il prodotto di due corrispondenze dello stesso sistema è una corrispondenza di un altro sistema, che contiene i quadrati delle trasformazioni del primo. Il prodotto di due corrispondenze dello stesso ordine, ma di sistemi diversi, è una trasformazione di 2ª specie. Il prodotto di due corrispondenze di diverso ordine, può essere, a seconda dei casi, una trasformazione di 1ª specie od una singolare del 6° ordine.

Le corrispondenze birazionali singolari di una curva ellittica in sè furono incidentalmente determinate, per via trascendente, da KLEIN [Math. Annalen, **15**, 279 (1879)]. La loro determinazione trascendente rientra anche in una ricerca più generale di HURWITZ [Math. Annalen, **32**, 290 (1888); **41**, 403 (1893)].

La trattazione puramente geometrica, che muove da concetti di carattere proiettivo, un po' diversi dunque da quelli spettanti alla geometria sull'ente, che presiedono alla trattazione esposta nelle « Vorlesungen » dell'Autore (p. 151) e qui riprodotta con qualche ampiamento, è dovuta a SEGRE [Torino Atti, **24**, 734 (1889)]. Veggasi pure a tal proposito S. KANTOR [Napoli Atti, 1_2 (1888); Torino Atti, **29**, 9 (1894)].

§ 2. Corrispondenze algebriche d'indici qualunque fra due curve distinte o sovrapposte.

60. Corrispondenze algebriche fra due curve. — Sieno C, C' due curve algebriche irriducibili, e supponiamo che il punto x variabile su C sia funzione algebrica ad α valori del punto x' variabile su C'. Ciò significa che le coordinate del punto x sono legate alle coordinate di x' da un certo sistema S di equazioni algebriche, per guisa che, dato un gruppo generico di valori delle coordinate di x', quel sistema determina α diversi gruppi di valori delle coordinate di x.

Nasce così un legame tra le posizioni di x, x' sulle C, C': una *corrispondenza algebrica*. Escluderemo di regola che tale corrispondenza sia *degenere*, in tutto o in parte. Vogliamo dire con questo che degli α punti x di C, omologhi del punto x' variabile su C', nessuno resta fisso.

Si tratta in fondo di intersecare la curva irriducibile C con un insieme di forme algebriche del suo spazio, rappresentate dal sistema S; forme dipendenti da certi parametri (le coordinate di x'), che le rendono suscettibili di variare. Le posizioni dei punti x omologhi di un dato x', sono le intersezioni *variabili* di C con quell'insieme di forme.

Nel medesimo sistema S si posson invece considerare come parametri le coordinate di x: allora le equazioni di S rappresentano forme algebriche dello spazio di C'.

Le quali forme, per valori generici delle coordinate di x, non potranno simultaneamente contenere tutta la curva C'; se no ad un generico x' corrisponderebbe ogni x e la corrispondenza sarebbe ancor più profondamente degenere, e non potrebbe ad un generico x' corrispondere invece un numero finito α di punti x, come si è supposto.

Dunque, le forme di cui stiamo parlando incontran simultaneamente la curva irriducibile C' in un numero finito di punti, tra i quali ve ne saranno certo di variabili, se la corrispondenza non è degenere. Anzi, poichè noi vogliamo soprattutto portare la nostra attenzione sulle corrispondenze non degeneri, faremo astrazione dalle eventuali intersezioni fisse. Si otterrà così un certo numero α' di punti x' variabili, a ciascun dei quali, nel legame testè definito, corrisponde lo stesso x; sono cioè i punti x' omologhi del generico x, nella *corrispondenza inversa*, di quella considerata, la quale faceva passare da un punto di C' a punti di C.

Come vedesi, la corrispondenza algebrica fra C, C' può pensarsi come l'insieme di due operazioni, inverse l'una dell'altra. Talora parlando della corrispondenza s'intende alludere all'insieme delle due operazioni, tal altra invece ad una sola delle due. Il contesto del discorso chiarisce in qual senso la parola è usata nei casi singoli. Se una delle due operazioni s'indica con T, l'altra s'indicherà con T^{-1}.

I numeri α, α' diconsi gl'*indici* della corrispondenza, che denotasi col simbolo (α, α'), quando occorre tenerne in evidenza gl'indici.

Se fra due curve C, C' vien generata una corrispondenza mediante un numero finito di operazioni geometriche, ciascuna delle quali sia traducibile in equazioni algebriche, è chiaro che la corrispondenza generata risulta algebrica.

Naturalmente le due curve possono, in particolare, esser sovrapposte. Si parla allora di una corrispondenza fra i punti di una medesima curva e s'intende che ad ogni punto di questa è applicabile l'operazione diretta e la inversa.

Se le due curve C, C' son piane ed hanno le equazioni rispettive:

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad F(x_1', x_2') = 0,$$

si può sempre, cangiando eventualmente gli assi coordinati, ottenere che due qualunque degli α punti di C corrispondenti al generico punto di C', non abbiano eguali nè le ascisse nè le ordinate.

Allora ciascuna delle x_1, x_2 risulta funzione ad α valori del punto (x_1', x_2') di C', e pertanto la corrispondenza vien rappresentata dalle equazioni:

$$\varphi(x_1;\, x_1', x_2') = 0, \quad \psi(x_2;\, x_1', x_2') = 0,$$

ove φ, ψ son polinomi rispettivamente in x_1, x_1', x_2' ed in x_2, x_1', x_2' (Noz. introd. III). Gli α punti di C, son le intersezioni variabili di C colle coppie di curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (che si riducono qui a gruppi di rette parallele agli assi x_2 ed x_1); gli α' punti di C' omologhi del generico punto di C, son le intersezioni variabili di C' colle coppie di curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (in tal caso debbonsi considerare come quantità date x_1, x_2).

Conviene sottolineare come segue la conclusione cui siam giunti:

Una corrispondenza algebrica fra due curve algebriche piane può sempre rappresentarsi con due equazioni.

61. Il concetto generale di corrispondenza fra due varietà. Corrispondenze irriducibili e riducibili. — La nozione di corrispondenza algebrica può estendersi a due varietà algebriche V, V', anche di dimensioni differenti k, k'. Si può cioè imaginare fra il punto x variabile su V ed il punto x' variabile su V', una relazione, che renda x funzione algebrica ad un certo numero α di valori di x'. Naturalmente, se si vuole che, mentre x' varia su V', il punto x descriva tutta la V e non una varietà subordinata, occorre (ma non basta) che $k' \geq k$.

Più in generale possiamo porre fra le coordinate di x, x', che son già separatamente legate dai sistemi di equazioni rappresentanti V, V' (negli spazi in cui queste varietà si suppongon immerse), un sistema S di equazioni, nel quale compajano simultaneamente le coordinate di x e quelle di x'. Un sistema siffatto associa ad un generico punto dell'una varietà, una varietà subordinata dell'altra (in particolare un gruppo di punti).

Questo concetto si può presentare sotto un punto di vista più elevato e fecondo. Fissiamo l'attenzione sopra l'ente $\infty^{k+k'}$, W, costituito dalle coppie di punti di V, V'. È manifestamente un ente algebrico. Invero, se $x_1, x_2, \ldots$ son le coordinate (non omogenee) del punto x di V, $x_1', x_2', \ldots$, le coordinate (non omogenee) del punto x' di V', nello spazio lineare il cui punto generico ha per coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_1', x_2' \ldots)$, l'ente W è rappresentato dal sistema di equazioni che risulta dal considerare insieme il sistema (nelle $x_1, x_2, \ldots$) rappresentativo di V e quello (nelle $x_1', x_2', \ldots$) rappresentativo di V'.

Orbene, un sistema S di equazioni fra le $x_1, x_2, \ldots;\, x_1', x_2', \ldots$, che si aggiunga al predetto sistema, rappresentante W, determina una varietà algebrica H, contenuta in W. I punti di H sono imagini delle coppie di punti omologhi nella corrispondenza definita da S. La varietà H è l'ente rappresentativo, entro W, della data corrispondenza.

Pertanto *una corrispondenza algebrica fra due varietà V_k, V_k', può definirsi come una varietà algebrica subordinata alla varietà (algebrica) delle coppie di punti di V_k, V_k'.*

Introduciamo esplicitamente l'ipotesi della irriducibilità delle varietà V, V'. Allora l'ente W risulta pur esso irriducibile. E invero, suppongasi, se è possibile, che W si spezzi in due parti distinte W_1, W_2. Le coppie x, x' dei punti di V, V', rappresentate dai punti di una di queste parti, p. es. W_1, coi loro x riempiono una varietà algebrica contenuta in V o coincidente con V. Ma in quest'ultimo caso i punti x' di queste coppie non posson riempire V', perchè se no la W_1 da sola, e non insieme a W_2, costituirebbe l'ente W. Dunque, o gli x riempiono una varietà di dimensione $< k$ o gli x' riempiono una varietà di dimensione $< k'$: in ogni caso la varietà W_1 risulta di dimensione $< k + k'$. Similmente W_2 risulta di dimensione $< k + k'$. E quindi anche $W = W_1 + W_2$ è di dimensione $< k + k'$, contro il supposto che sia l'ente rappresentativo di tutte le $\infty^{k+k'}$ coppie di punti di V, V'. Si conclude che:

La varietà delle coppie di punti di due varietà algebriche irriducibili, è un ente algebrico irriducibile.

Una corrispondenza algebrica fra V, V' si dice *irriducibile*, quando è rappresentata da una varietà algebrica irriducibile tracciata su W. Dicesi *riducibile* nel caso contrario.

OSSERVAZIONE 1ª. — Se le due varietà date son due curve irriducibili C, C', la varietà delle loro coppie di punti è una superficie algebrica F e le corrispondenze fra C, C' hanno per imagini le curve algebriche tracciate su F. Come superficie F può assumersi *un modello proiettivo, privo di punti multipli, in corrispondenza birazionale, senza eccezioni, colla varietà delle coppie di punti di C, C'.* Un tal modello costruiscesi ad es. così: Le C, C', degli ordini rispettivi n, n', appartengano ad S_r ($r \geq 5$), sieno prive di punti multipli e situate in mutua posizione generica. Una imagine concreta della varietà delle coppie di punti di C, C', è data dal sistema Σ delle ∞^2 rette appoggiate a C, C'. Il qual sistema gode della proprietà che vi sono nn' sue rette appoggiate ad un generico S_{r-3}: tante quanti i punti comuni alle proiezioni piane di C, C' da quello S_{r-3}.

Perchè la congiungente di due punti A, A' di C, C', conti più volte fra le rette di Σ appoggiate ad uno spazio Ω, ad $r-3$ dimensioni, occorre o che una delle proiezioni piane di C, C' da Ω, abbia nel punto P, proiezione di A, A', un punto doppio (almeno), oppure che le C, C' si tocchino in P. Nel primo caso

una corda di una delle due curve si appoggierebbe all'altra; nel secondo l'iperpiano proiettante da Ω la tangente a in A alla C, dovrebbe contenere anche la tangente a' in A' alla C', e ciò qualunque fosse lo spazio Ω appoggiato ad AA'. Il che implicherebbe che le a, a' risultassero complanari. Cose ambedue da escludersi, attesa la mutua posizione generica delle due curve.

Sulla varietà grassmanniana (priva di punti multipli) i cui punti rappresentano, senza eccezioni, le rette di S_r (¹), a Σ corrisponde pertanto una superficie F, che possiede i voluti requisiti (²).

Nel seguito, quando avremo bisogno di considerare la superficie delle coppie di punti di C, C', ci riferiremo sempre ad un modello F, che, come quello costruito, sia privo di punti multipli e di curve eccezionali (corrispondenti a singole coppie di punti di C, C').

Una corrispondenza T fra le curve C, C' ha per imagine su F una curva, che denoteremo collo stesso simbolo della corrispondenza. In particolare le *corrispondenze degeneri elementari*, cioè quelle che si ottengono associando ad un punto x fissato su C, tutti i punti y di C'; oppure ad un punto y fissato su C', tutti i punti x di C, sono rappresentate rispettivamente da curve, che denoteremo coi simboli K_x ed L_y. Le K_x son birazionalmente equivalenti a C'; le L_y a C.

Le ∞^1 curve K_x formano su F un sistema continuo tale che per un punto qualunque di F passa una sola curva K_x, perchè vi è su C un sol punto x, che faccia parte di una data coppia x, y di punti tolti da C, C'. Si dice pertanto che le K_x formano un *fascio* $\{K_x\}$; fascio che sarà generalmente *irrazionale*, anzi di genere p eguale al genere di C, giacchè i suoi elementi K_x corrispondono birazionalmente ai punti di C.

Similmente le L_y formano un fascio $\{L_y\}$ di genere p', eguale al genere di C'.

Due K_x non si tagliano e similmente due L_y; mentre una K_x ed una L_y si segano in un punto, che rappresenta

(¹) Cfr. colla nota (²) a pag. 121.

(²) Non così, se come superficie F si assumesse una sezione iperpiana generica di Σ, perchè tale sezione, per $r > 5$, risulterebbe bensì priva di punti multipli, ma conterrebbe nn' *rette eccezionali* corrispondenti alle nn' coppie di punti di C, C' situate sull'iperpiano secante.

la coppia x, y costituita dal punto x fisso per la corrispondenza degenere K_x e del punto y fisso per la L_y.

Una corrispondenza (α, α') è rappresentata da una curva T, segata in α' punti delle K_x ed in α punti dalle L_y. Supposto T irriducibile, il sistema delle sezioni di T colle K_x costituisce su T una involuzione di ordine α' e di genere p; e similmente le sezioni delle L_y con T costituiscono ivi un'involuzione di ordine α e di genere p'.

Quando le C, C' sieno birazionalmente equivalenti, sicchè fra esse interceda almeno una corrispondenza $(1, 1)$, questa sarà rappresentata da una curva unisecante tanto le K_x che le L_y.

È infine chiaro che le proprietà precedenti si posson considerare come spettanti ad ogni superficie F con due fasci unisecantisi, di generi p, p', perchè ogni tal superficie è imagine delle varietà delle coppie di punti di due curve, di generi p, p', che rappresentino coi loro punti gli elementi (curve) dei due fasci.

Osservazione 2ª. — Quando le V, V' sian sovrapposte $(k=k')$, chiamata M la varietà comune sostegno, la W delle coppie di punti di V, V' è la varietà delle coppie *ordinate* dei punti di M; ordinate nel senso che in ognuna di tali coppie occorre distinguere qual'è il punto che si attribuisce a V e quale quello che s'attribuisce a V'.

La varietà Φ delle coppie *non ordinate* di M è pur essa algebrica. Se p. es. M appartiene ad $S_{r'}$, come modello proiettivo di Φ si può assumer la varietà delle corde di M, che è manifestamente algebrica (la condizione perchè una retta di $S_{r'}$ si appoggi in due punti ad M si esprime algebricamente). Fra Φ, W c'è una corrispondenza algebrica $(1, 2)$, perchè ogni coppia non ordinata di M si può ordinare in due modi diversi.

Le coppie di punti di W che corrispondono ai punti di Φ, costituiscono una serie tale che un punto di W appartiene ad una sola di quelle coppie: un'*involuzione di 2° ordine* I, su W. La I può anche considerarsi generata da una trasformazione birazionale involutoria τ di W in sè. Mediante τ la varietà a $k-1$ dimensioni, che rappresenta su W una corrispondenza T, di indici finiti, fra V e V', si muta nella varietà imagine della corrispondenza inversa T^{-1}.

Se la corrispondenza T fra V, V' è *simmetrica* — cioè se $T = T^{-1}$ — è inutile distinguere le due varietà; si può parlare di una corrispondenza fra i punti di M. Ed allora come imagine della corrispondenza può assumersi una varietà tracciata su Φ; ma può assumersi altresì, se vuolsi, una varietà di W. Soltanto, in questo caso tale varietà *apparterrà* all'involuzione I, cioè sarà mutata in sè da τ.

62. **Corrispondenze rappresentabili con una sola equazione.** — Il risultato con cui chiudesi il n. 60 non esclude che vi siano corrispondenze, fra due curve C, C', rappresentabili con una sola equazione.

Nel fatto, indicate con x_1, x_2 le coordinate cartesiane di un punto $x(x_1, x_2)$ variabile sulla curva piana C e con y_1, y_2 le coordinate cartesiane di un punto $y(y_1, y_2)$ variabile sulla curva piana C', una corrispondenza rappresentabile con una sola equazione si ottiene senz'altro scrivendo fra le x_1, x_2; y_1, y_2 un'equazione del tipo:

$$\varphi(x_1, x_2; \; y_1, y_2) = 0, \tag{1}$$

ove φ sia un polinomio di un certo grado m nelle x e di un certo grado m' nelle y.

Ciò vale anche se le curve C, C', anzichè esser piane, appartengono rispettivamente ad uno spazio S_r e ad uno spazio $S_{r'}$; si porrà allora, similmente, fra i punti $x(x_1, \ldots, x_r)$, $y(y_1, \ldots, y_{r'})$ delle due curve una relazione del tipo:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_r; \; y_1, \ldots, y_{r'}) = 0,$$

φ continuando a denotare un polinomio nelle x e nelle y.

Per semplicità di discorso, ci riferiremo a curve piane. Le conclusioni saranno tuttavia applicabili anche a curve iperspaziali.

Sieno dunque:

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad F(y_1, y_2) = 0 \tag{2}$$

le equazioni delle curve C, C', distinte o coincidenti. Al variare del punto x su C, la (1) rappresenta un sistema ∞^1 di curve D', d'ordine m', del piano di C'. Delle intersezioni di C' colla curva variabile D', alcune potranno restare fisse. Se O è una di queste, la molteplicità d'intersezione di D' con C', in O (somma delle molteplicità d'intersezione coi singoli rami di C', uscenti da O), resterà costante fino a che qualcuna delle intersezioni variabili venga (sull'uno o sull'altro ramo) a cadere in O. Indichiamo con Q il gruppo delle intersezioni fisse, contando ognuna, per ogni ramo da essa uscente, colle suddette molteplicità costanti. Il gruppo Y dei punti y di C', che assumiamo come omologhi del punto x di C, è allora costituito dalle intersezioni con C' della curva D', corrispondente ad x, fuori del gruppo Q.

Viceversa, dato genericamente y su C', gli omologhi nella corrispondenza inversa saranno le intersezioni variabili di C colla curva D, d'ordine m, rappresentata ancora dalla (1), in cui però le y_1, y_2 si considerino come parametri dati. Muovendosi il punto y su C', la curva D descrive pur essa un sistema ∞^1 nel piano di C, avente un gruppo R di intersezioni fisse con C.

Ciò premesso, si considerino tutte le curve d'ordine m', del piano di C', aventi, in ogni punto di Q, con ognuno dei rami di C' da esso uscenti, la medesima molteplicità d'intersezione che ha con quel ramo la generica D'. Tali curve formano un sistema lineare (¹), contenente le D'.

Qui conviene separare il caso in cui le C, C' son distinte, da quello in cui son sovrapposte. Nel primo caso nessuno dei punti del gruppo Y corrispondente al generico x, potrà coincidere con x; nel secondo invece Y potrà contenere x, contato un certo numero $\gamma(>0)$ di volte, eguale alla molteplicità d'intersezione di C' (cioè di C) colla curva D', in quel punto. Nulla vieta, in tal caso, di escludere dal gruppo dei punti omologhi di x, il punto medesimo; ed è ciò che noi faremo. Ad un generico x rispondono allora su C' punti tutti distinti da x.

L'intero γ chiamasi *valenza (positiva) della corrispondenza*. Allorchè la D', corrispondente al generico x, non passa per x, si dice che la corrispondenza è a *valenza nulla* ($\gamma = 0$).

Quando la corrispondenza è a valenza nulla, come accade sempre allorchè le due curve son distinte, il gruppo Y dei punti omologhi di x, varia su C' entro una serie lineare, segata dal sistema lineare di curve sopra definito, contenente le D'.

(¹) Infatti, per esprimere che una curva di dato ordine ha con un ramo dato, nella origine (che può supporsi l'origine delle coordinate) un'assegnata molteplicità d'intersezione, si scrive un sistema di equazioni lineari nei coefficienti dell'equazione di quella curva (vedi a pag. 151).

Quando la corrispondenza è a valenza $\gamma > 0$, varia invece in una serie lineare il gruppo degli omologhi di x, aumentato del punto stesso x, contato γ volte.

Concludendo:

Una corrispondenza fra due curve distinte, rappresentabile con una sola equazione, è sempre a valenza nulla.

Una corrispondenza fra due curve coincidenti, rappresentabile con una sola equazione, è a valenza $\gamma \geq 0$.

Proviamo ora, reciprocamente, che:

Una corrispondenza a valenza $\gamma \geq 0$, fra due curve C, C', è rappresentabile con una sola equazione.

Le due curve C, C' sieno piane e conserviamo, nei loro riguardi, le notazioni precedenti. Sia T una corrispondenza algebrica, che faccia passare dal generico punto x di C al gruppo Y di punti di C'; e, al variare di x, il gruppo $Y + \gamma x$ (γ è necessariamente nullo, se le C, C' son distinte) muovasi entro una serie lineare.

Considerato sul piano di C' (eventualmente coincidente con quello di C) un sistema lineare di curve Σ, che stacchi, fuori di un gruppo di punti fissi, la serie completa $|Y + \gamma x|$, in guisa che la dimensione del sistema segante eguagli quella della serie segata, la curva di Σ che stacca il gruppo $Y + \gamma x$, essendo determinata in modo algebrico e univoco da x, ha i coefficienti della sua equazione, che son funzioni razionali di x. Dopo aver moltiplicato i due membri di tale equazione per un conveniente polinomio in x_1, x_2, essa riducesi alla forma:

$$\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0,$$

dove φ è un polinomio tanto nelle y come nelle x. L'equazione precedente rappresenta la condizione perchè due punti variabili sieno omologhi nella data corrispondenza. Essa è dunque l'unica equazione della T.

63. Inversa di una corrispondenza a valenza positiva o nulla. — Se fra le due curve piane C, C', aventi le equazioni (2), intercede una corrispondenza T a valenza $\gamma \geq 0$ ($\gamma = 0$, se C, C' son distinte), facente passare dai punti di C ai punti C', la inversa T^{-1} della T, farà passare dai punti di C' ai punti di C, ed essendo rappresentata dalla medesima equazione (1) che rappresenta T, sarà pur essa a valenza positiva o nulla.

Quando le due curve C, C' sieno distinte, è senz'altro chiaro che la T^{-1} è a valenza zero, come la T. Non altrettanto chiaro è che la T^{-1} abbia la stessa valenza $\gamma \geq 0$ della T, allorchè le due curve son coincidenti (¹).

Esaminiamo un po' davvicino la cosa. Un punto a (a_1, a_2) del comune sostegno delle curve coincidenti C, C', può esser pensato sia come punto x di C, che come punto y di C'. Nel primo caso i suoi omologhi si otterranno facendo coesistere le equazioni:

$$f(y_1, y_2) = 0, \quad \varphi(a_1, a_2; y_1, y_2) = 0; \tag{3}$$

nel secondo caso, facendo coesister le equazioni:

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2; a_1, a_2) = 0. \tag{4}$$

Sicchè, se la D' corrispondente al generico a, assunto come punto x, non passa pel punto stesso, le (3) non avranno alcuna soluzione $y_1 = a_1$, $y_2 = a_2$, epperò neppure le (4) avranno alcuna soluzione $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$; cioè la curva D, corrispondente al generico a, assunto come punto y, non passerà per questo punto.

Dunque, anche quando le C, C' coincidono, se $\gamma = 0$, la T^{-1} risulta a valenza nulla. Pertanto, senza separare il caso delle curve distinte, da quello delle curve coincidenti, potremo enunciare:

L'inversa di una corrispondenza a valenza nulla, fra due curve, è a valenza nulla.

Ma, se $\gamma > 0$, l'unica conclusione immediata che potrà ricavarsi, è che anche la T^{-1} avrà una valenza maggior di zero. Per dimostrare che le due valenze sono eguali, occorre provare che le due curve:

$$\varphi(a_1, a_2; x_1, x_2) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2; a_1, a_2) = 0$$

hanno nel punto $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ la stessa molteplicità di intersezione colla curva $f(x_1, x_2) = 0$. Ora quelle due curve, per a generico sulla curva $C = C'$, son tra loro distinte, a meno che la corrispondenza non sia simmetrica (il che richiede la simmetria dell'equazione (1) rispetto alle coppie di variabili $x_1, x_2; y_1, y_2$). Se questo fatto particolare si verifica,

(¹) Se le due curve coincidono, supporremo coincidenti anche le loro equazioni.

la corrispondenza diretta e l'inversa coincidono, epperò è senz'altro evidente che hanno la stessa valenza.

Nel n. 76 proveremo agevolmente che l'inversa di una corrispondenza a valenza ha la stessa valenza, sulla scorta dell'analogo teorema ora dimostrato per $\gamma = 0$ e del concetto di somma di due corrispondenze. Tuttavia, per chi lo desideri, diamo qui una dimostrazione diretta di questo fatto.

Il punto $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ sia generico su $C (= C')$ e siano $\alpha(t)$, $\beta(t)$ le due serie di potenze del parametro t, che forniscono la rappresentazione del ramo ρ di C uscente da $\bar{x}$; il punto $\bar{x}$ corrisponda a $t = 0$. Al variare di x su ρ, la curva corrispondente D', che è determinata univocamente da t, descrive un sistema ∞^1, avendo con ρ in x, molteplicità d'intersezione γ (in particolare un contatto γ-punto con ρ). Per $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$ essa assume la posizione $\bar{D}'$. Similmente $\bar{D}$ è la curva D, che corrisponde all'assumere $\bar{x}$ come punto y $(y_1 = \bar{x}_1,\ y_2 = \bar{x}_2)$.

Indichiamo con $\left\{\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right\}$ la derivata k-esima di $\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)$ rispetto a t, quando si pone $y_1 = \alpha(t)$, $y_2 = \beta(t)$, e si riguardano x_1, x_2 come parametri; e con $\left[\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right]$ la derivata k-esima di $\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)$ rispetto t, allorchè si assume $x_1 = \alpha(t)$, $x_2 = \beta(t)$, e si riguardano y_1, y_2 come parametri. Infine l'indice zero, apposto ai simboli introdotti, serva a denotare i valori assunti da quelle derivate per $t = 0$ e rispettivamente $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$; $y_1 = \bar{x}_1$, $y_2 = \bar{x}_2$. Indicata con $\Phi(t)$ la espressione $\varphi(\alpha, \beta; \alpha, \beta)$, che è identicamente nulla, viene:

$$\left(\frac{d^k\Phi}{dt^k}\right)_{t=0} = \left\{\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right\}_0 + \left[\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right]_0,$$

e quindi, essendo identicamente nulla la Φ, per ogni t, epperò anche per $t = 0$:

$$\left\{\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right\}_0 + \left[\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right]_0 = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ora

$$\left\{\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right\}_0 = \left(\frac{d^k\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \alpha, \beta)}{dt^k}\right)_{t=0}, \quad \left[\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right]_0 = \left(\frac{d^k\varphi(\alpha, \beta; \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{dt^k}\right)_{t=0},$$

dunque:

$$\left(\frac{d^k\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \alpha, \beta)}{dt^k}\right)_{t=0} = -\left(\frac{d^k\varphi(\alpha, \beta; \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{dt^k}\right)_{t=0}. \tag{5}$$

A queste deve aggiungersi la:

$$(\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \alpha, \beta))_{t=0} = (\varphi(\alpha, \beta; \bar{x}_1, \bar{x}_2))_{t=0}. \tag{6}$$

L'annullamento del primo membro della (6) e dei primi membri delle (5), per $k = 1, 2, \ldots, \gamma - 1$, esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva $\overline{D}'$ abbia con ρ, in $\bar{x}$, un incontro γ-punto [1]. Se questa condizione è soddisfatta, risulta dunque, in virtù delle (5), (6), soddisfatta anche quella che esprime l'incontro γ-punto di $\overline{D}$ con ρ, in $\bar{x}$.

Si conclude che:

L'inversa di una corrispondenza a valenza $\gamma > 0$ ha la stessa valenza.

OSSERVAZIONE 1ª. — La dimostrazione precedente ci offre l'occasione per stabilire una proprietà generale degl'inviluppi di curve piane:

Se la curva generica di un sistema ∞^1, $f(x, y; t) = 0$, ha con una curva data, in un punto P su questa variabile, un incontro γ-punto (in particolare un contatto γ-punto), in P si annullano $f, \dfrac{\partial f}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial^{\gamma-1} f}{\partial t^{\gamma-1}}$.

Sia H la curva variabile nel sistema, $\overline{H}$ una sua posizione genericamente fissata, $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y})$ la corrispondente posizione di P, e ρ il ramo, $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, di origine $\overline{P}$, su cui varia P. L'origine $\overline{P}$ corrisponda a $t = \bar{t}$. Poichè la $f(\alpha, \beta; t)$ è identicamente nulla, varranno le relazioni:

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} + \left\{\frac{d^k f}{dt^k}\right\} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

ove $\left\{\dfrac{d^k f}{dt^k}\right\}$ denota la derivata k-esima di $f(\alpha, \beta; t)$ fatta prescindendo dalla circostanza che t comparisce esplicitamente nella f. D'altronde:

$$\left\{\frac{d^k f}{dt^k}\right\}_{t=\bar{t}} = \left\{\frac{d^k f(\alpha, \beta; \bar{t})}{dt^k}\right\}_{t=\bar{t}} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

[1] Invero le γ quantità nominate, a meno di fattori numerici, sono i coefficienti di $t^0, t, t^2, \ldots, t^{\gamma-1}$ nello sviluppo in serie di TAYLOR-CAUCHY della funzione $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \alpha, \beta)$.

e l'annullarsi di $f(\alpha, \beta; t)$ per $t = \bar{t}$, e dei secondi membri delle precedenti relazioni, fino a $k = \gamma - 1$, esprime l'incontro γ-punto di $\overline{H}$ con ρ, in $\overline{P}$. Dalle (7) segue pertanto l'annullarsi delle $\dfrac{\partial^k f}{\partial t^k}$ per $t = \bar{t}$ (e quindi $\alpha = \bar{x}$, $\beta = \bar{y}$) fino a $k = \gamma - 1$.

La proprietà s'inverte senz'altro. Per aver la completa estensione delle note proprietà degli inviluppi a contatto bipunto, conviene aggiungere la seguente:

Nelle ipotesi suddette, per un punto Q del piano, prossimo a P, passan γ curve distinte del sistema, che tendono a coincidere, quando Q s'avvicina a P.

Se infatti si voglion le curve H passanti pel punto $Q(x_0, y_0)$, bisogna trovar le radici dell'equazione in t, $f(x_0, y_0; t) = 0$. Ora la $f(\bar{x}, \bar{y}; t) = 0$ ha una radice γ-pla per $t = \bar{t}$, onde, pel teorema di esistenza delle funzioni analitiche implicite [1] — alle quali limitiamo le nostre considerazioni — per Q abbastanza vicino a $\overline{P}$, l'equazione $f(x_0, y_0; t) = 0$ avrà γ radici distinte vicine a $\bar{t}$ e che si ridurranno a questo valore per Q coincidente con $\overline{P}$.

OSSERVAZIONE 2ª. — Il teorema di pag. 51 circa le proprietà $a)$, $b)$, che caratterizzano una g_n^1, non è che un caso particolare del fatto che la inversa di una corrispondenza a valenza zero ha la stessa valenza. Anche per quel teorema serve la circostanza che, nei punti di un gruppo generico della g_n^1, il fascio $\varphi - \lambda\psi = 0$ incontra semplicemente la curva C (pag. 55).

OSSERVAZIONE 3ª. — Il fatto che l'inversa di una corrispondenza a valenza γ abbia la stessa valenza, si può derivare, anzichè da proprietà differenziali, da proprietà strettamente algebriche. Si tratta di provare che se, per x generico sulla curva $f(y_1, y_2) = 0$, la curva $\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$ ha con $f(y_1, y_2) = 0$, in x, molteplicità d'intersezione γ, e per y generico sulla $f(x_1, x_2) = 0$, la $\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$ ha con $f(x_1, x_2) = 0$, in y, molteplicità d'intersezione δ, risulta $\gamma = \delta$.

Suppongansi gli assi coordinati in posizione generica rispetto alla curva data C. Eliminiamo x_2 fra le equazioni:

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0.$$

[1] Loc. cit. a pag. 86.

L'equazione risultante dovrà ammettere la radice δ-pla $x_1 = y_1$, epperò sarà della forma $(x_1 - y_1)^\delta g(x_1\,;\, y_1\,,\, y_2) = 0$. Eliminando y_2 fra questa e la $f(y_1\,,\, y_2) = 0$, nella quale y_2 figura a grado n eguale all'ordine di C, l'equazione risultante $R(x_1\,,\, y_1) = 0$ conterrà il fattore $(x_1 - y_1)^{n\delta}$. Ora alla stessa equazione risultante si può giungere eliminando prima y_2 fra le:

$$f(y_1\,,\, y_2) = 0, \quad \varphi(x_1\,,\, x_2\,;\, y_1\,,\, y_2) = 0,$$

eppoi x_2 fra l'equazione così ottenuta ed $f(x_1\,,\, x_2) = 0$. In tal guisa si trova che in $R(x_1\,,\, y_1) = 0$ il fattore $x_1 - y_1$ deve comparire all'esponente $n\gamma$; epperò ne segue $n\gamma = n\delta$, cioè $\gamma = \delta$.

64. Corrispondenze dotate di punti multipli variabili. — Sieno ancora C, C' le due curve piane, distinte o coincidenti, di equazioni (2), tra le quali intercede la corrispondenza a valenza definita dalla (1); e suppongasi che al generico punto x di C corrisponda su C' un gruppo Y di punti, non tutti distinti fra loro. Suppongasi cioè che le intersezioni variabili di C' colla curva D' omologa di x, non sieno intersezioni semplici delle due curve, ma che invece la D' abbia con C' qualche incontro pluripunto variabile.

Precisamente: mentre x muovesi sopra il ramo ρ di C, avente l'origine nel punto generico $\bar{x}$, e rappresentato parametricamente dalle serie:

$$x_1 = \alpha(t), \quad x_2 = \beta(t),$$

ove $\bar{x}_1 = \alpha(\bar{t})$, $\bar{x}_2 = \beta(\bar{t})$, uno, y, dei punti omologhi, muovasi sul ramo ρ' di C', avente l'origine in un punto $\bar{y}$ di C' corrispondente ad $\bar{x}$.

Attesa la genericità di $\bar{x}$, ad un punto x di ρ corrisponde il sol punto y del ramo ρ', cosicchè le coordinate $y_1\,,\, y_2$ di y risulteranno esse pure funzioni regolari di t:

$$y_1 = \alpha_1(t), \quad y_2 = \beta_1(t),$$

il punto $\bar{y}$ corrispondendo a $t = \bar{t}$. Risulta allora identicamente nulla la $\varphi(\alpha,\, \beta\,;\, \alpha_1\,,\, \beta_1)$. A partire da questa premessa, si posson ripetere parola per parola le argomentazioni del n. prec. e si arriva alla conclusione:

Se al punto generico x di C corrisponde un gruppo di punti di C', di cui fa parte il punto y, da contarsi ν volte, allora fra gli omologhi di y, nell'inversa, c'è il punto x da contarsi esattamente ν volte.

Ne consegue come corollario che:

Se in una corrispondenza fra due curve C, C' ad un punto generico di una prefissata di esse corrispondon punti distinti dell'altra, lo stesso accade nella corrispondenza inversa.

65. Applicazione alle serie razionali di gruppi di punti sopra una curva. — Un'applicazione utilissima ed immediata del teorema or ora dimostrato e del fatto che l'inversa di una corrispondenza a valenza zero, è pure a valenza nulla (n. 63), può farsi a dimostrare la proprietà seguente:

I gruppi di una qualunque serie razionale di gruppi di punti sopra una curva, son equivalenti fra loro.

Sia Γ una tal serie di gruppi di n punti della curva C; e supponiamola dapprima semplicemente infinita e senza punti multipli variabili. Il gruppo generico di Γ sia cioè formato da n punti distinti. Rappresentiamo birazionalmente Γ coi punti d'una retta C'. Nasce così una corrispondenza algebrica (n, ν) fra C, C': ad un punto x di C corrispondono i ν punti di C' imagini dei ν gruppi distinti di Γ passanti per x, ove ν sia l'indice di Γ; ad un punto y di C' corrispondono gli n punti di C costituenti il gruppo di Γ rappresentato da y.

Ricordiamo ora che due gruppi qualunque di ν punti, sopra una retta, appartengono alla g^ν_ν di tutti i gruppi di ν punti (n. 32). Se ne trae che la corrispondenza considerata è a valenza nulla nel passaggio da C a C', computandosi semplicemente ognuno dei ν punti omologhi del punto generico di C, e quindi a valenza zero anche nel senso inverso da C' a C, computandosi semplicemente ognuno dei punti del generico gruppo di Γ (n. prec.). Questo vuol dire che i gruppi di Γ son equivalenti.

Dobbiamo ora estendere il risultato alle serie ∞^1 con punti multipli, eppoi alle serie ∞^r $(r > 1)$.

Sia Γ una serie razionale ∞^1, con punti multipli; p. es. con 2 punti doppi e 5 punti tripli variabili. La corrispondenza birazionale fra i gruppi di Γ e i punti di una retta C', associa ad un punto y di C' i due punti doppi del gruppo di Γ, omologo di y. Onde, pel teorema di Lüroth (pag. 32), la serie ∞^1 delle coppie di punti doppi è razionale. Similmente si vede che son razionali la serie delle quintuple di punti tripli, e la serie dei gruppi di punti rimanenti, che sono semplici.

In forza della conclusione precedente, ciascuna delle tre serie nominate consta dunque di gruppi equivalenti; epperò sono equivalenti i gruppi della serie data, ognun dei quali si ottiene aggiungendo al doppio di un gruppo della prima, il triplo di un gruppo della seconda e infine un gruppo della terza.

Passiamo alle serie razionali $\infty^r (r > 1)$. I gruppi di una tal serie Γ posson rappresentarsi birazionalmente coi punti di uno spazio lineare S_r; e, siccome fissato un punto di S_r, ogni altro punto dello spazio è congiunto a quello da una retta, che rappresenta una serie subordinata razionale ∞^1, così fissato un gruppo generico di Γ, ogni altro gruppo della serie sta con quello in una medesima serie razionale ∞^1. Pertanto tutti i gruppi di Γ son equivalenti a quel gruppo fisso, cioè equivalenti fra loro.

Osservazione. — Il ragionamento svolto per dimostrare l'equivalenza dei gruppi di una serie razionale ∞^1, priva di punti multipli variabili, non esclude che questa serie sia composta con un'involuzione della curva C. Se Γ è composta con una γ^1_μ; cioè se i ν gruppi di Γ passanti per un punto x generico di C, passano in conseguenza per i $\mu - 1$ punti coniugati di quello nella γ^1_μ, accadrà soltanto che l'indice della serie dei gruppi di ν punti corrispondenti su C' ai punti di C, non sarà eguale al numero n dei punti di un gruppo di Γ, ma sibbene ad $n:\mu$ (cfr. col n. 68). Ma ciò non importa alcuna modificazione al nostro ragionamento.

66. Trasformazione di gruppi equivalenti mediante una corrispondenza algebrica. — Vogliamo indagare come si trasformino gruppi equivalenti di una data curva C, per mezzo di una corrispondenza algebrica, che muti C in un'altra curva C'.

Suppongasi anzitutto che fra C, C' interceda una corrispondenza $(1, \alpha')$. Allora si sa (pag. 63) che ad una serie lineare di C risponde una serie lineare di C', composta mediante la involuzione $\gamma^1_{\alpha'}$, imagine dei punti di C; e quindi gruppi equivalenti si mutano in gruppi equivalenti. Viceversa, ad ogni serie lineare di C', composta mediante la $\gamma^1_{\alpha'}$, corrisponde una serie lineare su C.

Consideriamo ora una serie lineare g_n su C', non composta con la $\gamma^1_{\alpha'}$. Mediante la data corrispondenza essa trasformasi in una serie algebrica σ_n, di gruppi di n punti di C. Due gruppi qualunque di σ_n, corrispondenti ai gruppi G_1, G_2 di g_n, appartengono ad una serie algebrica Σ, ∞^1, i cui gruppi provengono da quelli della g^1_n individuata da G_1, G_2. Poichè ad ogni gruppo di tale g^1_n corrisponde un solo gruppo di Σ, la serie Σ, pel teorema di Lüroth (pag. 32), è razionale; epperò i suoi gruppi sono equivalenti (n.° prec.). Dunque due gruppi qualsiansi di σ_n son tra loro equivalenti.

Passiamo infine al caso generale di una corrispondenza (α, α') d'indici qualunque.

Fissiamo l'attenzione sull'ente algebrico ∞^1, H, costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza fra C, C' (cfr. col n. 61, Oss. 1ª). Fra C, H si ha una corrispondenza $(1, \alpha')$, nella quale sono omologhi un punto di C ed un elemento (coppia) di H, quando quel punto appartiene a questa coppia. Similmente si ha una corrispondenza $(\alpha, 1)$ fra H e C'.

Ciò premesso, consideriamo una serie lineare g_n su C. Ad essa risponde su H, mediante la corrispondenza $(1, \alpha')$, una $g_{n\alpha'}$; a questa corrisponde su C' una serie algebrica $\sigma_{n\alpha'}$, formata da gruppi equivalenti. Poichè la corrispondenza fra C, C' è il *prodotto* delle corrispondenze $(1, \alpha')$, $(\alpha, 1)$, cioè si ottiene applicando, le une dopo le altre, le operazioni generatrici delle due corrispondenze, così alla g_n di C risponderà su C' la serie $\sigma_{n\alpha'}$. Si conclude col teorema:

Una corrispondenza d'indici qualunque fra due date curve, muta gruppi equivalenti dell'una in gruppi equivalenti dell'altra.

67. La formula di Zeuthen e il suo significato geometrico-funzionale. — Consideriamo ancora una corrispondenza algebrica (α, α') fra due curve C, C', di generi rispettivi p, p'. Supponiamo ch'essa non possegga infiniti elementi multipli; che cioè ad un punto generico di C corrispondano su C', α' punti distinti, e quindi (n. 64) ad un punto generico di C', α punti distinti di C.

Sopra ciascuna delle due curve, oltre ai punti multipli della corrispondenza — punti generalmente doppi — in ognuno dei quali coincidono due o più — generalmente due — omologhi di un medesimo punto dell'altra curva, vi sono da considerare i *punti di diramazione* (cfr. colla pag. 182), cui corrispondono sull'altra curva punti almeno doppi. Il *gruppo di diramazione*, sopra ognuna delle due curve, si definirà come il gruppo dei punti di diramazione, ciascun dei quali si conti $k-1$ volte, se k dei suoi omologhi coincidono (cfr. col n. 33).

Naturalmente due degli omologhi di un punto di C (o di C') dovranno riguardarsi come coincidenti soltanto se coincidono sul medesimo ramo di curva (pag. 80).

Trattiamo in primo luogo il caso di una corrispondenza $(1, \alpha')$ fra C, C'. Sia su C una g_n^1; G un suo gruppo generico; J il suo gruppo jacobiano (n. 33); K un gruppo canonico (effettivo o virtuale) di C; D (o rispettivamente D') il gruppo di diramazione (o rispettivamente il gruppo dei punti multipli) su C (o rispettivamente C'). Nel gruppo D' ogni punto k-plo verrà contato come $k-1$ punti doppi, conformemente alla convenzione già fatta pel gruppo di diramazione. È ovvio che, nel caso in esame, il gruppo di diramazione esiste solo su C e il gruppo dei punti multipli solo su C'.

Alla g_n^1 di C risponde su C' una $g_{n\alpha'}^1$, ed un punto multiplo della $g_{n\alpha'}^1$ o proviene da un punto di egual molteplicità di g_n^1, oppure è un punto, pure di egual molteplicità, per la $\gamma_{\alpha'}^1$ di C' i cui gruppi corrispondono ai punti di C. Pertanto, denotati con G', J', K' i trasformati di G, J, K, e con K^* un gruppo canonico di C', risulta (n. 34):

$$J \equiv K + 2G, \quad J' + D' \equiv K^* + 2G'.$$

E inoltre, poichè a gruppi equivalenti di C rispondono gruppi equivalenti di C', viene:

$$J' \equiv K' + 2G',$$

la quale, confrontata colla seconda delle precedenti equivalenze, porge:

$$K^* \equiv K' + D'.$$

Si ottiene così il teorema:

Se fra due curve C, C' intercede una corrispondenza $(1, \alpha')$, un gruppo canonico di C' è equivalente alla somma del trasformato di un gruppo canonico di C e del gruppo dei punti multipli della corrispondenza (nel qual gruppo ogni punto k-plo si conti $k-1$ volte).

Cerchiamo ora in quale relazione stieno la trasformata della serie canonica di C' e la serie canonica di C. Mediante la corrispondenza $(\alpha', 1)$ fra C' e C, alla serie canonica di C' corrisponde su C una serie algebrica di ordine $2p'-2$, la quale è costituita da gruppi equivalenti (n. prec.). Per caratterizzare questa serie, possiamo veder come si trasforma un particolare gruppo canonico di C', per esempio il gruppo $K'+D'$, di cui sopra.

Poichè K' consta di $2p-2$ gruppi dell'involuzione $\gamma_{\alpha'}^1$, omologhi dei punti di un gruppo canonico K di C, nel passaggio da C' a C, il gruppo K' si muta nel gruppo K contato α' volte. Quanto al gruppo D', esso mutasi nel gruppo D, e, per la definizione data dei gruppi D, D', i punti singolari entro questi gruppi debbon contarsi lo stesso numero di volte.

Si può, concludendo, enunciare:

Se fra due curve C', C intercede una corrispondenza $(\alpha', 1)$, il trasformato di un gruppo canonico di C' è equivalente alla somma di un gruppo canonico di C, contato α' volte, e del gruppo di diramazione della corrispondenza (nel quale ogni punto, cui ne corrispondano k coincidenti, si conti $k-1$ volte).

Per passare al caso generale di una corrispondenza (α, α') fra C, C', conviene usare, dell'ente ∞^1 H, costituito dalle coppie di punti omologhi nella corrispondenza. Applicando i precedenti teoremi alle corrispondenze $(1, \alpha')$ fra C, H ed $(\alpha, 1)$ fra H, C', si perviene immediatamente al teorema generale:

Se fra due curve C, C' intercede una corrispondenza (α, α'), la somma del trasformato di un gruppo canonico di C e del gruppo dei punti multipli della corrispondenza, esistenti su C', è equivalente alla somma del multiplo secondo α di un gruppo canonico di C' e del gruppo dei punti di diramazione della corrispondenza, esistenti su C'.

Naturalmente i punti multipli ed i punti di diramazione della corrispondenza vanno contati nel modo sopra indicato.

Traduciamo numerativamente la precedente equivalenza. All'uopo occorre introdurre il numero η dei punti doppi della corrispondenza, esistenti su C', che eguaglia il numero dei punti di diramazione esistenti su C; ed il numero η' analogo, collo scambio di C, C'. Si ottiene allora:

$$2\alpha'(p-1) + \eta = 2\alpha(p'-1) + \eta'$$

ossia:

$$\eta - \eta' = 2\alpha(p'-1) - 2\alpha'(p-1),$$

che è la *formula di* ZEUTHEN.

Se si denota, in modo generico, con ν la molteplicità di uno dei punti multipli della corrispondenza esistenti su C', e similmente con ν' la molteplicità di uno dei punti multipli esistenti su C, viene:

$$\eta = \Sigma(\nu - 1), \quad \eta' = \Sigma(\nu' - 1),$$

i sommatori essendo estesi a tutti i punti multipli.

OSSERVAZIONE 1ª. — Una conseguenza immediata della formula di ZEUTHEN è la seguente osservazione di H. WEBER (¹):

Fra due curve dello stesso genere $p > 1$, una corrispondenza algebrica, che sia razionale (univoca) in un senso, lo è anche nel senso opposto.

Se, infatti, fra le curve C, C', di generi p, p', si ha una corrispondenza $(\alpha, 1)$, la involuzione di genere p', γ^1_α, che corrisponde su C ai punti di C', possiede:

$$\eta' = 2(p-1) - 2\alpha(p'-1)$$

punti doppi (o punti multipli equivalenti ad η' punti doppi); e poichè per sua natura $\eta' \geq 0$, così risulta:

$$p - 1 \geq \alpha(p' - 1),$$

e quindi, se $p > 1$ ed $\alpha > 1$, deve essere $p' < p$.

OSSERVAZIONE 2ª. — Quando sia $p = 1$, la formula che dà il numero dei punti doppi della γ^1_α esistente su C, ci mostra che deve essere $p' = 0$ oppure $p' = 1$. Nel primo caso la γ^1_α è una g^1_α (pag. 51). Nel secondo caso si ha su C un'involuzione ellittica ed è $\eta' = 0$. Viceversa, è chiaro che un'involuzione priva di punti doppi su C, è ellittica, perchè da $p = 1$, $\eta' = 0$, segue $p' = 1$.

Effettivamente su C esistono involuzioni ellittiche: p. es. quelle (prive di punti doppi, di ordine $\alpha = 2$) generate dalle 3 trasformazioni involutorie di 2ª specie, esistenti su C (pag. 171). Vedremo anzi, in seguito, che su C esistono involuzioni ellittiche di tutti gli ordini.

Concludendo:

Le involuzioni ∞^1 sopra una curva ellittica o sono serie lineari o sono involuzioni ellittiche: queste ultime son caratterizzate dal non avere punti doppi.

(¹) Journ. f. Math. **76**, 345 (1873).

68. **Riflessioni critiche sulla formula di ZEUTHEN. Estensione del suo campo di validità** (¹). — Il teorema generale del n. precedente e la formula di ZEUTHEN, che ne è l'espressione numerativa, sono stati dimostrati sotto le seguenti ipotesi implicite:

a) Che la data corrispondenza T, d'indici α, α', sia irriducibile, cioè che sia irriducibile l'ente ∞^1 H delle coppie di punti omologhi in T. Infatti i teoremi che abbiamo applicati alle corrispondenze fra C, H e fra H, C', di cui la T è prodotto, richiedono appunto la irriducibilità di H.

b) Che un elemento doppio di T situato su C' (o su C) dia luogo ad un *effettivo* elemento doppio della corrispondenza $(1, \alpha')$ [o rispettivamente $(1, \alpha)$] fra C (o risp. C') ed H. Un elemento doppio, vogliam dire, nel senso della geometria sull'ente, tale cioè che la coincidenza degli elementi che vanno a cadere in esso, avvenga sopra un ramo di H; e non sia invece una coincidenza accidentale di due elementi venuti e coincidere su due rami distinti, che abbian la stessa origine, sul particolar modello proiettivo, considerato per H.

Ed invero, il teorema del gruppo jacobiano, che abbiamo applicato, essendo una proprietà di geometria sull'ente, richiede appunto che sia soddisfatta la *b*).

c) Che i punti multipli della corrispondenza, su ciascuna delle due curve, sieno nello stesso numero degli omologhi punti di diramazione.

Per veder chiaramente quali modificazioni occorre apportare nella valutazione della molteplicità dei punti multipli o di diramazione della corrispondenza, al fine di render valida la formula di ZEUTHEN, anche quando non sono soddisfatte le suddette ipotesi, è opportuno riferirsi alla superficie F, *priva di punti multipli*, che rappresenta *senza eccezioni* le coppie di punti delle C, C' (n. 61, Oss. 1ª).

L'ipotesi *a*) si traduce in ciò: che la curva T, imagine su F della corrispondenza medesima, è irriducibile.

Vediamo come si traduce l'ipotesi *b*). Le due involuzioni che, sull'ente H, rispondono ai punti di C, C', hanno per imagini su T le involuzioni $\gamma^1_{\alpha'}$, γ^1_α staccate dai fasci $\{K_x\}$, $\{L_y\}$. La corrispondenza fra C, C' dà luogo alla corrispondenza (α, α') fra le coppie di curve K_x, L_y, che si tagliano

(¹) Ved. la Nota dell'Autore in Lincei Rend. 1_6, 562 (1925).

in un medesimo punto di T. Affinchè alla K_x, che passa per un punto P di T, rispòndano α' curve L_y, di cui due (almeno) coincidenti nella L_y uscente da P, occorre e basta o che quella K_x tocchi T in P, ovvero che il punto P sia (almeno) doppio per T. Nel primo caso l'elemento doppio L_y uscente da P, ed appartenente all'ente $\{L_y\}$, birazionalmente equivalente a C', dà luogo ad un effettivo elemento doppio dell'involuzione $\gamma^1_{\alpha'}$; nel secondo caso, se P è origine di più rami di T, la coincidenza, per tale involuzione, è soltanto, almeno in parte, apparente.

Dunque l'ipotesi *b*) si traduce in ciò: che la curva T non possiede punti origini di più di un ramo.

Se P è un punto multiplo di T (origine di uno o più rami), accade, evidentemente, che la K_x passante per P è un elemento doppio (almeno) per la corrispondenza (α, α') fra gli enti $\{K_x\}$, $\{L_y\}$. Onde in questo caso P rappresenta una coppia (x, y) di punti di C, C' *ognuno dei quali è insieme, sulla rispettiva curva, punto doppio e di diramazione*. La coppia (x, y) può altresì definirsi come una *coppia di punti doppi (o di diramazione) omologhi nella corrispondenza*.

Viceversa, quando P rappresenti una coppia siffatta, le curve K_x, L_y uscenti da P, hanno ciascuna due intersezioni (almeno) con T, riunite in P; e poichè le curve *unisecantisi* K_x, L_y, non posson mai toccarsi, ne consegue che P è (almeno) doppio per T [1].

Raccogliamo intanto questa conclusione:

La curva T, imagine della corrispondenza fra C, C', possiede punti multipli, allora e solo allora che esistano coppie di punti di diramazione omologhi [2].

Distinguendo ora il caso in cui il punto multiplo P è origine di un sol ramo superlineare di T, da quello in cui è origine di due rami (almeno), riconosciamo subito che, nel

[1] Per queste argomentazioni è essenziale che P sia *semplice* per la superficie F (n. 61, Oss. 1ª). Se F avesse in P un punto doppio, potrebbe ben darsi che una curva T di F possedesse ivi un punto doppio, senza che tale proprietà fosse invariante per le trasformazioni birazionali di C, C', cioè di F. Si pensi ad es. alla superficie F, priva di punti multipli, in un S_r, e la si proietti in un iperpiano, da un punto O di una corda di T. Si avranno sull'iperpiano una superficie F' ed una curva T' con un punto doppio comune, che non ha carattere invariante.

[2] Cfr. De Franchis, Lincei Rend. 12_5, 306 (1903).

primo caso, la molteplicità di ciascuno dei punti della coppia (x, y) rappresentata da P, come punti doppi e di diramazione, si valuta secondo la regola esposta nel n.° prec.

Nel secondo caso invece, P non porta generalmente alcun contributo ai numeri indicati con η, η' (n. prec.), in quanto questi numeri denotino quanti punti doppi effettivi posseggono le involuzioni $\gamma^1_{\alpha'}$, γ^1_{α}. Ciò accade ogni volta che P sia origine di due (o più) rami *lineari*. Ma, in tal caso, se si vuole che η, η' denotino i numeri dei punti doppi esistenti su C', C, occorrerà contare il contributo relativo a P; e contarlo lo stesso numero di volte in η ed in η'.

Tutto questo diventa più chiaro e significativo, se si suppone che la corrispondenza T appartenga ad un sistema continuo $\{T\}$, la cui corrispondenza generica sia rappresentata su F da una curva irriducibile $\overline{T}$, priva di punti multipli.

Siano $\overline{\pi}$ il genere di $\overline{T}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\eta}'$ i numeri dei contatti di $\overline{T}$ colle K_x, L_y, che toccano $\overline{T}$ (o meglio le somme degli ordini di quei contatti). Allora (n. prec.):

$$\overline{\eta} + 2\alpha'(p-1) = 2\overline{\pi} - 2, \quad \overline{\eta}' + 2\alpha(p'-1) = 2\overline{\pi} - 2.$$

Quando $\overline{T}$ tende alla curva T, di genere π, col punto doppio P, il genere di $\overline{T}$ si abbassa generalmente di un'unità (e precisamente di una sola unità, se P è origine di due rami lineari). Lo si riconosce subito con una proiezione generica di T, $\overline{T}$ sopra un piano, tenuto conto che il punto doppio P', che la curva T', proiezione di T, possiede in corrispondenza a P, non proviene da un punto doppio apparente di T, onde esso non è limite di alcuno dei punti doppi della curva $\overline{T}'$ proiezione di $\overline{T}$ [1]. Si ha dunque, in generale

$$\pi = \overline{\pi} - 1.$$

Considerando i numeri η, η' dei punti doppi delle $\gamma^1_{\alpha'}$, γ^1_{α} esistenti su T, mercè le precedenti relazioni e le analoghe:

$$\eta + 2\alpha'(p-1) = 2\pi - 2, \quad \eta' + 2\alpha(p'-1) = 2\pi - 2,$$

[1] Più precisamente: Se F sta in S_r e si proietta sopra un piano, dallo spazio Ω, ad $r-3$ dimensioni, lo spazio proiettante ΩP non può esser limite di un S_{r-2} uscente da Ω e bisecante di $\overline{T}$, perchè se no ΩP sarebbe altresì limite di uno spazio bisecante di F, ed il punto P non sarebbe semplice per la superficie.

risulterà pertanto:

$$\eta = \bar{\eta} - 2, \quad \eta' = \bar{\eta}' - 2,$$

e quindi:

$$\eta - \eta' = \bar{\eta} - \bar{\eta}' = 2\alpha'(p-1) - 2\alpha(p'-1).$$

Se vuolsi che i numeri che compaiono nella formula di ZEUTHEN si conservino immutati, quando $\bar{T}$ va in T, occorrerà dunque contar due volte, nel rispettivo gruppo di diramazione, ciascuno dei punti costituenti la coppia dei punti di diramazione omologhi.

A tale convenzione ci atterremo anche se T non è suscettibile di variare in un sistema continuo, ed enuncieremo pertanto:

Quando nella corrispondenza T, fra C, C', havvi una coppia di punti di diramazione omologhi, essi contan generalmente due volte nei rispettivi gruppi di diramazione (e perciò anche nei rispettivi gruppi di punti doppi).

La conclusione si estende. Suppongasi che il punto P produca sul genere di T l'abbassamento a [2] e sia μ la molteplicità d'intersezione in P della K_x, uscente da P, con uno generico dei rami di T, che hanno l'origine in P. Allora *il punto x di C conta $2a + \Sigma(\mu - 1)$ volte fra i punti di diramazione esistenti su C*, ove il sommatorio è esteso a tutti i rami di T uscenti da P.

Esaminiamo brevemente l'ipotesi *a*) della riducibilità di T. Supponiamo ad es. che T si spezzi nelle corrispondenze irriducibili T_1, T_2 e sia P un punto comune alle curve T_1, T_2. Se T appartiene ad un sistema continuo $\{T\}$, la cui curva generica $\bar{T}$ sia irriducibile e priva di punti multipli, si conclude come nel caso in cui la curva limite acquistava un punto multiplo, senza spezzarsi. È cioè, indicato con a l'abbassamento prodotto da P sul genere di T, e con μ la molteplicità d'intersezione in P della K_x, uscente da P, con uno generico dei rami di T, aventi l'origine in P, *il punto x di C assorbe $2a + \Sigma(\mu - 1)$ punti di diramazione della corrispondenza variabile $\bar{T}$, allorchè questa tende a T.*

(2) Si vuol dire l'abbassamento prodotto sul genere di una curva piana, che acquisti un *nuovo* punto multiplo della *composizione* di P (nel senso che verrà precisato nel capitolo concernente la composizione della singolarità). Si vegga anche il n. 85.

Con tale regola si valuterà la molteplicità del punto di diramazione x, anche quando T sia una corrispondenza isolata.

Il caso generale è che le curve T_1, T_2 passino per P semplicemente, senza toccarsi, e che le K_x, L_y uscenti da P non tocchino, neppur esse, le T_1, T_2. Allora $a = 1$ e $\mu = 1$, onde si può enunciare:

Quando la corrispondenza T, fra C, C', è riducibile, ciascuno dei punti delle due curve, costituenti le coppie comuni alle corrispondenze in cui T si scinde, conta generalmente due volte nel rispettivo gruppo di diramazione (o nel gruppo dei punti doppi).

Esaminiamo infine il caso in cui non è soddisfatta l'ipotesi *c*). Riandando al procedimento dimostrativo della formula di ZEUTHEN, apparisce chiaro che η, η', designano i numeri dei gruppi Y od X, omologhi rispettivamente di un punto x di C o di un punto y di C', dotati ciascuno di un punto doppio. Generalmente questi numeri s'identificano coi numeri dei punti doppi esistenti su C', C, perchè un punto che sia doppio per un Y o per un X, non lo è per altri gruppi analoghi; come un gruppo Y od X, che contenga un punto doppio, non ne contiene generalmente altri. Ma se, per converso, un punto di C' è doppio per μ gruppi Y, esso dovrà contarsi μ volte, nel formare η; come, se un gruppo Y contiene ν punti doppi, esso dovrà contarsi ν volte fra i gruppi Y dotati di un punto doppio.

Naturalmente un medesimo punto doppio può presentare le eventualità corrispondenti ai casi in cui non son soddisfatte le ipotesi *a*), *b*), come quelle ora considerate. Allora la molteplicità di quel punto, nel gruppo dei punti doppi, risulterà dalla simultanea applicazione delle regole esposte.

Con queste avvertenze, il numero dei punti doppi, contati ciascuno colla debita molteplicità, eguaglia il numero dei punti di diramazione, e si può procedere come se l'ipotesi *c*) fosse soddisfatta.

Un caso particolarmente notevole, in cui occorre applicare la regola ora esposta, è quello nel quale una delle corrispondenze T, T^{-1}, od entrambe, sono *composte con involuzioni*. Precisiamo questo concetto.

Ai punti x di C rispondon su C', mediante T, gruppi Y di α' punti, formanti una serie algebrica ∞^1, Σ'. Se un gruppo generico Y proviene da un solo x, l'indice di Σ' (numero degli Y per un generico y di C') è $\alpha_0 = \alpha$. Ma può darsi che un generico Y provenga da $\mu > 1$ punti x, i quali in tal caso, al variare di Y, descrivon su C un'involuzione γ^1_μ. Ogni Y passante per un dato punto y di C', dà luogo ad un gruppo di γ^1_μ ed il gruppo degli α punti x, corrispondenti a quel punto y, vien così costituito da α_0 gruppi dell'involuzione. Perciò $\alpha_0 = \alpha : \mu$.

La serie dei gruppi X di α punti, corrispondenti su C, mediante T^{-1}, ai punti di C', è composta con γ^1_μ, nel senso che tutti i gruppi X passanti per un generico x di C, passano in conseguenza pei $\mu - 1$ coniugati di x nell'involuzione γ^1_μ. *La corrispondenza T^{-1} dicesi perciò composta coll'involuzione γ^1_μ.*

Si posson costruire agevolmente esempi di corrispondenze in cui è composta l'operazione diretta o la inversa o entrambe. Ed ecco come.

Sia C una curva contenente una γ^1_μ, rappresentata birazionalmente dai punti di una curva Γ, e C' sia un'altra curva algebrica. Posta fra i punti di Γ, C' una corrispondenza algebrica (α_0, α), nasce in conseguenza una corrispondenza (α, α') — ove $\alpha = \alpha_0\mu$ — fra C, C', e questa corrispondenza è composta su C coll'involuzione γ^1_μ. Similmente può costruirsi fra C, C' una corrispondenza che sia composta soltanto sulla C'.

Se poi C è una curva contenente un'involuzione γ^1_μ e C' una curva contenente un'involuzione $\gamma^1_{\mu'}$, e Γ, Γ' son due curve imagini di quelle involuzioni, una corrispondenza (α_0, α'_0) posta fra Γ, Γ', dà luogo ad una corrispondenza (α, α') — ove $\alpha = \alpha_0\mu$, $\alpha' = \alpha'_0\mu'$ — fra C, C', composta, su C, colla γ^1_μ, è su C' colla $\gamma^1_{\mu'}$.

Suppongasi dunque che la nostra corrispondenza T (α, α') fra C, C', sia composta su C con un'involuzione γ^1_μ di ordine $\mu \geq 1$ (sicchè T sarà *semplice* su C, se $\mu = 1$), e su C' con un'involuzione $\gamma^1_{\mu'}$ d'ordine $\mu' \geq 1$; e sieno δ, δ' i numeri dei punti doppi della corrispondenza, esistenti rispettivamente su C', C. Allora, in forza della regola ultimamente esposta, sarà $\eta = \mu\delta$, $\eta' = \mu'\delta'$; e ciò perchè ogni punto doppio y, esistente su C', è doppio per μ gruppi Y, i quali coincidono nell'unico gruppo associato ai punti di C appartenenti al gruppo $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ di γ^1_μ, individuato da un punto di diramazione omologo di y. Ciascuno dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ risulta di diramazione.

La cosa si vede chiaramente riferendosi all'ente ∞^1 H: nell'involuzione d'ordine α', che corrisponde su H ai punti di C,

risulta infatti doppia ognuna delle coppie $(x_1, y), \ldots, (x_\mu, y)$. Concludendo:

Quando la corrispondenza T fra C, C' sia composta, su C, con un'involuzione d'ordine μ (≥ 1) e, su C', con un'involuzione d'ordine μ' (≥ 1), ove si voglia che δ, δ' denotino i numeri dei punti doppi esistenti su C', C, la formula di Zeuthen *va modificata scrivendo:*

$$\mu\delta - \mu'\delta' = 2\alpha(p' - 1) - 2\alpha'(p - 1),$$

I numeri dei punti di diramazione esistenti su C, C' sono invece $\eta = \mu\delta$, $\eta' = \mu'\delta'$.

69. Corrispondenze algebriche sopra una curva. Prodotto e somma di due corrispondenze. — Consideriamo ora in modo particolare le corrispondenze fra due curve sovrapposte, cioè fra i punti di una medesima curva sostegno C, a ciascun dei quali si applica la corrispondenza T o la sua inversa T^{-1}.

Indicheremo in modo generico con a un punto di C e con Y, X i gruppi degli omologhi di a rispettivamente nella T o nella sua inversa T^{-1}.

Vicino al ben noto concetto di *prodotto* ST di due corrispondenze S, T, il quale non è che un caso speciale del concetto di prodotto di due operazioni qualunque, applicate ad insiemi di elementi, ed associa pertanto ad un a i punti di C cui si perviene applicando successivamente prima la S eppoi la T, porremo il concetto di *somma* di due corrispondenze.

Per somma $S + T$ delle S, T, intendiamo la corrispondenza ottenuta associando al punto variabile a l'insieme dei punti che gli corrispondono nelle S, T.

Tanto il prodotto, quanto la somma di due corrispondenze algebriche, sono ancora corrispondenze algebriche.

Pel prodotto la cosa è pressochè evidente, giacchè le operazioni che conducono dal generico punto di C ai suoi omologhi nelle corrispondenze S, T, sono algebriche, e quindi il loro insieme è pure un'operazione algebrica (Noz. introd. I). Quanto alla somma, per giungere all'analoga conclusione, basta pensare alla superficie algebrica F rappresentante le coppie di punti delle curve, che s'intendono sovrapposte nella C (n. 61): le corrispondenze S, T son rappresentate da due curve algebriche tracciate su F, e la corrispondenza $S + T$

è rappresentata dalla curva, pure algebrica, costituita dall'insieme delle due precedenti.

La definizioni di somma e di prodotto si estendon subito a quante si vogliano corrispondenze. In particolare la somma di k corrispondenze identiche a T, si rappresenta col simbolo kT, e si chiama il *multiplo secondo* k della corrispondenza T.

La somma di due o più corrispondenze è commutativa; mentre il prodotto generalmente non lo è. Tanto prodotto che somma godon però della proprietà associativa.

Sono evidenti le relazioni:

$$(8) \qquad (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}, \quad (S+T)^{-1} = S^{-1} + T^{-1}.$$

Ad esse devesi aggiungere la relazione:

$$(9) \qquad (kT)^{-1} = kT^{-1}.$$

Questa può considerarsi come una conseguenza immediata della seconda delle (8), allorchè T appartenga ad un sistema continuo di corrispondenze, per guisa da poter riguardare kT come limite di k corrispondenze, che vengano a coincidere in una medesima. La cosa apparisce altresì evidente, quando si rappresentino le corrispondenze fra i punti di C colle curve tracciate sulla superficie F, poc'anzi considerata, giacchè la inversa di una data corrispondenza, rappresentata da una curva A, vien rappresentata dalla curva B, omologa di A nella trasformazione involutoria esistente su F (n. 61, Oss. 2ª); e quindi, se A si conta k volte, anche B deve contarsi lo stesso numero di volte.

D'altronde, il teorema del n. 64 fornisce una dimostrazione diretta ed immediata della (9).

Osservazione 1ª. — Il prodotto di due corrispondenze irriducibili è generalmente irriducibile; la somma invece è sempre riducibile.

Osservazione 2ª. — Evidentemente i concetti di somma e di prodotto, e le proprietà relative, valgono anche nel caso di due curve distinte.

70. Definizione generale delle corrispondenze a valenza, anche negativa. — Nel n. 62 abbiamo veduto che le corrispondenze fra i punti di una curva C, le quali sieno rappresentabili con una sola equazione, godono di questa proprietà caratteristica:

Detta T una siffatta corrispondenza, esiste un intero $\gamma \geq 0$ (valenza della corrispondenza), tale che, indicato con Y il gruppo degli omologhi del punto generico a di C, nella T, il gruppo $Y + \gamma a$ varia in una serie lineare.

Ora il concetto di valenza può estendersi, considerando anche corrispondenze a valenza negativa. Se una corrispondenza T gode della proprietà che il gruppo, effettivo o *virtuale* (pag. 109) $Y + \gamma a$, ove γ sia un intero positivo, negativo o nullo, varia in una serie lineare, effettiva o virtuale, si dirà che T ha la *valenza* γ. Naturalmente, se $\gamma < 0$, una siffatta corrispondenza non sarà rappresentabile con una sola equazione.

Considerata un'altra posizione a', del punto a, e indicato con Y' il gruppo corrispondente, la definizione viene espressa dall'equivalenza:

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a'.$$

Se la curva C non è razionale, la corrispondenza T non può avere una seconda valenza, diversa da γ.

Se, infatti, T possedesse anche la valenza $\gamma' \neq \gamma$, verrebbe:

$$Y + \gamma' a \equiv Y' + \gamma' a',$$

che, confrontata colla precedente, porge:

$$(\gamma - \gamma')a \equiv (\gamma - \gamma')a',$$

ossia:

$$ka \equiv ka',$$

con k intero positivo (> 0) ed a, a' punti qualunque di C.

La serie lineare g_k^r ($k \geq r$), che contiene tutti i gruppi ka, non è evidentemente composta; epperò essa può imaginarsi segata sopra un modello proiettivo Γ, di C, appartenente allo S_r, dagl'iperpiani del suo spazio. Per ogni punto di Γ vi è un iperpiano che ha con Γ, in quel punto, molteplicità d'intersezione $k \geq r$. Se il punto è generico, quell'iperpiano non può dunque che coincidere coll'iperpiano osculatore, e dovrà perciò risultare $k = r$ (pag. 90). Ma allora Γ è una curva razionale normale (pag. 112).

Effettivamente, se la curva è razionale, ogni corrispondenza è a valenza nulla, e, se vuolsi, a valenza arbitraria. Ma la considerazione di una valenza non nulla è in tal caso irrilevante.

71. **Operazioni sulle corrispondenze a valenza.** — Dimostriamo che:

La somma di due corrispondenze T_1, T_2 di valenze γ_1, γ_2, ha la valenza $\gamma_1+\gamma_2$.

Sieno Y_1, Y_1' i gruppi degli omologhi di a, a' in T_1, ed Y_2, Y'_2 i gruppi degli omologhi degli stessi punti in T_2. Risulta allora:

$$Y_1+\gamma_1 a\equiv Y_1'+\gamma_1 a', \quad Y_2+\gamma_2 a\equiv Y_2'+\gamma_2 a',$$

e quindi, per addizione:

$$(Y_1+Y_2)+(\gamma_1+\gamma_2)a\equiv(Y_1'+Y_2')+(\gamma_1+\gamma_2)a',$$

che dimostra il teorema.

Il prodotto di due corrispondenze di valenze γ_1, γ_2, ha la valenza $-\gamma_1\gamma_2$.

Conserviamo le precedenti notazioni e indichiamo inoltre con $y_1, y_2,\ldots, y_\beta$ i punti del gruppo Y_1, con $y_1',\ldots, y_\beta'$ quelli di Y_1'; e infine con $Y_{2,i}$, $Y'_{2,i}$ i gruppi omologhi di y_i, y_i' nella T_2. Sussistono allora le:

$$Y_1+\gamma_1 a\equiv Y_1'+\gamma_1 a', \quad Y_{2,i}+\gamma_2 y_i\equiv Y'_{2,i}+\gamma_2 y_i', \quad (i=1,\ldots,\beta),$$

dalle quali seguono:

$$\gamma_2 Y_1+\gamma_1\gamma_2 a\equiv\gamma_2 Y_1'+\gamma_1\gamma_2 a', \quad \sum_{i=1}^{\beta} Y_{2,i}+\gamma_2 Y_1\equiv\sum_{i=1}^{\beta} Y'_{2,i}+\gamma_2 Y_1'.$$

Sottraendo a membro a membro le ultime due equivalenze, viene:

$$\sum_{i=1}^{\beta} Y_{2,i}-\gamma_1\gamma_2 a\equiv\sum_{i=1}^{\beta} Y'_{2,i}-\gamma_1\gamma_2 a',$$

che dimostra il teorema enunciato.

Osservazione. — L'ultimo teorema ci pone in grado di affermare che corrispondenze a valenza negativa (e perciò non rappresentabili con una sola equazione), esistono sopra ogni curva; bastando, per ottenerne, fare il prodotto di due corrispondenze a valenza positiva.

72. **Determinazione del gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza zero.** — Sia T una corrispondenza a valenza zero, sulla curva C, la quale, senza restrizione, rispetto al carattere invariantivo della questione, possiamo supporre piana e di equazione cartesiana:

$$f(x_1, x_2)=0.$$

La T è rappresentata (n. 62) da un'equazione del tipo:

$$\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)=0, \tag{10}$$

e un punto x dato genericamente su C, determina, mediante la (10), una curva D', che non passa per quel punto, e sega su C, fuori di un gruppo Q d'intersezioni fisse, il gruppo dei β punti omologhi di x. Similmente, dato su C genericamente y, la (10) definisce una curva D, che non passa per y, e che stacca su C, fuori di un gruppo R d'intersezioni fisse, il gruppo degli α punti omologhi di y nella corrispondenza T^{-1}. Ciò perchè l'inversa di una corrispondenza a valenza zero ha la stessa valenza (n. 63).

Per avere i punti uniti della T occorre porre nella (10) $x_1=y_1$, $x_2=y_2$. Si ottiene così l'equazione:

$$\varphi(x_1, x_2; x_1, x_2)=0, \tag{11}$$

che è di grado $m+m'$ nelle x_1, x_2, se la (10) era di grado m nelle x_1, x_2 e di grado m' nelle y_1, y_2 [1].

Come s'è già osservato (n. 62), le curve D' appartengono ad un medesimo sistema lineare, che ha su C il gruppo base Q: per ogni punto fisso O delle D' si deve considerare ognuno dei rami di C, di cui quel punto è origine, e contare O in Q, come origine del ramo, tante volte quant'è la molteplicità d'intersezione di questo colla generica D'. Similmente si definisce il gruppo base R del sistema lineare di curve d'ordine m, che contiene le D.

Consideriamo il sistema lineare Σ, di curve d'ordine $m+m'$, definito dal gruppo base $Q+R$. Vogliamo con ciò dire che per ogni punto O, il quale, come origine di un ramo δ di C, conti rispettivamente μ, ν volte entro i gruppi Q, R, la generica curva

[1] Supposto di aver preventivamente assoggettato la curva C ad una trasformazione omografica generica, si può ritenere che nè alcuno dei punti dei gruppi Q, R, nè alcuno dei punti uniti di T, cada all'infinito. La (11) sarà allora effettivamente di grado $m+m'$, e non minore.

di Σ deve avere in O, con δ, molteplicità d'intersezione $\mu+\nu$. Al sistema Σ appartiene evidentemente ogni curva composta con una D e con una D', ed esso si chiama perciò la *somma* dei due sistemi lineari, contenenti rispettivamente le D e le D'.

Al sistema Σ appartiene anche la curva (11). Consideriamo infatti le due serie di potenze d'un parametro, che costituiscono la rappresentazione di δ, e chiamiamo il parametro con t oppure con τ, secondo che δ si riguarda come luogo di punti y o come luogo di punti x [1]. Dire che la generica D' ha con δ in O molteplicità d'intersezione μ, equivale a dire che, sostituite nella (10), al posto di y_1, y_2, le due serie di potenze di t, lungo la curva irriducibile C, si annullano i polinomi in x_1, x_2, che costituiscono i coefficienti delle potenze di t inferiori a t^μ.

L'equazione:

$$(12)\quad f(x_1, x_2)[g_0(x_1, x_2)+g_1(x_1, x_2)t+\dots+g_{\mu-1}(x_1, x_2)t^{\mu-1}]+ \\ +\xi(x_1, x_2)t^\mu+\eta(x_1, x_2)t^{\mu+1}+\dots=0,$$

a cui si riduce la (10), al variare di t, rappresenta la curva D corrispondente al punto y mobile su δ.

Poichè questa D ha con δ in O molteplicità d'intersezione ν, se nella (12) al posto delle x_1, x_2 si sostituiscono le serie di potenze del parametro τ, la prima parte del primo membro, contenendo a fattore $f(x_1, x_2)$, svanisce identicamente, e nella parte restante dovranno sparire i termini che contengono potenze di τ inferiori a ν. Avremo pertanto una serie doppia del tipo:

$$(13)\quad t^\mu(a\tau^\nu+b\tau^{\nu+1}+\dots)+t^{\mu+1}(c\tau^\nu+d\tau^{\nu+1}+\dots)+\dots=0,$$

la quale non è altro che il risultato della sostituzione simultanea, nella (10), delle serie di potenze di τ, al posto di x_1, x_2, e delle serie di potenze di t, al posto di y_1, y_2 [2].

Se infine nella (13) si pone $t=\tau$, si perviene alla serie medesima cui si perverrebbe dalla (11), ponendovi le serie di potenze di τ, al posto di x_1, x_2.

[1] Si sottintende che l'origine O del ramo corrisponde a $t=0$ o $\tau=0$ ed i punti di δ ai punti interni ai circoli di convergenza (eguali fra loro) delle serie in t, τ.

[2] Il campo di convergenza di tale serie doppia è costituito dalle coppie di punti interni ai circoli di convergenza delle serie in t, τ.

Con tale sostituzione, si ottiene dunque dalla (11) la serie:

$$(14)\quad \tau^\mu(a\tau^\nu+b\tau^{\nu+1}+\dots)+\tau^{\mu+1}(c\tau^\nu+d\tau^{\nu+1}+\dots)+\dots=0,$$

e questa prova che la (11) ha in O con δ molteplicità d'intersezione $\mu+\nu$, se $a\neq0$, molteplicità maggiore, se $a=0$. La conclusione è che la (11) appartiene a Σ.

Vediamo qual'è il significato geometrico dell'annullarsi della costante a. Ragioneremo non escludendo che uno od ambedue i numeri μ, ν possano esser nulli. Quando $\mu=\nu=0$, il punto O, che si considera, è distinto dai punti base del sistema Σ.

Perchè il punto O sia unito, *come origine del ramo* δ, occorre e basta che la molteplicità d'intersezione con δ, della curva D corrispondente al punto y mobile su δ, quando y va in O, diventi maggiore di ν, p. es. eguale a $\nu+\nu'$ ($\nu'\geq1$). È invero, allora e solo allora, dei punti x omologhi di quel punto y, ce ne sono ν' che si muovono su δ, tendendo ad O insieme ad y. Onde, conformemente al n. 23, il punto O riesce in tal caso unito.

Per trovare ν' basta dividere i due membri della (13) per t^μ e passare al limite per $t=0$. Si vede così che $\nu'\geq1$ allora e solo allora che $a=0$: ν' viene inoltre eguale al numero dei coefficienti successivi a, b,... della prima serie in τ, che sono nulli.

Noi converremo di contare, nel gruppo dei punti uniti di T, un punto O di C, che sia unito per la corrispondenza, tante volte quant'è l'eccesso su $\mu+\nu$ della molteplicità di intersezione della curva (11), col ramo di cui quel punto si considera origine; e ciò per ogni ramo di cui il punto stesso sia origine. In altri termini la molteplicità del punto unito considerato, in quanto origine del ramo δ, è fornita dal minimo esponente a cui comparisce τ nello sviluppo:

$$(a+b\tau+\dots)+\tau(c+d\tau+\dots)+\dots=0,$$

che si ottiene da (14) dividendone i due membri per $\tau^{\mu+\nu}$. Il punto unito conterà semplicemente se $a=0$ e $b+c\neq0$; conterà doppiamente, se $a=0$, $b+c=0$ e non è nullo il coefficiente di τ^2; ecc. ecc. [1].

[1] Se ne deduce già p. es. che, se la corrispondenza T è simmetrica, e quindi $b=c$, il punto unito conta due volte (almeno) allora che $b=c=0$, cioè quando $\nu'\geq2$. Pertanto condizione necessaria e sufficiente perchè il punto unito sia semplice, è che $\nu'=1$.

Ci riserviamo di interpretare geometricamente, nel n. successivo, la molteplicità di un punto unito, così da svincolarla dalla particolare rappresentazione analitica, e da darle un contenuto invariantivo rispetto alle trasformazioni birazionali. Qui possiamo già dire che, contando ogni punto unito nel modo sopra indicato, il gruppo U dei punti uniti di T viene ad essere staccato, fuori del gruppo base $Q+R$, da una curva (11) appartenente al sistema lineare somma di quelli che contengono le D e le D'; epperò, indicando con Y il gruppo staccato su C, fuori di Q, da una generica D', e con X il gruppo staccato su C, fuori di R, da una generica D, viene:

$$U \equiv X + Y, \tag{15}$$

che si esprime in parole così:

Il gruppo dei punti uniti di una corrispondenza a valenza zero, sopra una curva, equivale alla somma dei gruppi costituiti dagli omologhi di un punto della curva, nelle corrispondenze diretta ed inversa.

Osservazione 1ª. — Se u è il numero dei punti uniti di T ed α, β ne sono gl'indici, dall'equivalenza (15) segue:

$$u = \alpha + \beta. \tag{16}$$

Osservazione 2ª. — Quando la curva C riducasi ad una retta, ogni corrispondenza T, ad essa appartenente, è a valenza zero, e, dette x, y le coordinate di due punti corrispondenti, la T vien rappresentata da un'equazione della forma $\varphi(x, y) = 0$. Su tale equazione è immediatata la verifica del precedente teorema. La (16) esprime in questo caso il *principio di corrispondenza di* Chasles. Il trasporto diretto di questo principio da una retta ad una curva razionale qualunque, è altresì immediato, trattandosi di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali.

73. Invarianza della molteplicità di un punto unito d'una corrispondenza a valenza zero, di fronte alle trasformazioni birazionali della curva. — Nel n. prec. abbiamo definito la molteplicità d'un punto O di C, unito per la corrispondenza T (d'indici α, β e di valenza zero) come l'eccesso i, su $\mu+\nu$, della molteplicità d'intersezione in O del ramo δ colla curva (11).

Ripetiamo ancora una volta che si tratta soltanto della molteplicità di O *come origine di* δ: non si esclude cioè che O possa essere unito, anche come origine di qualche altro ramo.

La definizione precedente, è legata al particolare modello proiettivo della curva C. Non è a priori detto che, se ci riferisce ad un altro modello piano C', birazionalmente equivalente a C, e si considera l'equazione, analoga alla (11), della corrispondenza T', trasformata di T, le molteplicità che ne vengono definite pei punti uniti di T', i quali corrispondono birazionalmente ai punti uniti di T, sieno le medesime, per le coppie di punti uniti omologhi.

È quanto ci proponiamo di stabilire in questo numero. Conserviamo tutte le notazioni del n. prec., e indicate con

$$\theta(x_1, x_2) = 0, \quad \eta(y_1, y_2) = 0,$$

le equazioni rispettive di due curve generiche dei sistemi lineari cui appartengono le D e le D', poniamo:

$$\psi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \theta(x_1, x_2)\eta(y_1, y_2) \text{ (1)}.$$

Allora:

$$\psi(x_1, x_2; x_1, x_2) = \theta(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2) = 0,$$

sarà l'equazione di una curva di Σ, avente *esattamente*, nel punto base O di Σ, la molteplicità d'intersezione $\mu+\nu$ col ramo δ (e analogamente per tutti gli altri rami di C, che hanno le loro origini nei punti base di Σ).

Consideriamo l'equazione:

$$\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) + \lambda\psi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0, \tag{17}$$

ove λ è una costante generica. Dato genericamente x su C, la (17) rappresenta una curva d'ordine m', del sistema lineare che contiene le D', e tale curva non passa per x, perchè, se vi passasse per λ generico, vi passerebbe anche per $\lambda = 0$. Analoga conclusione vale per y generico su C. La (17) rappresenta dunque una corrispondenza S, di indici α, β e di valenza zero, la quale muovesi in un sistema continuo, al variare del parametro λ, riducendosi a T per $\lambda = 0$.

(1) L'equazione $\psi(x_1, x_2; y_1, y_2) = 0$ rappresenta una corrispondenza degenere, nella quale ad un generico x di C rispondono le β intersezioni fisse di C colla $\eta = 0$, fuori del gruppo Q, e ad un generico y le α intersezioni di C colla $\theta = 0$, fuori del gruppo R.

Pongasi nella (17) $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, così da ottenere l'equazione:

$$(18)\qquad \varphi(x_1, x_2; x_1, x_2)+\lambda\psi(x_1, x_2; x_1, x_2)=0,$$

determinatrice dei punti uniti di S. Al variare di λ, la (18) rappresenta un fascio di curve, la cui curva generica ha con δ, in O, molteplicità d'intersezione esattamente eguale a $\mu+\nu$, perchè così accade per la particolare curva del fascio corrispondente a $\lambda=\infty$ (e analogamente per gli altri rami uscenti dai punti base). Fuori dei punti base di Σ, le intersezioni di C colla (18), per λ generico, son esattamente $\alpha+\beta$ *distinte tra loro* (pag. 55). Onde la S, per λ generico, ha $\alpha+\beta$ punti uniti distinti.

Facendo tendere λ a zero, pel significato stesso di molteplicità d'intersezione di una curva con un ramo (pag. 85), *i* punti uniti di S tenderanno ad O sul ramo δ.

Si conclude pertanto che:

Ogni corrispondenza a valenza zero T, d'indici α, β, sopra una curva C, appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze degli stessi indici, a valenza zero. La generica S, di queste corrispondenze, ha $\alpha+\beta$ punti uniti distinti, e, quando S tende a T, la molteplicità di un punto unito di T, come origine di un determinato ramo δ, vien definita dal numero dei punti uniti di S, che tendono ad O su δ.

Questo teorema contiene senz'altro la invarianza della molteplicità del punto unito O, di fronte alle trasformazioni birazionali della curva, perchè la definizione ch'esso consente di tale molteplicità, ha manifesto carattere invariante.

74. Regola di Zeuthen per valutare la molteplicità di un punto unito d'una corrispondenza a valenza zero. — Atteso il carattere invariante della molteplicità del punto unito O (si mantengono ancora le notazioni del n. 72), ci potremo, senza restrizione essenziale, riferire al caso in cui C non possiede che rami lineari [basta p. es. assumere un modello con soli nodi; (pag. 77)]. Potremo anche supporre l'origine delle coordinate in O e gli assi coordinati in direzione generica, posto che il cangiamento degli assi non muta la molteplicità del punto, il cui carattere intrinseco è ormai acquisito.

Così il ramo δ sarà rappresentato da sviluppi in serie del tipo:

$$(19)\qquad \begin{cases} x_1=h\tau+\dots & (h\neq 0) \\ x_2=k\tau+\dots & (k\neq 0)\end{cases}\qquad \begin{cases} y_1=ht+\dots \\ y_2=kt+\dots\end{cases}$$

secondo che si pensa come luogo di punti x o di punti y.

L'equazione (13), liberata dal fattore $t^\mu\tau^\nu$, diviene:

$$\Phi(t, \tau)=(a+b\tau+\dots)+t(c+d\tau+\dots)+\dots=0,$$

e rappresenta la corrispondenza indotta da T fra i punti di δ. Naturalmente, perchè ad un punto di δ, concepito come punto x o come punto y, corrisponda qualche altro punto di δ, da concepirsi rispettivamente come punto y o come punto x, occorre e basta che $a=0$, cioè che O sia punto unito come origine di δ.

Dire che O, come origine di δ, è punto unito i-plo, equivale a dire che l'equazione $\Phi(t, t)=0$ ha la radice i-pla $t=0$. Ora la $\Phi(0, \tau)=0$ ha una radice $\tau=0$ di molteplicità ν', eguale al numero dei punti x di δ omologhi di un y del ramo stesso. Per y prossimo ad O, cioè per t prossimo a zero, questi ν' punti x corrispondono (secondo un teorema già citato a pag. 86) ad altrettanti valori $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{\nu'}$ di τ, i quali sono distinti, verificano l'equazione $\Phi(t, \tau)=0$, e tendono a zero insieme a t.

In un campo costituito da coppie di punti interni a due circoli convenienti di centri $t=0$, $\tau=0$ (sui rispettivi piani complessi t, τ), all'equazione $\Phi(t, \tau)=0$ potrà sostituirsi, a meno di un fattore non nullo nel campo stesso, l'equazione [1]:

$$(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)\dots(\tau-\tau_{\nu'})=0,$$

e quindi alla $\Phi(t, t)=0$, l'equazione:

$$(t-\tau_1)(t-\tau_2)\dots(t-\tau_{\nu'})=0;$$

sicchè l'ordine i della $\Phi(t, t)$ rispetto a t, risulta eguale alla somma degli ordini, rispetto a t, delle differenze $t-\tau_1$, $t-\tau_2, \dots, t-\tau_{\nu'}$.

Ora dalle (19) segue che la differenza $t-\tau_i$ $(i=1, 2, \dots \nu')$ ha lo stesso ordine infinitesimale, rispetto a t, delle differenze $y_1-x_1^{(i)}$, $y_2-x_2^{(i)}$ tra le coordinate omonime del punto y e del punto $x^{(i)}$, corrispondenti ai valori t, τ_i dei parametri, e quindi anche lo stesso ordine di

$$\sqrt{(y_1-x_1^{(i)})^2+(y_2-x_2^{(i)})^2},$$

che misura la distanza [2] dei punti y ed $x^{(i)}$. Similmente, essendo y_1, y_2 dello stesso ordine di t, anche $\sqrt{y_1^2+y_2^2}$, che

[1] Cfr. Bianchi, loc. cit., § 74; Pincherle, loc. cit., pag. 213.

[2] La quale sarà generalmente un numero complesso. Se vuolsi, alle quantità complesse, che entrano in giuoco, posson sostituirsi i loro moduli, in quanto gli ordini d'infinitesimo non s'alterano.

misura la distanza da O ad y, ha l'ordine di t. Pertanto i risulta eguale alla somma degli ordini delle distanze

$$\sqrt{(y_1 - x_1^{(i)})^2 + (y_2 - x_2^{(i)})^2} \qquad (i = 1, \ldots, \nu'),$$

prendendo la distanza $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ come infinitesimo principale.

E si conclude colla *regola di* ZEUTHEN:

Per valutare la molteplicità di un punto unito O, di una corrispondenza a valenza zero, sopra una curva, convien riferirsi ad un modello proiettivo C privo di rami superlineari.

Allora O, come origine di un determinato ramo di C, conta, fra i punti uniti, tante volte, quant'è la somma degli ordini infinitesimali delle distanze fra un punto P del ramo ed i suoi omologhi, ivi variabili, presa la distanza OP come infinitesimo principale.

75. Estensione ad una corrispondenza qualunque. Corrispondenza complementare di una data. — I risultati dei nn. 73, 74 posson estendersi ad una corrispondenza T qualunque, d'indici α, β, fra i punti della curva C.

All'uopo conviene introdurre il concetto di *corrispondenza complementare* di una data T. Sulla curva C di genere p, si fissi un gruppo G_0 non speciale, di p punti, ed uno, Y_0, dei gruppi di β punti corrispondenti, nella T, ad un punto prefissato x_0, della curva. Il gruppo non speciale $Y_0 + G_0$ individua una serie completa $g^{\beta}_{\beta+p}$, e pertanto per un gruppo Y, corrispondente ad un generico punto x di C, passa un gruppo di questa serie, ed uno solo, perchè se no Y ammetterebbe come residui, rispetto a quella serie, gruppi speciali di p punti, mentre, quando x va in x_0, il residuo è non speciale.

Può ben accadere che per qualche altra posizione particolare x_0' di x, il gruppo omologo Y_0' ammetta residui speciali, ma in tal caso fra questi ne resta perfettamente definito uno, come posizione limite del residuo di Y per x tendente ad x_0'.

Si può anzi ottenere addirittura che *tutti* i gruppi residui degli Y, rispetto alla serie $g^{\beta}_{\beta+p}$, sieno non speciali. Infatti le serie non speciali complete, di ordine $\beta + p$, sono ∞^p (pag. 147), mentre le serie complete distinte, individuate da gruppi di $\beta + p$ punti, costituiti ciascuno da un gruppo Y e da un gruppo speciale di p punti, sono al più ∞^{p-1}, perchè i gruppi speciali di p punti sono ∞^{p-1} e uno generico di essi individua una g^1_p.

Così possiamo ritenere che ad *ogni* x di C, resti associato *un* gruppo G non speciale di p punti. Orbene, dico che, se T non è a valenza zero, nessuno dei punti di G è fisso, almeno se G_0 fu scelto genericamente rispetto a Y_0.

Invero, se, comunque si scelga il gruppo G_0, costituito dai punti $a_1, a_2, \ldots, a_p$ di C, sempre accade che il gruppo G abbia taluni punti eccezionali fissi, siccome, variando con continuità G_0, questi punti eccezionali non posson che muoversi con continuità, e d'altra parte G_0 si può far variare, a partire dalla posizione iniziale e ritornandovi, in modo che un punto eccezionale, p. es. a_1, vada a finire in uno qualunque dei rimanenti $a_2, \ldots, a_p$, deve concludersi che tutti i punti di G_0 sono eccezionali. Ossia che, variando x, cioè Y, il gruppo G resta fisso nella posizione G_0. Pertanto i gruppi Y sono residui del gruppo G_0 rispetto alla serie $|Y_0 + G_0|$, epperò son equivalenti fra loro, e T è a valenza zero.

La conclusione è che se T non è a valenza zero e ad ogni x si associa l'omologo gruppo G, si ottiene fra i punti di C una corrispondenza (non degenere) S, uno dei cui indici (il secondo) è p e l'altro è un intero α', che determineremo più tardi. La corrispondenza S, variabile con G_0 in un sistema continuo ∞^p di corrispondenze analoghe, chiamasi corrispondenza *complementare* di T.

Il sistema continuo in cui essa è variabile, è determinato dalle due condizioni seguenti:

1) Il secondo indice di una corrispondenza S di tal sistema, eguaglia il genere p di C.

2) La somma $T + S$ è a valenza zero.

Questo sistema di corrispondenze complementari è evidentemente *covariante* di T, rispetto alle trasformazioni birazionali della curva.

Un altro simile sistema complementare si ottiene prendendo eguale a p il primo indice delle corrispondenze da costruirsi.

La considerazione della corrispondenza S, permette un'agevole estensione dei risultati dei nn. 73, 74 ad una T, non a valenza zero.

Si tratta anzitutto di definire, in modo invariantivo, la molteplicità di un punto unito O di T, come origine di un ramo δ della C. Il punto O appartenga al gruppo Y_0, cioè x_0 sia il punto infinitamente vicino ad O sul ramo δ.

Scelto genericamente G_0, i punti di questo gruppo saranno distinti fra loro e da quelli di Y_0, onde i punti uniti della corrispondenza $T+S$, esistenti nel gruppo Y_0+G_0, saranno soltanto quelli della T, esistenti nel gruppo Y_0.

Ebbene, definiremo la molteplicità del punto O, in quanto origine di δ e come punto unito T, assumendola eguale a quella dello stesso punto, come punto unito di $T+S$.

La $T+S$ appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze analoghe, e la generica, R, di queste, ha tutti i punti uniti distinti (cioè in numero eguale alla somma degl'indici). Se, quando R tende a $T+S$, vi sono certi i punti uniti di R che tendono ad O sul ramo δ, il punto O è i-plo come punto unito di T.

In particolare, *si dirà che T ha i suoi punti uniti distinti fra loro*, se i numeri i così definiti, per ciascuno dei rami origini dei punti uniti di T, sono tutti eguali ad 1. Qualora T appartenga ad un sistema continuo di corrispondenze analoghe T', e la generica di queste abbia punti uniti distinti, ne segue subito che la molteplicità i di O per T, è il numero dei punti uniti della generica T', che tendono ad O sul ramo δ, allorchè T' tende a T.

La definizione data della molteplicità di un punto unito di T, ha manifesto carattere invariante, ed essa permette di trasportare senz'altro ad una corrispondenza qualunque, la regola di Zeuthen.

Ne segue inoltre, in base alla definizione medesima, che *il numero dei punti uniti d'una corrispondenza variabile con continuità si conserva costante (a meno che non divenga infinito).*

Osservazione. — Che la regola di Zeuthen si possa trasportare alle corrispondenze di qualsiasi specie, anzi che basti di averla stabilita sulla retta, per indurne la validità sopra una curva di genere qualunque e per qualsiasi corrispondenza ivi esistente, è intuitivo. E invero, la regola dipende soltanto dalle proprietà infinitesimali della curva e della corrispondenza nell'intorno del punto unito, sicchè s'intuisce che possa trasferirsi immutata da una retta ad una curva.

Ma l'analisi rigorosa di questa asserzione richiede le considerazioni svolte nei nn. precedenti o considerazioni equivalenti.

A qualche lettore potrebbe sembrare più espressivo il procedimento seguente, che è in sostanza quello originario di Zeuthen.

Si dimostri prima la regola per le corrispondenze sulla retta [1], eppoi si osservi che, se il punto unito O della corrispondenza T, data sulla curva C, di equazione cartesiana $f(x_1, x_2)=0$, è origine di un ramo lineare δ, si può supporre che questo ramo sia segato in un sol punto dalle parallele all'asse x_2, sicchè nasce una corrispondenza biunivoca fra i punti del ramo δ ed i punti dell'asse x_1, situati nell'intorno del punto O' dell'asse x_1, proiezione di O.

Questa corrispondenza trasforma la T (che, per l'ipotesi che O sia unito, agisce anche sui punti di δ), in una corrispondenza T' fra i punti dell'intorno di O' sull'asse x_1; e, poichè è manifesto che le distanze di una coppia di punti di x_1 e della omologa coppia su δ, sono infinitesime dello stesso ordine, così la regola può senz'altro trasportarsi dalla retta alla curva.

In tale ragionamento vi è però un ulteriore sottinteso, che lo Zeuthen non pone in luce. Si suppone cioè implicitamente che la molteplicità che vien così ad attribuirsi al punto O, sia proprio quella che è richiesta per la validità del principio di corrispondenza che si vuole stabilire (p. es. di quello del n. 72, Oss. 1ª, se la corrispondenza è a valenza zero). Il postulato accennato in principio dell'Osservazione, vien dunque trasferito a tale momento della deduzione, poichè è chiaro che questa è lecita soltanto se si ammette che la molteplicità del punto unito, non dipenda che dalle proprietà infinitesimali della curva e della corrispondenza nell'intorno di O.

In verità, per giustificare il postulato, occorre poter considerare la corrispondenza come limite di un'altra variabile con continuità, i cui punti uniti sieno tanti, fra loro distinti, quanti quelli indicati dal principio di corrispondenza, che si vuol dimostrare.

Ed allora si ricade sostanzialmente nel procedimento da noi seguito.

76. Esistenza di corrispondenze con valenza arbitraria (positiva o negativa) sopra una curva. — Sopra una curva C si ottiene subito una corrispondenza a valenza $\gamma=1$, p. es. considerando la corrispondenza $(n-1, n-1)$, che associa due punti appartenenti a un medesimo gruppo di una g_n^1. Una tal corrispondenza si dirà *elementare*.

[1] Ved. Bertini, *Iperspazi*, pag. 483.

La somma di γ (>0) corrispondenze elementari, è una corrispondenza a valenza γ, e il prodotto di una corrispondenza a valenza γ per una corrispondenza elementare, è a valenza $-\gamma$ (n. 71). Lo stesso può dirsi della complementare di una corrispondenza a valenza γ, perchè la somma di quella e di questa deve essere a valenza zero. La somma di due corrispondenze, una a valenza γ e l'altra a valenza $-\gamma$, dà una corrispondenza a valenza zero ([1]). Dunque:

Sopra una curva esistono corrispondenze a valenza arbitraria (positiva, negativa o nulla).

Possiamo ora dare un'altra dimostrazione del teorema, già stabilito al n. 63, che cioè:

La inversa di una corrispondenza a valenza γ ha la stessa valenza.

Qui il teorema viene esteso anche alle corrispondenze a valenza negativa.

Anzitutto è chiaro che la inversa di una corrispondenza S, somma di $k(>0)$ corrispondenze elementari, ha la valenza k, e che la inversa del prodotto di S per una corrispondenza elementare ha la valenza $-k$ (cfr. le (8) del n. 69).

Ciò posto, sia T una corrispondenza a valenza γ (positiva o negativa); X, X' sieno i gruppi di punti corrispondenti ai punti a, a' di C, nella corrispondenza T^{-1}. Sia infine T_1, una corrispondenza a valenza $-\gamma$, composta, nel modo accennato, mediante corrispondenze elementari, ed X_1, X_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1^{-1}.

Poichè la somma $T+T_1$ ha la valenza zero, tal sarà pure della corrispondenza inversa $(T+T_1)^{-1}=T^{-1}+T_1^{-1}$ (n. 63). Sussiste perciò, accanto alla relazione:

$$X_1-\gamma a\equiv X_1'-\gamma a',$$

l'altra:

$$X+X_1\equiv X'+X_1'.$$

Sottraendole a membro a membro viene:

$$X+\gamma a\equiv X'+\gamma a',$$

la quale appunto prova che la corrispondenza T^{-1} ha la valenza γ.

([1]) L'esistenza di corrispondenze a valenza zero consegue del resto direttamente dal fatto che un'equazione del tipo $\varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)=0$, la quale per $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ non venga a contenere a fattore $f(x_1, x_2)$, definisce sulla curva $f(x_1, x_2)=0$ una corrispondenza a valenza zero.

77. Determinazione del gruppo delle coincidenze d'una corrispondenza a valenza qualunque γ. Numero delle coincidenze. — Consideriamo in primo luogo una corrispondenza elementare T generata da una g_n^1 ed Y sia il gruppo degli $n-1$ punti omologhi di a nella T; X il gruppo degli omologhi di a nella T^{-1}. Poichè $T=T^{-1}$, i due gruppi X, Y coincidono.

Il gruppo U delle coincidenze di T non è altro che il gruppo jacobiano J della g_n^1; ed è facile vedere che se, come si può sempre supporre (pag. 113), la g_n^1 non ha che punti doppi, ognuno dei $2(n+p-1)$ punti di J conta semplicemente come punto di U. E difatti, per essere la corrispondenza T simmetrica, un punto di J non può contare più volte nel gruppo U, se non nel caso che due (almeno) degli omologhi di a, quando a tende a quel punto di J, vengano a coincidere con esso (ved. n. 72 nota a piè di pag. 223); ma allora quel punto sarebbe più che doppio per la g_n^1.

I due gruppi U ed J son dunque identici. Indicato con K un gruppo canonico di C, posto che $X+a=Y+a$ è un gruppo della data g_n^1, verrà (n. 34):

$$U\equiv X+Y+2a+K.$$

Per mezzo di tale relazione, dimostreremo il seguente teorema generale:

Sia T una corrispondenza (α, β) a valenza γ (positiva, negativa o nulla) sopra la curva C di genere p; Y, X sieno i gruppi degli omologhi di un punto a della curva, nella T e nella T^{-1}; K un gruppo canonico di C; U il gruppo delle coincidenze di T. Sussiste allora l'equivalenza:

$$U\equiv X+Y+\gamma K+2\gamma a. \tag{20}$$

La espressione numerativa di questa relazione geometrico-funzionale, fornisce il numero u dei punti uniti:

$$u=\alpha+\beta+\gamma(2p-2)+2\gamma=\alpha+\beta+2\gamma p.$$

Si ha così il *principio di corrispondenza di* Cayley-Brill-Hurwitz:

Il numero dei punti uniti della corrispondenza T, di cui sopra, è espresso da:

$$u=\alpha+\beta+2\gamma p. \tag{21}$$

Dimostriamo in primo luogo la (20) per una corrispondenza S, somma di h corrispondenze elementari $T_1, T_2, \ldots, T_h$.

Indichiamo con Y_i, e con X_i, i gruppi degli omologhi del generico punto a di C, nella T_i e nella T_i^{-1}. (Essendo $T_i = T_i^{-1}$, risulterà $Y_i = X_i$). Ad a, nella S, risponderà allora il gruppo $Y_0 = Y_1 + \ldots + Y_h$ e nella S^{-1} il gruppo $X_0 = X_1 + \ldots + X_h$. Detto V il gruppo delle coincidenze di S ed $U_1, \ldots, U_h$ i gruppi delle coincidenze di $T_1, \ldots, T_h$, viene:

$$V = U_1 + \ldots + U_h.$$

I punti uniti di ciascuna delle T_i posson supporsi distinti fra loro, secondo l'osservazione premessa al principio del numero; e, attesa l'arbitrarietà della scelta delle serie lineari generanti le T_i, può anche supporsi che i punti uniti di ogni T_i sieno distinti da quelli di ogni altra. Così risulteranno distinti fra loro anche i punti di V; distinti, nel senso già precisato al n. 75, che è poi il medesimo cui conduce l'applicazione della regola di Zeuthen. Valgono inoltre le equivalenze:

$$U_i \equiv X_i + Y_i + K + 2a \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

le quali, sommate a membro a membro, porgono:

$$V \equiv X_0 + Y_0 + hK + 2ha,$$

che dimostra l'equivalenza (20) — e quindi il principio (21) — per la corrispondenza S.

Sia ora T una qualunque corrispondenza a valenza negativa γ, per la quale valgano le notazioni dell'enunciato del teorema da dimostrarsi. Sia h il valore assoluto di γ ed S la corrispondenza, come sopra costruita, mediante la somma di h corrispondenze elementari.

La corrispondenza $S + T$ ha la valenza zero ed essa fa corrispondere ad a i punti del gruppo $Y + Y_0$, mentre la inversa fa corrispondere ad a i punti del gruppo $X + X_0$. Se il gruppo U dei punti uniti di T si *definisce* contando la molteplicità di ciascun punto unito di T secondo la regola di Zeuthen, poichè tale regola vale già pel gruppo dei punti uniti della corrispondenza a valenza zero $S + T$ (n. 74) e pel gruppo dei punti uniti di S, il gruppo dei punti uniti di $S + T$ risulterà la somma dei gruppi U, V. E quindi sarà (n. 72):

$$U + V \equiv (X + X_0) + (Y + Y_0),$$

dalla quale, sottraendo a membro a membro la precedente equivalenza, segue:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a.$$

Il teorema è così dimostrato per le corrispondenze a valenza negativa.

Sia infine T una corrispondenza a valenza positiva γ, per la quale valgano le notazioni dell'enunciato, e T' una corrispondenza a valenza negativa $-\gamma$ (di certo esistente, n. 76). Per la T' valgano le stesse notazioni introdotte per la T, salvo l'aggiunta degli apici.

Poichè la somma $T + T'$ ha valenza zero, se si *definisce* il gruppo U dei punti uniti di T, contando ogni punto unito colla regola di Zeuthen, essendo che tal regola vale già per $T + T'$ e per T', viene:

$$U + U' \equiv (X + X') + (Y + Y').$$

Ma d'altronde, per quanto precede:

$$U' \equiv X' + Y' - \gamma K - 2\gamma a.$$

Sottraendo dalla prima la seconda, si deduce:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a,$$

la quale dimostra il teorema per le corrispondenza a valenza positiva.

Come si rileva dalla dimostrazione *la equivalenza* (20) *ed il principio* (21) *in tanto sono validi, in quanto ogni punto unito della considerata corrispondenza, si conti colla molteplicità data dalla regola di* Zeuthen.

78. **Estensione del concetto di valenza. Dipendenza fra più corrispondenze.** — Se T_1 è una corrispondenza a valenza γ_1, la quale faccia corrispondere al punto a di C i punti del gruppo Y_1, abbiamo detto (n. 70) che, al muoversi di a, il gruppo $Y_1 + \gamma_1 a$ varia in una serie lineare (effettiva o virtuale).

Diremo altresì che la corrispondenza T_1 e la corrispondenza identica I, che associa ad a sè medesimo, sono dipendenti secondo i numeri interi $(1, \gamma_1)$.

Se T_2 è un'altra corrispondenza, a valenza γ_2, che associ ad a il gruppo Y_2, ogni combinazione lineare dei gruppi

$Y_1 + \gamma_1 a$, $Y_2 + \gamma_2 a$, variabili in serie lineari, varia in una serie lineare. In particolare varia in una serie lineare (si sottintende sempre effettiva o virtuale) il gruppo $\gamma_2 Y_1 - \gamma_1 Y_2$. Si dice perciò che le due corrispondenze T_1, T_2 son dipendenti secondo gl'interi $(\gamma_2, -\gamma_1)$.

Questo concetto di dipendenza si può estendere in generale così:

Si dice che le corrispondenze $T_1, \ldots, T_k$, date sopra una curva C, son dipendenti secondo gl'interi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ (positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli), se, detto $Y_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ il gruppo degli omologhi, nella T_i, del punto a variabile in C, il gruppo $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_k Y_k$ varia in una serie lineare (effettiva o virtuale).

In altre parole: indicato con Y_i' il gruppo associato dalla T_i ad un altro punto a' della curva, sussiste l'equivalenza:

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \ldots + \lambda_k Y_k'.$$

Ciò si enuncierà anche dicendo che *la corrispondenza (effettiva o virtuale) $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ è a valenza zero.*

Si dice pure che una delle T, cui sia annesso un coefficiente λ non nullo, *dipende dalle rimanenti.*

Se invece, comunque si scelgano gl'interi non tutti nulli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, non accade mai che $\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k$ varii in una serie lineare, si dice che le $T_1, \ldots, T_k$ sono tra di loro *indipendenti.*

È chiaro che, se le corrispondenze $T_1, \ldots, T_k$ son dipendenti secondo gl'interi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, esse lo sono altresì secondo gli interi $(\mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_k)$, ove μ sia un intero arbitrario non nullo. Vale anche la proprietà reciproca, come si vedrà al n. 82, Oss. 4ª.

Colle locuzioni introdotte si può dire che:

Ogni corrispondenza a valenza dipende dall'identità; e due corrispondenze a valenza son dipendenti tra loro.

Come estensione del teorema dei nn. 63, 76, dimostriamo che:

Se le corrispondenze $T_1, \ldots, T_k$ son dipendenti secondo gli interi $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, le loro inverse son dipendenti secondo gli stessi numeri.

Quando gl'interi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sieno tutti positivi (o tutti negativi) il gruppo $\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k$ (o il gruppo $-\lambda_1 Y_1 - \ldots - \lambda_k Y_k$) è effettivo, e la corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k$ (o rispettivamente $-\lambda_1 T_1 - \ldots - \lambda_k T_k$) è a valenza zero. Onde la sua inversa, che, a norma del n. 69, è $\lambda_1 T_1^{-1} + \ldots + \lambda_k T_k^{-1}$, risulta a valenza zero (n. 63). E ciò equivale a quanto si è enunciato.

Se alcuni degli interi λ, p. es. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$, son positivi (o nulli, ma non tutti nulli) e gli altri negativi (o nulli, ma non tutti nulli) e si pone:

$$\mu_{i+1} = -\lambda_{i+1}, \ldots, \mu_k = -\lambda_k,$$

converrà ammettere che la corrispondenza $\mu_{i+1} T_{i+1} + \ldots + \mu_k T_k$ non sia a valenza zero, perchè, se lo fosse, lo sarebbe altresì la corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_i T_i$ e ci si ridurrebbe subito al caso precedente. Si può allora considerare la complementare S della corrispondenza $\mu_{i+1} T_{i+1} + \ldots + \mu_k T_k$ (n. 75). D'altra parte, essendo a valenza zero la corrispondenza (effettiva o virtuale) $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_i T_i - \mu_{i+1} T_{i+1} - \ldots - \mu_k T_k$, risulta a valenza zero la corrispondenza effettiva $\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_i T_i + S$, e quindi anche la sua inversa $\lambda_1 T_1^{-1} + \ldots + \lambda_i T_i^{-1} + S^{-1}$. Risulta in conclusione a valenza zero la differenza di questa ultima e della $S^{-1} + \mu_{i+1} T_{i+1}^{-1} + \ldots + \mu_k T_k^{-1}$, ossia la corrispondenza (effettiva o virtuale)

$$\lambda_1 T_1^{-1} + \lambda_2 T_2^{-1} + \ldots + \lambda_i T_i^{-1} + \lambda_{i+1} T_{i+1}^{-1} + \ldots + \lambda_k T_k^{-1};$$

c. d. d.

79. Relazione geometrico-funzionale fra i gruppi dei punti uniti di più corrispondenze dipendenti. Il principio generale di corrispondenza. — Dimostriamo ora il teorema seguente:

Sieno, sulla curva C, $T_1, T_2, \ldots, T_k$ corrispondenze dipendenti secondo $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ e nessuna di esse posseggа infiniti punti uniti. Sieno inoltre $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$; $X_1, X_2, \ldots, X_k$ i gruppi degli omologhi di un punto a di C nelle $T_1, T_2, \ldots, T_k$; $T_1^{-1}, T_2^{-1}, \ldots, T_k^{-1}$; ed $U_1, U_2, \ldots, U_k$ i gruppi dei punti uniti di quelle corrispondenze. Vale allora l'equivalenza:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \\ + \lambda_2 (X_2 + Y_2) + \ldots + \lambda_k (X_k + Y_k). \tag{22}$$

Sieno, in primo luogo, tutte le λ positive [il caso in cui son tutte negative riducesi subito a questo, col cangiamento di segno dei due membri della relazione (22)]. Basterà provare che un multiplo, p. es. $\lambda_1 T_1$, di una corrispondenza T_1, ha come gruppo dei punti uniti, valutati colla regola di ZEUTHEN, il gruppo U_1 dei punti uniti di T_1, contato λ_1 volte; giacchè, una volta provato questo, atteso che la somma di due corrispondenze distinte ha come gruppo dei punti uniti, valutati con ZEUTHEN, la somma dei gruppi dei punti uniti delle corrispondenze addendi, la (22) si ridurrà senz'altro al teorema del n. 72.

Ora, se un punto unito O della T_1, conta ν volte, ciò significa che, considerata la complementare S_1 di T_1 ed una corrispondenza a valenza zero R_1, dotata di punti uniti distinti, la quale sia suscettibile di variare con continuità, fino a ridursi alla $T_1 + S_1$, vi sono ν punti uniti di R_1, che tendono ad O sul medesimo ramo δ (n. 75).

Prendansi λ_1 corrispondenze generiche del sistema continuo cui appartiene R_1: la loro somma R sarà una corrispondenza a valenza zero, coi punti uniti distinti.

Facendo tendere simultaneamente quelle λ_1 corrispondenze, con una legge prefissata, a $T_1 + S_1$, la corrispondenza limite di R sarà $\lambda_1 T_1 + \lambda_1 S_1$, e $\lambda_1\nu$ punti uniti distinti di R tenderanno ad O sul ramo δ. Onde O, nel gruppo dei punti uniti di $\lambda_1 T_1$, valutati con ZEUTHEN, conterà $\lambda_1\nu$ volte; epperò il gruppo dei punti uniti di $\lambda_1 T_1$ sarà $\lambda_1 U_1$.

Se alcune delle λ son negative, p. es. come nel n. prec., s'introdurrà la corrispondenza complementare S di

$$\mu_{i+1} T_{i+1} + \dots + \mu_k T_k,$$

facendola giuocare in modo analogo a quello del n. prec. e si concluderà ancora colla (22).

La interpretazione numerativa della (22) conduce al teorema:

Se sopra una curva si hanno k corrispondenze, ciascuna con un numero finito di punti uniti, degl'indici $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_k, \beta_k$, dipendenti secondo gl'interi (positivi o negativi) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, sussiste la relazione:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \lambda_k(\alpha_k + \beta_k), \tag{23}$$

ove $u_1, \dots, u_k$ sono i numeri dei punti uniti di quelle corrispondenze, contati colla regola di ZEUTHEN.

OSSERVAZIONE 1ª. — Se fra le k date corrispondenze se ne trovano talune che posseggono infiniti punti uniti, e sieno

p. es. T_1, T_2, ognuna di tali corrispondenze è riducibile e si decompone nella somma di una corrispondenza (eventualmente riducibile) con un numero finito di coincidenze, e nell'identità T, contata un certo numero di volte. Così, se T_1 associa al generico punto a di C il punto stesso contato μ_1 volte ed altri $\beta_1 - \mu_1$ punti, distinti da a, questi son omologhi di a in una corrispondenza T_1', tale che:

$$T_1 = T_1' + \mu_1 T.$$

Similmente la inversa T_1^{-1} associerà ad a il punto stesso contato μ_1 volte e $\alpha_1 - \mu_1$ punti distinti da a (n. 64); onde:

$$T_1^{-1} = T_1'^{-1} + \mu_1 T.$$

In modo analogo verrà:

$$T_2 = T_2' + \mu_2 T, \quad T_2^{-1} = T_2'^{-1} + \mu_2 T.$$

Indicati con U_1', U_2' i gruppi dei punti uniti di T_1', T_2', la corrispondenza (effettiva o virtuale)

$$\lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2' + \lambda_3 T_3 + \dots + \lambda_k T_k,$$

risulterà a valenza $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$, e quindi avremo:

$$\lambda_1 U_1' + \lambda_2 U_2' + \lambda_3 U_3 + \dots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1(X_1' + Y_1') + \lambda_2(X_2' + Y_2') +$$
$$+ \lambda_3(X_3 + Y_3) + \dots + \lambda_k(X_k + Y_k) + 2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)a + (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)K,$$

ove K è un gruppo canonico di C.

La relazione numerativa corrispondente sarà:

$$\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda_2(\alpha_2 + \beta_2) + \dots +$$
$$+ \lambda_k(\alpha_k + \beta_k) + 2(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)p.$$

OSSERVAZIONE 2ª. — Vedremo in seguito che sopra una curva di genere p a *moduli generali* le corrispondenze sono tutte a valenza (positiva, negativa o nulla), cosicchè esse dipendono tutte dall'identità, e che sopra una curva a moduli qualunque, si può sempre determinare un numero finito di corrispondenze $T_1, T_2, \dots, T_\rho$, tali che, presa un'altra corrispondenza qualsiasi T della curva, la corrispondenza (effettiva o virtuale) $T - \lambda_1 T_1 - \ldots - \lambda_\rho T_\rho$, ove $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ son interi, positivi, negativi o nulli, dipendenti soltanto da T, sia a valenza zero. Ne deriva, conservando le solite notazioni, che:

$$U - \lambda_1 U_1 - \ldots - \lambda_\rho U_\rho \equiv (X + Y) - \lambda_1(X_1 + Y_1) - \ldots - \lambda_\rho(X_\rho + Y_\rho);$$

la quale, interpretata numerativamente, dà luogo al *principio generale di corrispondenza*, dovuto ad HURWITZ:

$$u = \alpha + \beta + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_\rho c_\rho,$$

ove i numeri $c_i = u_i - \alpha_i - \beta_i$, dipendono dalle ρ corrispondenze *fisse* $T_1, \ldots, T_\rho$ e gl'interi λ dalla T.

Le corrispondenze $T_1, \ldots, T_\rho$ si dice che costituiscono una *base per la totalità delle corrispondenze esistenti sulla curva*.

Il concetto di corrispondenza algebrica fra due curve algebriche, da gran tempo noto, specie in concreti casi particolari, fu considerato dal punto di vista generale del n. 61, da SEGRE (Introduzione, § 2), insieme all'osservazione che una corrispondenza siffatta può sempre rappresentarsi con due equazioni (n. 60). La nozione di riducibilità e irriducibilità delle corrispondenze è implicitamente acquisita, allorchè si consideran le corrispondenze come varietà algebriche subordinate alla varietà delle coppie di punti delle due curve. Ma di tal nozione si fa sistematico uso per la prima volta (specie attraverso al concetto di *somma* di due corrispondenze) in varî lavori dell'Autore [Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie (citato in seguito colla parola « Corrispondenze »), Torino Mem. 54_2, 1 (1903); Torino Atti, 48, 660 (1913); oltre ai lavori citati a piè della pag. 24 di questo Trattato]. Che una corrispondenza fra due curve distinte o sovrapposte, la quale sia a valenza zero in un senso, lo sia anche nel senso opposto, è pressochè evidente (Corrispondenze, n. 6). Vale altresì una proprietà analoga per corrispondenze fra varietà superiori, anche di dimensioni diverse [SEVERI, Ann. di Mat. 12_3, 62 (1906)]. Che l'inversa di una corrispondenza a valenza $\gamma \geq 0$ fra due curve sovrapposte, abbia la stessa valenza, trovasi dimostrato in BRILL (citato più sotto), CLEBSCH-LINDEMANN [Leçons sur la géométrie, Paris, Gauthier-Villars, 2, 149 (1880)], nel modo indicato nell'Oss. 3ª del n. 63. Altra dimostrazione (iperspaziale) in SEGRE, Introduzione, § 12. La dimostrazione del n. 76 (valida anche per corrispondenze a valenza $\gamma < 0$) è dell'Autore (Corrispondenze, n. 7). Abbiamo creduto opportuno di indicarne una ulteriore dimostrazione di carattere differenziale (n. 63), anche perchè la proprietà infinitesimale su cui ci si poggia permette di precisare (n. 64) proprietà delle corrispondenze con punti multipli variabili, che da CAYLEY in poi, generalmente si ammettono come evidenti, mentre, in una trattazione rigorosa, occorre ben precisarle. Il teorema del n. 65 [contenuto implicitamente nel teorema di ABEL sugli integrali abeliani (ved. le « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 271)] è stato considerato in modo esplicito da ENRIQUES (Palermo Rend. 10, 30 (1895)], che ne ha dato una dimostrazione geometrica, diversa da quella del n. 65. Quest'ultima è tratta dal lavoro dell'Autore degli Ann. di Mat. 1906, citato poco sopra. Pel teorema del n. 66, affermante l'invarianza della relazione di equivalenza fra gruppi di punti, di fronte a trasformazioni algebriche d'indici qualunque, della curva in cui son dati quei gruppi, ved. SEVERI, Torino Atti, 38, 185 (1903). La formula di ZEUTHEN, sotto il suo aspetto numerativo, trovasi in ZEUTHEN [Math. Ann. 3, 150 (1871)]. HALPHEN [Bull. Soc. Math., 5, 7 (1876)] ne ha esteso la portata a corrispondenze con punti più che doppi. Il significato geometrico-funzionale della formula, pel caso di corrispondenze $(1, \alpha')$, fu assegnato, per via trascendente (coll'omissione del gruppo di diramazione) da PAINLEVÉ [Ann. éc. norm., 115 (1891); J. de Math. 10, 203 (1894)] e, per via geometrica, da CASTELNUOVO, Lincei Rend. 7_1, 294 (1891); un'altra dimostrazione trascendente fu data da HUMBERT [J. de Math., 10, 169 (1894)]. Pel caso generale di una corrispondenza (α, α'), l'interpretazione funzionale della formula di ZEUTHEN fu assegnata dall'Autore, col metodo esposto nel n. 67 [Ist. Lomb. Rend., 36_2, 495 (1903)].

La trattazione della teoria delle corrispondenze fra i punti di una curva, mediante il sistematico uso del concetto di somma di due corrispondenze, qual'è esposta dal n. 69 in poi, è ispirata alla Memoria sulle « Corrispondenze » dell'Autore. Si arriva così nel modo più semplice e rapido al principio per le corrispondenze a valenza ed al suo significato funzionale, assegnato, per via trascendente, da HURWITZ, nella Memoria più sotto citata, e per via geometrica dall'Autore (Corrispondenze).

In questo Trattato la esposizione geometrica della teoria delle corrispondenze vien completata, precisando la maniera di computare i punti uniti in ogni relazione di equivalenza in cui intervenga il loro gruppo.

Il fondamento di tale computo è la regola di ZEUTHEN [Bull. sc. math., 5_1, 186 (1873)] per determinare la molteplicità dei punti uniti di una corrispondenza algebrica sopra una retta; regola che lo stesso ZEUTHEN ha trasportato alle corrispondenze sopra una curva [Math. Annalen, 40, 102 e 105 (1892)], riducendosi, mediante la rappresentazione analitica del ramo ove avviene la coincidenza, ad una corrispondenza (analitica) sopra una retta, definita nell'intorno di un punto di questa. [Ved. altresì, ZEUTHEN, Lehrbuch der abzählenden Geometrie, pag. 206, Leipzig (Teubner, 1914)]. Però tale modo di trasportar la regola va soggetto alle obiezioni indicate nel n. 75 (Oss.); ed è appunto per evitarle, che abbiamo seguito il procedimento dei nn. 72 e seguenti.

Il punto di partenza della teoria delle corrispondenze fra i punti di una curva, è il principio di corrispondenza sopra una retta, formulato esplicitamente da CHASLES nel 1864 [C. R. 58, 1175 (1864)]. In sostanza il principio stesso si trovava però già in JONQUIÈRES [J. de Math., 6_2, 117 e 119 (1861)] (1).

(1) Per la storia di questo principio ved. SEGRE, Bibl. math., 6_2, 33 (1892) e l'articolo di ZEUTHEN-PIERI nella Enc. des sc. math. (III, 1, 2, pag. 286).

Due anni più tardi, nella stessa seduta del 12 marzo 1866, CHASLES e CAYLEY, presentano pei C. R. (62, 579 e 586) due Note: quella di CHASLES contiene il trasporto del principio alle curve razionali, e così quella di CAYLEY, ma in modo più elevato e generale. Inoltre CAYLEY, con « une induction qui lui parut suffisante » enuncia il principio per le corrispondenze a valenza γ positiva o nulla, sopra una curva di genere qualunque. Le prime dimostrazioni del principio di CAYLEY ($\gamma \geqq 0$) furon date da BRILL [Math. Ann., 6, 33 (1873); Math. Ann., 7, 607 (1874)], e cioè una dimostrazione algebrica, che si riattacca alla determinazione del numero delle coppie di punti di una curva algebrica, che soddisfanno a due date equazioni [Math. Ann., 4, 510 (1871)] ed una dimostrazione di carattere più geometrico. La denominazione di *valenza* (Wertigkeit) è stata introdotta da BRILL. Molte altre dimostrazioni geometriche del principio di CAYLEY-BRILL furon date dipoi: segnaleremo quella iperspaziale di SEGRE (Introduzione, § 12) e quelle di ZEUTHEN [Math. Ann., 40, 99 (1892); Lehrbuch, pag. 206 e segg.], una delle quali è poggiata sul principio di CHASLES e l'altra sopra un concetto geniale di JONQUIÈRES, quello cioè di dedurre formule numerative inerenti a curve di genere p, da formule inerenti a curve razionali. Si tratta di far acquistare alla curva p nuovi punti doppi e di contare opportunamente le soluzioni improprie che si presentano in relazione a questi nuovi punti doppi. Ciò però presuppone, come lo stesso ZEUTHEN avverte, che la corrispondenza che si considera sia generabile sopra ogni curva (piana) di un sistema continuo, il quale contenga curve razionali (con p nuovi punti doppi). Il che — come noi proveremo in seguito — si verifica sempre che la corrispondenza sia sopra una curva a moduli generali. Così lo ZEUTHEN viene a considerare altresì corrispondenze a valenza negativa.

Il principio per le corrispondenze a valenza, anche negativa, fu dato coll'aiuto degl'integrali abeliani e delle funzioni theta, in una Memoria fondamentale di HURWITZ [Math. Ann., 28, 561 (1887)]. E nel lavoro dell'Autore sulle « Corrispondenze » trovasi la prima dimostrazione geometrica generale del principio e della sua interpretazione funzionale, in guisa da comprendere anche il caso $\gamma < 0$. Come abbiamo già accennato nell'Oss. 2ª del n. 79, le corrispondenze a valenza son le sole che esistono sulle curve a moduli generali. Su questa bella proprietà, dovuta ad HURWITZ, ci riserbiamo di tornare in seguito. E aggiungeremo allora altre notizie bibliografiche. Ritorneremo altresì sull'altra proprietà accennata, che sopra una curva esiste un numero finito di corrispondenze indipendenti. Anche questa notevole proprietà è stata dimostrata da HURWITZ, sotto forma e con mezzi trascendenti. Il contenuto geometrico della medesima è stato posto in luce dall'Autore nella Memoria sulle «Corrispondenze».

La trattazione della teoria delle corrispondenze cogli integrali abeliani, secondo il punto di vista di HURWITZ, farà parte di un successivo volume, ove la geometria sopra una curva verrà studiata col metodo riemanniano. La rappresentazione trascendente d'una corrispondenza a valenza, conduce nel modo più naturale a considerare le *corrispondenze a più valenze* o *plurivalenti*, come ha mostrato l'Autore [Math. Annalen, 74, 521 (1913)]. Tali corrispondenze sono state di poi studiate diffusamente da ROSATI [Torino Atti, 51, 991 (1916)], il quale ha ulteriormente esteso il concetto di valenza (reale o complessa), riuscendo così ad attribuire un certo numero di valenze ad una corrispondenza (singolare) qualunque e presentando in conseguenza a formula di HURWITZ, pel numero delle coincidenze, sotto un aspetto analogo a quello della formula di CAYLEY-BRILL [Torino Atti, 53, 5 (1917)]. Da ciò derivano molteplicità interessanti proprietà delle corrispondenze, sviluppate in varî lavori dello stesso ROSATI [Ann. di Mat., 28_3, 35 (1918); Palermo Rend., 44, 307 (1920); Ann. di Mat., 31_3, 1 (1921)].

Fra le conseguenze della rappresentazione di HURWITZ citeremo infine un teorema di CASTELNUOVO, che stabilisce una limitazione pel genere di una curva contenente un'infinità continua di corrispondenze aventi uno degli indici eguali a un dato numero α [Scritti matematici offerti ad E. D'Ovidio, p. 164, Torino (1918)]. Questo risultato estende alle corrispondenze d'indici qualunque il teorema di SCHWARZ-KLEIN (n. 55).

§ 3. - APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE CORRISPONDENZE.

80. La formula di JONQUIÈRES e il suo significato funzionale. — Consideriamo sopra una curva C, di genere p, una serie lineare g_n^r priva di punti fissi. La condizione affinchè un gruppo di g_n^r abbia un punto k-plo, in un punto (non dato) della curva, ha, rispetto ai gruppi della serie, la dimensione $k-1$; cosicchè, se si impone ad un medesimo gruppo di avere α_1 punti k_1-pli, α_2 punti k_2-pli,..., α_ρ punti k_ρ-pli (e i rimanenti $n - k_1\alpha_1 - ... - k_\rho\alpha_\rho$ punti semplici), ove le k son tutte diverse fra loro, ciò equivarrà ad imporre ai gruppi della serie una condizione, che avrà *in generale* la dimensione $\sum_{i=1}^{\rho}\alpha_i(k_i - 1)$. E diciamo in generale, perchè potrebbe darsi che in casi speciali la dimensione della condizione diminuisse.

Pertanto, se è:

$$\sum_{i=1}^{\rho}\alpha_i(k_i - 1) = r,$$

la data g_n^r avrà in generale un numero finito di gruppi con quelle tali molteplicità. Così p. es., quando sia $\rho = 1$, $\alpha_1 = 1$, $k_1 = r+1$, si ha un numero finito di gruppi ciascuno con un punto $(r+1)$-plo (n. 37); quando $\rho = 1$, $\alpha_1 = r$, $k_1 = 2$, si ha un numero finito di gruppi ciascuno con r punti doppi; ecc.

La *formula di* JONQUIÈRES risponde precisamente al problema di assegnare il numero j dei gruppi con quelle tali molteplicità. Per scrivere questa formula nel modo più semplice ed elegante, poniamo:

(1) $\Sigma\alpha_i = t$, cosicchè sarà: $\Sigma\alpha_i k_i = r + t \quad (r + t \leq n)$;

e indichiamo con s_i la somma dei prodotti ad i ad i di t numeri, dei quali α_1 eguali a $k_1 - 1$, α_2 eguali a $k_2 - 1, \ldots, \alpha_\rho$ eguali a $k_\rho - 1$. S'intende però che, nel formare la detta somma, gli α_1 numeri eguali a $k_1 - 1$, dovranno considerarsi come distinti, e così gli α_2 numeri eguali a $k_1 - 1$; ecc.

Si ha allora per j l'espressione:

$$
(2) \quad j = \frac{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_\rho^{\alpha_\rho}}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_\rho!} [(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-t+1) + \\
+ (n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-r-t+1)ps_1 + (n-r-2)\ldots \\
\ldots (n-r-t+1)p(p-1)s_2 + \ldots + (n-r-t+1)p(p-1)\ldots \\
\ldots (p-t+2)s_{t-1} + p(p-1)\ldots(p-t+2)(p-t+1)s_t].
$$

Per brevità l'espressione fra parentesi quadre verrà formalmente indicata con $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho;\ k_1, \ldots, k_\rho;\ n, r, p, t)$, e ciò anche se non è soddisfatta la seconda delle (1).

La formula numerativa scritta s'interpreta inoltre, dal punto di vista geometrico-funzionale, nel modo seguente:

Sia X_1 il gruppo dei punti che son k_1-pli pei gruppi suddetti, ognun di questi punti essendo contato una volta; G un gruppo della g_n^r e K un gruppo canonico della curva.

Viene:

$$
(3) \quad X_1 \equiv \lambda_1 G + \mu_1 K,
$$

ove:

$$
(4) \quad \lambda_1 = \frac{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_\rho^{\alpha_\rho}}{(\alpha_1 - 1)!\,\alpha_2! \ldots \alpha_\rho!} H(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho;\ k_1, k_2, \ldots \\
\ldots, k_\rho;\ n-1, r, p-1, t-1).
$$

L'espressione di μ_1, in funzione delle α, k, n, r, p, t, è meno semplice e non ci occorre di scriverla esplicitamente, posto ch'essa può ricavarsi, tenuto conto della (4) e del fatto che il numero x_1 dei punti di X_1 eguaglia $\alpha_1 j$. Ne segue:

$$
(5) \quad \mu_1 = \frac{\alpha_1 j - \lambda_1 n}{2p - 2} \ (^1).
$$

(1) Se $p = 1$, nella (3) manca il termine in K e si ha semplicemente $X_1 \equiv \lambda_1 G$.

Per dimostrare la formula di Jonquières e la equivalenza (3), procederemo per induzione, dal momento che le (2), (3) son valide per le serie lineari ∞^1 (per le quali è necessariamente $\rho = 1$, $\alpha_1 = 1$, $k_1 = 2$). Supporremo dunque già acquisito il risultato per le serie lineari di dimensione $< r$ e lo dedurremo per quelle di dimensione r.

Per un punto generico P di C passano ∞^{r-k_1+1} gruppi della data g_n^r, aventi in P un punto $(k_1 - 1)$-plo. Essi, fatta astrazione dal punto fisso $(k_1 - 1)$-plo, costituiscono una $g_{n-k_1+1}^{r-k_1+1}$, nella quale esiste un numero finito h di gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_h$ contenenti ciascuno $\alpha_1 - 1$ punti k_1-pli (¹), α_2 punti k_2-pli, ..., α_ρ punti k_ρ-pli. In tali gruppi, tolti questi punti, restano complessivamente $h(n - r - t + 1)$ punti, che si assumeranno come omologhi di P in una corrispondenza T, la quale, essendo costruita con operazioni algebriche, sarà algebrica.

Il gruppo dei punti uniti di T è manifestamente quello poc'anzi indicato con X_1; cosicchè il numero dei punti uniti di T, diviso per α_1, fornirà il numero j relativo alla nostra g_n^r.

Cominciamo col provare che T è dotata di valenza. Sia Y il gruppo degli omologhi di P; Y_i $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ il gruppo dei punti k_i-pli (contati ciascuno una volta) di $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_h$; Γ un gruppo generico della $g_{n-k_1+1}^{r-k_1+1}$. Allora il gruppo

$$
Y + k_1 Y_1 + \ldots + k_\rho Y_\rho + h(k_1 - 1)P,
$$

al variare di P, varia nella serie lineare $|hG|$, cioè:

$$
(6) \quad Y + k_1 Y_1 + \ldots + k_\rho Y_\rho + h(k_1 - 1)P \equiv hG.
$$

Sussistono inoltre le equivalenze:

$$
(7) \quad \Gamma + (k_1 - 1)P \equiv G,
$$

$$
(8) \quad Y_i \equiv \lambda_{1i}\Gamma + \mu_{1i} K,
$$

la prima delle quali esprime che il gruppo Γ, insieme al punto $(k_1 - 1)$-plo P, dà un gruppo della nostra g_n^r; e la seconda consegue dal teorema ammesso per le serie di dimensione $< r$, essendo λ_{1i}, μ_{1i} convenienti espressioni formate colle α, k, n, r, p, t.

Sostituendo nella (6) le espressioni (8) delle Y_i, ed eliminando Γ mediante la (7), viene:

$$
(9) \quad Y + (k_1 - 1)(h - \Sigma k_i \lambda_{1i})P \equiv (h - \Sigma k_i \lambda_{1i})G - K\Sigma k_i \mu_{1i}.
$$

(¹) Si suppone $\alpha_1 > 1$. Se $\alpha_1 = 1$, il ragionamento subisce lievi varianti che ognuno vede da sè.

E poichè il gruppo, effettivo o virtuale, del secondo membro, non dipende da P, si conclude che T ha la valenza

$$\gamma = (k_1 - 1)(h - \Sigma k_i \lambda_{1i}).$$

A questo punto si potrebbe formalmente verificare l'identità algebrica:

$$h - \Sigma k_i \lambda_{1i} = \frac{\lambda_1}{k_1},\ (^1)$$

donde:

$$\gamma = \frac{k_1 - 1}{k_1} \lambda_1 .$$

Ma questa verifica formale può evitarsi, determinando direttamente la valenza della corrispondenza T^{-1}, che è la stessa della T (n. 76).

Dicasi X il gruppo dei punti omologhi di P nella T^{-1}. Per caratterizzare X, convien distinguere il caso $k_1 = 2$ dal caso $k_1 > 2$. Nel primo, la corrispondenza T è simmetrica, onde X, Y risultano identici; nel secondo caso, consideriamo la g_{n-1}^{r-1} formata dai gruppi della data g_n^r, che passano per P. Tale g_{n-1}^{r-1} possiede un numero finito di gruppi contenenti ciascuno un punto $(k_1 - 1)$-plo, $\alpha_1 - 1$ punti k_1-pli, α_2 punti k_2-pli, ..., α_ρ punti k_ρ-pli.

Orbene, il gruppo Y è fornito dai punti che son $(k_1 - 1)$-pli pei suddetti gruppi.

In ogni caso si ha (pag. 233):

$$(10) \qquad X_1 \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma P.$$

Ora, designato con Δ un gruppo della suddetta g_{n-1}^{r-1}, viene:

$$(11) \qquad \Delta + P \equiv G,$$

e inoltre:

$$(12) \qquad X \equiv \lambda_1' \Delta + \mu_1' K,$$

ove, a cagion del teorema ammesso per le serie di dimensione $< r$:

$$\lambda_1' = \frac{(k_1 - 1) k_1^{\alpha_1 - 1} k_2^{\alpha_2} \dots k_\rho^{\alpha_\rho}}{0!\,(\alpha_1 - 1)!\,\alpha_2! \dots \alpha_\rho!} H(0,\ \alpha_1 - 1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_\rho;\ k_1 - 1,\ k_1,\ k_2, \dots$$
$$\dots, k_\rho;\ n - 2,\ r - 1,\ p - 1,\ t - 1).$$

(1) I calcoli a ciò necessari sono eseguiti dal TORELLI nella Nota citata a pag. 249.

Ma poichè, come subito si verifica:

$$H(0, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_\rho;\ k_1 - 1, k_1, k_2, \dots, k_\rho;\ n - 2, r - 1, p - 1, t - 1) =$$
$$= H(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_\rho;\ k_1, k_2, \dots, k_\rho;\ n - 1, r, p - 1, t - 1),$$

risulta:

$$\lambda_1' = \frac{k_1 - 1}{k_1} \lambda_1 .$$

L'eliminazione di Δ fra le (11), (12) porge poi:

$$(13) \qquad X + \lambda_1' P \equiv \lambda_1' G + \mu_1' K,$$

la quale prova che la corrispondenza T^{-1}, e quindi la T, hanno la valenza $\gamma = \lambda_1'$.

Ricaviamo finalmente X, Y dalle (9), (13) e sostituiamo nella (10). Viene:

$$X_1 \equiv \lambda_1 G + (\lambda_1' + \mu_1' - \Sigma k_i \mu_{1i}) K,$$

e per dimostrare la (3) non rimane altro che verificare l'identità algebrica

$$\lambda_1' + \mu_1' - \Sigma k_i \mu_{1i} = \mu_1 .$$

Non ci tratterremo su tale verifica, che non offre nulla di concettualmente istruttivo (1).

Dalla (3) si deduce infine la (2), ricordando che $j = \frac{x_1}{\alpha_1}$.

OSSERVAZIONE 1ª. — Abbiamo detto in principio di questo numero che, in casi particolari, il numero dei gruppi di una data g_n^r, i quali posseggono α_1 punti k_1-pli, α_2 punti k_2-pli,... α_ρ punti k_ρ-pli, ove $\Sigma \alpha_i (k_i - 1) = r$, può essere infinito. Ciò non accade *mai* quando $\rho = 1$, $\alpha_1 = 1$, $k_1 = r + 1$ (pag. 90); ma in altri casi tale circostanza eccezionale può effettivamente presentarsi.

Così ad es. una curva sghemba C, d'ordine n e di genere p, possiede in generale un *numero finito j di piani tritangenti*, fornito dalla (2), per $r = 3$, $\rho = 1$, $\alpha_1 = 3$, $k_1 = 2$, come numero dei gruppi di una g_n^r possedenti ciascuno tre punti doppi:

$$j = 4 \left[\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3} + (n-4)(n-5)p + \right.$$
$$\left. + (n-5)p(p-1) + \frac{p(p-1)(p-2)}{3} \right].$$

(1) I calcoli a ciò necessari sono eseguiti nella Nota di TORELLI.

Orbene, è facile costruire una curva algebrica sghemba C, dotata di infiniti piani tritangenti. Prendasi all'uopo una superficie algebrica sviluppabile F, d'ordine m, e s'intersechi con una generica superficie del 3° ordine. La curva intersezione C, d'ordine $n = 3m$, possiede come piani tritangenti tutti gli ∞^1 piani tangenti della sviluppabile F, i punti di contatto con C, di ciascuno di questi piani, essendo le intersezioni della corrispondente generatrice di F colla superficie del 3° ordine.

È anzi agevole verificare che il tipo più generale di curva algebrica sghemba C, possedente ∞^1 piani (almeno) tritangenti, è appunto dato da una curva algebrica trisecante (almeno) le generatrici di una sviluppabile algebrica. Infatti, la sviluppabile F degli ∞^1 piani tritangenti di C, è evidentemente algebrica; e, se α è uno dei suoi piani tangenti e ne sono M, N, P i punti di contatto con C, il piano β dell'inviluppo, infinitamente vicino ad α, passa per M, N, P, onde questi punti giacciono sulla generatrice di F intersezione di α, β (generatrice di contatto del piano α).

Si vede di più che una curva sghemba non può ammettere ∞^2 piani tritangenti, perchè ne seguirebbe o l'esistenza di ∞^2 rette trisecanti o l'esistenza di ∞^1 rette tritangenti; conclusioni ambedue assurde, perchè la prima contraddice al teorema di pag. 64 e la seconda (proiettando la nostra curva genericamente sopra un piano) ad un teorema di pag. 91.

OSSERVAZIONE 2ª. — Quando la data g_n^r ha un numero finito di gruppi soddisfacenti alle condizioni espresse al principio del n. 80, non è tuttavia detto che il numero di tali gruppi *distinti* sia sempre fornito dalla (2). Può darsi cioè che qualche gruppo debba contarsi con opportuna molteplicità, pel fatto ch'esso, oltre agli α_1 punti k_1-pli, agli α_2 punti k_2-pli,..., agli α_ρ punti k_ρ-pli, possegga in conseguenza punti di maggiori molteplicità od altri punti multipli. Nel n. 37 tale questione venne esaurientemente trattata nel caso speciale $\rho = 1$, $\alpha_1 = 1$, $k_1 = r + 1$. Il caso generale non è stato da alcuno considerato, forse anche perchè importa complicazioni non adeguate all'interesse del risultato.

In certi casi s'intuisce a priori la molteplicità da attribuirsi a gruppi eccezionali. Così p. es. una retta tritangente di una curva piana conta tre volte nel gruppo delle bitangenti, perchè può considerarsi in tre modi diversi come bitangente.

OSSERVAZIONE 3ª. — Nel caso particolare $\rho = 1$, $\alpha_1 = 1$, $k_1 = r + 1$ il ragionamento di questo n. si semplifica notevolmente ed offre una nuova semplice dimostrazione della formula già trovata nel n. 37 (¹).

La formula (2) è stata data da DE JONQUIÈRES [J. für Math. 66, 289 (1866)], come numero delle curve di un sistema lineare di curve piane, che hanno contatti di dati ordini con una curva fissa C, in punti non dati di questa. JONQUIÈRES ottiene il risultato in due modi diversi:

1) Determina il numero in questione quando C ha il massimo numero di nodi (ossia è razionale) e ciò applicando per induzione il principio di corrispondenza di CHASLES ad una corrispondenza analoga alla nostra T. 2) Determina il numero stesso quando C è spezzata in rette. Dalle formule dedotte in questi casi speciali, ricava la formula generale, contando opportunamente le soluzioni improprie, in relazione a nuovi punti doppi, che si facciano acquistare alla curva data C, di genere p. Tale metodo geniale presuppone però — come già dicemmo nelle note bibliografiche alla fine del § 2 di questo Cap. — che la curva C sia suscettibile di variare in un sistema continuo contenente curve razionali o curve spezzate in rette. Cosa che noi vedremo dimostrata più tardi (allorchè C è una curva di genere p, a moduli generali). A BRILL [Math. Ann. 6, 46 (1873)]; ved. anche ZEUTHEN, Lehrbuch, pag. 246] è dovuta una dimostrazione della (2) coll'aiuto del principio di corrispondenza di CAYLEY-BRILL. La dimostrazione da noi esposta è in questo medesimo ordine di idee, ma, tenuto conto del significato funzionale del principio di corrispondenza, permette altresì di caratterizzare il gruppo dei punti k_i-pli ($i = 1, 2, \ldots, \rho$) pei gruppi della data g_n^r, come un gruppo covariante della serie stessa. Essa è dovuta ad R. TORELLI [Palermo Rend. 21, 58 (1905)]. Una dimostrazione della formula di JONQUIÈRES, ispirata a tutt'altro concetto, limitatamente a $p = 0$, trovasi in BORDIGA [Ann. di Mat. 27_3, 23 (1917)].

Un problema più generale, che comprende quello risoluto dalla formula di JONQUIÈRES, consiste nella determinazione del numero dei *gruppi neutri con elementi multipli* di una data g_n^r. Si tratta cioè di determinare il numeri dei gruppi costituiti da α_1 punti k_1-pli, da α_2 punti k_2-pli, .., da α_ρ punti k_ρ-pli, ove le k son diverse fra loro, ma una può anche essere eguale ad 1, che son *neutri di specie* q pei gruppi della g_n^r. Dicendo che un gruppo siffatto è neutro di specie q, intendiamo che ai gruppi della g_n^r che debbono contenerlo (con quelle tali molteplicità) esso offra $\Sigma\alpha_i k_i - q$ condizioni indipendenti (²).

Posto $\Sigma\alpha_i k_i - q - 1 = k$, $t = \Sigma\alpha_i$, affinchè il problema possegga un numero finito di soluzioni è *in generale* necessario e sufficiente che:

$$(r - k)\Sigma\alpha_i k_i - t = (k + 1)(r - k), \qquad n \geq r + q.$$

(¹) È questa la dimostrazione esposta nelle « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 187.

(²) A pag. 148 abbiamo considerato gruppi di s punti neutri di specie $s - 1$.

In particolare per $q = t$, $k = r - 1$ si ricade nel problema di JONQUIÈRES. Per le curve razionali la soluzione del problema generale trovasi in una Nota dell'Autore [Lincei Rend 9_5, 379 (1900)]; la formula risolutiva, sempre per $p = 0$, era stata prima scritta per induzione, nel caso di gruppi neutri *senza elementi multipli*, da F. MEYER (Apolarität und rationale Kurven, Tübingen, 1883, pag. 363) e da TANTURRI [Ann. di Mat. 4_3, 67 (1900)] e dimostrata più tardi dall'Autore [Lincei Rend. 11_5, 52 (1902)]. La formula generale, per p qualunque, non si conosce. In una Memoria dell'Autore [Torino Mem. 51_2, 97 (1902)] il problema è risolto in modo completo fino ad $r = 5$ ed è esposto un metodo per ottenerne la risoluzione per ogni valore di r. Nel caso di gruppi neutri privi di elementi multipli (che BRILL denomina *ausgezeichnete* gruppi, e che, nella interpretazione proiettiva della g_n^r, corrispondono agli spazi plurisecanti di una curva d'ordine n, genere p, dello spazio S_r) la formula generale è stata dal GIAMBELLI [Torino Mem. 59_2, 433 (1909)]. Formule che rientrano in questa erano state trovate prima, oltre che dall'Autore, nella citata Memoria, da BRILL-NOETHER [Math. Ann. 7, § 11 (1873)], BRILL [Math. Ann. 36, 321 (1890)], CASTELNUOVO [Lincei Rend. 5_4, 130 (1889); Palermo Rend. 3, 27 (1888)], ZEUTHEN [Math. Ann. 40, 118 (1892)], TANTURRI [Ann. di Mat. 4_3, 67 (1900); Torino Atti 39, 483 (1904)].

Un problema che ha stretta analogia con quello dei gruppi neutri, è stato risoluto da BRILL [Math. Ann. 36, 321 (1890)]: si tratta del numero dei gruppi comuni ad r corrispondenze fra r punti di una medesima curva. La questione è collegata alla determinazione dei gruppi di r punti comuni ad r serie lineari ∞^{r-1} sopra una curva, che è stata fatta dal COMESSATTI [Ist. Veneto Atti, 69, 871 (1910); 72, 1133 (1913)] e poi da GÖHNER (Tübingen Dissertation, 1913).

Tutti i problemi qui accennati saranno considerati in modo completo in un successivo volume, dedicato alla geometria numerativa.

81. **Numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una serie γ_m^1 (razionale o irrazionale) d'indice $\nu \geq 1$.** — La g_n^r e la serie irriducibile γ_m^1 sieno date sopra una curva C di genere p e sieno entrambe prive di punti fissi; $Z_{r,n}$ denoti il numero incognito. Sia P un punto generico di C, e Q indichi uno qualunque degli ulteriori $\nu(m-1)$ punti appartenenti ai ν gruppi di γ_m^1, che passan per P. Infine chiamiamo R uno qualunque degli ulteriori $n - r$ punti appartenenti al gruppo di g_n^r individuato da r punti Q di uno stesso gruppo di γ_m^1.

I punti P, Q si corrispondono in una corrispondenza simmetrica S, d'indici $\nu(m-1)$; e i punti P, R si corrispondono in una corrispondenza T di indici:

$$Z_{r-1,n-1}(m-r); \quad \nu\binom{m-1}{r}(n-r).$$

Invero, se P è dato, vi sono ν gruppi di $m-1$ punti Q, ciascun dei quali dà con P un gruppo della γ_m^1. Ognuno di tali gruppi di $m-1$ punti ha comuni r punti con $\binom{m-1}{r}$ gruppi della g_n^r, e ciascuno di questi ultimi gruppi contiene ulteriormente $n-r$ punti, i quali sono punti R omologhi di P. Viceversa, se è dato un punto R, vi sono $Z_{r-1,n-1}$ gruppi di r punti comuni alla γ_m^1 e alla serie g_{n-1}^{r-1} costituita dai gruppi di g_n^r passanti per R; e altrettanti sono i gruppi della γ_m^1 contenenti quei gruppi di r punti. Ognuno di tali gruppi della γ_m^1 contiene ulteriormente $m-r$ punti, che sono punti P corrispondenti al dato R.

Osserviamo ora che i $\nu\binom{m-1}{r}$ gruppi della g_n^r, definiti nel modo sopra indicato, dal punto P, contengono, oltre ai punti R omologhi di P, anche i punti Q, da contarsi ciascuno $\binom{m-2}{r-1}$ volte. Ciò significa che *la corrispondenza $T + \binom{m-2}{r-1}S$ è a valenza nulla*. Le coincidenze di tale corrispondenza sono date dai punti uniti di T e da quelli di S, contati, questi ultimi, $\binom{m-2}{r-1}$ volte (n. 79). Le coincidenze di T cadono in ciascuno dei punti costituenti i gruppi di $r+1$ punti comuni alle g_n^r, γ_m^1; onde il loro numero è $Z_{r,n}(r+1)$. Le coincidenze di S sono i d punti doppi della serie γ_m^1. Si ottiene così la relazione (n. 79):

$$(14) \qquad Z_{r-1,n-1}(m-r) + \nu\binom{m-1}{r}(n-r) + 2\nu(m-1)\binom{m-2}{r-1} =$$
$$= Z_{r,n}(r+1) + \binom{m-2}{r-1}d$$

ossia:

$$Z_{r-1,n-1}(m - r) + \nu\binom{m-1}{r}(n+r) = Z_{r,n}(r+1) + \binom{m-2}{r-1}d.$$

Poichè $Z_{0,n-1} = \nu(n-1)$, per $r = 1$ viene:

$$Z_{1,n} = n\nu(m-1) - \frac{1}{2}d.$$

Per $r=2$, tenuto conto del valore così ottenuto di $Z_{1,n-1}$, viene:

$$Z_{2,n} = n\nu\binom{m-1}{2} - \frac{1}{2}(m-2)\,d.$$

Proseguendo così per $r=3, 4, \ldots$, si arriva a indurre la formula di SCHUBERT:

$$Z_{r,n} = n\nu\binom{m-1}{r} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1}d, \tag{15}$$

la cui dimostrazione segue subito dalla (14), passando da r ad $r+1$.

In verità la formula di SCHUBERT si riferisce ad un caso un po' più generale, cioè al caso in cui i gruppi della γ^1_m son neutri per la g^r_n. Il gruppo generico di γ^1_m sia per la g^r_n neutro di specie $m-k-1$ $(1 \leq k+1 \leq r)$, ossia offra soltanto $k+1$ condizioni ai gruppi di g^r_n obbligati a contenerlo (pag. 249). Si può allora domandare il numero dei gruppi di γ^1_m che contengono gruppi di $k+1$ punti offrenti soltanto k condizioni ai gruppi di g^r_n. A questa domanda risponde la formula generale di SCHUBERT

La deduzione di tale formula dalla (15) è pressochè immediata. Si consideri all'uopo entro g^r_n una g^k_n, che non contenga parzialmente tutti i gruppi di γ^1_m. Ciò è sempre possibile, perchè i gruppi di g^r_n passanti per un generico gruppo di γ^1_m, formano una g^{r-k-1}_n; e dentro alla g^r_n si può sempre fissare una g^k_n, che non abbia alcun gruppo comune colla predetta g^{r-k-1}_n. La g^k_n così fissata non può allora contenere che un numero finito di gruppi della serie *irriducibile* γ^1_m. Sia μ questo numero, e z denoti il numero di quei gruppi di γ^1_m, ognun dei quali contiene gruppi di $k+1$ punti offrenti soltanto k condizioni ai gruppi di g^r_n. Questi gruppi di $k+1$ punti sono evidentemente contenuti nel numero $Z_{k,n}$ [dato dalla (15) per $r=k$] dei gruppi di $k+1$ punti comuni alle serie g^k_n, γ^1_m. Un ulteriore contributo a tal numero è dato dai μ gruppi di m punti comuni alle g^k_n, γ^1_m, giacchè ognuno di questi fornisce $\binom{m}{k+1}$ gruppi di $k+1$ punti comuni alle serie suddette.

Viene perciò:

$$Z_{k,n} = \binom{m}{k+1}\mu + z, \tag{16}$$

e quindi:

$$\binom{m}{k+1}\mu + z = n\nu\binom{m-1}{k} - \frac{1}{2}\binom{m-2}{k-1}d; \tag{17}$$

e questa è la *formula di* SCHUBERT.

Il caso $k=m-1$ abbisogna di una speciale trattazione, perchè tra i gruppi comuni alle serie g^k_n, γ^1_m, il cui numero si è indicato con μ, son altresì compresi gli z gruppi Γ della serie γ^1_m, i cui $k+1$ $(=m)$ punti offrono $k(=m-1)$ condizioni ai gruppi di g^r_n. E invero i gruppi di g^r_n contenenti un gruppo Γ formano una g^{r-m+1}_n, che ha un gruppo comune colla g^{m-1}_n considerata.

Nel caso in esame la relazione (16) dovrebbe pertanto esser sostituita colla $Z_{m-1,n} = \mu$. Ma possiamo continuare a tener valida la (16), purchè μ denoti il numero dei gruppi H di m punti comuni alle g^{m-1}_n, γ^1_m e che presentano m (e non meno) condizioni ai gruppi di g^r_n. Si osserverà che questi gruppi H variano nella γ^1_m, al variare della g^{m-1}_n, mentre i gruppi Γ son fissi.

Riassumendo, *il significato dei simboli, che compajono nella formula* (17) *di* SCHUBERT, *è il seguente*:

n denota l'ordine di una g^r_n su C;

m l'ordine di una γ^1_m d'indice ν su C;

d il numero dei punti doppi della γ^1_m;

$k+1$ $(\leq r$ e $\geq 1)$ il numero delle condizioni che un generico gruppo della γ^1_m presenta ai gruppi di g^r_n obbligati a contenerlo;

μ il numero dei gruppi di m punti comuni alla γ^1_m e ad una generica g^k_n scelta entro g^r_n (ovvero, per $k=m-1$, il numero dei gruppi comuni alle serie γ^1_m e g^k_n, i quali presentano m, e non meno, condizioni ai gruppi di g^r_n).

z il numero dei gruppi di γ^1_m, ognun dei quali contiene $k+1$ punti presentanti soltanto k condizioni ai gruppi di g^r_n.

La formula (17), dovuta come si è detto a SCHUBERT, trovasi pubblicata per la prima volta in SEGRE [Lincei Rend. 3_4, 149, 1887; Introduzione, n. 50]. Ivi la formula è ottenuta col procedimento originario di SCHUBERT, che poggia sul principio di corrispondenza di CHASLES. La dimostrazione esposta sopra è dell'Autore [Padova Atti 24, 137 (1908)]. La formula stessa, sotto la forma particolare (15), e più specialmente nel caso in cui la γ^1_m

è una g_m^1 [nel qual caso è stata dipoi dedotta da CASTELNUOVO, dalla formula (16) del n. 37, in Torino Atti, 24, 346 (1889)] è di fondamentale importanza nella trattazione iperspaziale della geometria sopra una curva, di cui ci occuperemo nel successivo Capitolo. Un'altra dimostrazione della formula che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una γ_m^1, poggiata però sull'ipotesi che il numero in questione non si alteri quando le serie date variino in sistemi continui di serie ad esse analoghe, trovasi in ENRIQUES [Lincei Rend. 28_5, 370 (1919); ENRIQUES-CHISINI, III, pp. 75, 481]. CASTELNUOVO ha esteso la formula, anch'egli sulla base del principio della conservazione del numero [Palermo Rend. 3, 27 (1889)], al caso in cui si vogliano i gruppi di $r+s$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g_m^s. E infine R. TORELLI [Ist. Veneto Atti, 67, 1323 (1908)] l'ha ulteriormente estesa, cercando i gruppi di $r+s$ punti comuni ad una serie algebrica ∞^r e ad una serie lineare ∞^s. Il risultato del TORELLI è ottenuto col principio di corrispondenza di CAYLEY-BRILL.

82. **Criterio numerativo per riconoscere se una serie γ_m^1, d'indice $\nu \geq 1$, è costituita da gruppi equivalenti.** — La formula di ZEUTHEN (pag. 209) fornisce già un criterio numerativo per riconoscere quando una γ_m^1 d'indice $\nu = 1$ (ossia un'involuzione), data sopra una curva C, di genere p, è costituita da gruppi equivalenti (cioè si riduce ad una g_m^1). Detto infatti d il numero dei punti doppi della data involuzione e π il suo genere, si ha:

$$d = 2(m+p-1) - 2m\pi,$$

ovvero:

$$d \leq 2(m+p-1);$$

il segno $=$ valendo allora e solo allora che sia $\pi = 0$ e quindi che la γ_m^1 riducasi ad una g_m^1 (pag. 51).

Un criterio analogo vale per una γ_m^1 d'indice $\nu > 1$, data sopra C, e si enuncia così:

Il numero dei punti doppi di una serie (irriducibile) ∞^1, d'indice ν, di gruppi di m punti, data sopra una curva di genere p, non supera $2\nu(m+p-1)$, ed il massimo è raggiunto allora e solo allora che i gruppi della serie sieno equivalenti.

Per dimostrarlo, assumasi su C una g_{m-1+p}^{m-1} non speciale (completa), la quale non contenga parzialmente la data γ_m^1. Ciò è sempre possibile: basta all'uopo individuare la g_{m-1+p}^{m-1} mediante un gruppo di $m-1+p$ punti, formato con $m-1$ punti di un prefissato gruppo Γ della γ_m^1 e con p altri punti generici. Si è allora sicuri che per Γ (e quindi anche per un generico gruppo della γ_m^1) non passa alcun gruppo della g_{m-1+p}^{m-1}.

Pertanto è finito il numero z dei gruppi della γ_m^1 che appartengono (parzialmente) alla g_{m-1+p}^{m-1}. Tale numero è dato dalla (15), nella quale si ponga $n = m-1+p$, $r = m-1$. Viene così:

$$z = \nu(m+p-1) - \frac{1}{2}d,$$

cioè:

(18) $$d = 2\nu(m+p-1) - 2z;$$

e poichè $z \geq 0$, risulta

(19) $$d \leq 2\nu(m+p-1).$$

La prima parte del teorema è dimostrata. Resta da provare che quando nella (19) vale il segno $=$, la γ_m^1 è costituita da gruppi equivalenti.

Se nella (19) vale il segno $=$, sarà $z = 0$, e perciò una generica g_{m-1+p}^{m-1} non contiene alcun gruppo della γ_m^1. Ne consegue che una g_{m-1+p}^{m-1} che contenga un gruppo di γ_m^1, li contiene tutti.

Ciò posto, consideriamo un gruppo Γ di γ_m^1 e un gruppo G di p punti generici $a_1, a_2, \ldots, a_p$ della curva C. La serie g_{m+p}^m, individuata da $G+\Gamma$, possiede la proprietà che la serie residua g_{m-1+p}^{m-1} del punto a_i, contiene Γ, epperò ogni altro gruppo della γ_m^1. In altri termini, i resti dei gruppi della γ_m^1 rispetto alla g_{m+p}^p, passano per tutti per a_i. Poichè ciò vale per $i = 1, 2, \ldots, p$, ne deriva che quei resti riduconsi al gruppo G, e pertanto i gruppi di γ_m^1 appartengono (totalmente) alla g_m residua di G rispetto a g_{m+p}^m.

Viceversa, se γ_m^1 è costituita da gruppi equivalenti, pel teorema del resto, ogni g_{m-1+p}^{m-1} che contenga un gruppo di γ_m^1, li contiene tutti. Pertanto, costruita, com'è sempre possibile, una g_{m-1+p}^{m-1} che non contenga un prefissato gruppo di γ_m^1, essa non ne conterrà alcuno, e risulterà quindi $z = 0$, cioè $d = 2\nu(m+p-1)$.

Il numero z si chiama *difetto di equivalenza* della serie γ_m^1, perchè appunto è nullo quando i gruppi della serie son equivalenti.

OSSERVAZIONE 1ª. — Risulta dal procedimento dimostrativo della (18), che d, più che il numero dei punti doppi della serie, denota il *numero dei gruppi dotati di punto doppio*; numero che è generalmente eguale al precedente, perchè un punto doppio per un gruppo non è in generale doppio per altri.

Osservazione 2ª. — Se la serie γ_m^1 è *riducibile*, cioè se essa si spezza in più serie riducibili di ordine m e di indici $\nu', \nu'', \ldots$, con $\nu = \nu' + \nu'' + \ldots$, il numero dei suoi punti doppi ammette ancora come massimo $2\nu(m+p-1)$, ed il massimo è raggiunto allora e solo allora che ognuna delle serie componenti sia costituita da gruppi equivalenti. Designati invero con $z', z'', \ldots$ i difetti di equivalenza delle serie componenti e con $d', d'', \ldots$ i rispettivi numeri di punti doppi, avremo:

$$d' = 2\nu'(m+p-1) - 2z', \quad d'' = 2\nu''(m+p-1) - 2z'', \ldots;$$

donde:

$$d = d' + d'' + \ldots = 2\nu(m+p-1) - 2(z' + z'' + \ldots),$$

sicchè risulta:

$$z = z' + z'' + \ldots,$$

com'è del resto evidente a priori, attesa la definizione geometrica del difetto di equivalenza di una serie.

La relazione:

$$d = 2\nu(m+p-1) - 2z$$

vale dunque anche nel caso di una serie riducibile, e d raggiunge il massimo quando $z=0$, ossia quando $z'=0, z''=0, \ldots$.

Osservazione 3ª. — Corollario immediato del teorema stabilito in questo n. è il seguente:

Avendosi sopra una curva C una serie algebrica γ_m^1, di indice ν, la quale goda della proprietà che l'insieme dei gruppi della serie passanti per un punto generico x di C, costituisca un gruppo di $m\nu$ punti (tra i quali il punto x, contato ν volte), che, al variare di x, si muova in una serie lineare d'ordine $m\nu$, i gruppi della γ_m^1 sono tra loro equivalenti.

E infatti, chiamando omologhi due punti x, y di C, che appartengano ad uno stesso gruppo della γ_m^1, si ha fra i punti di C una corrispondenza simmetrica, di indici $\nu(m-1)$, la quale è manifestamente dotata di valenza ν. I suoi punti uniti sono i d punti doppi della serie; onde:

$$d = 2\nu(m-1) + 2\nu p = 2\nu(m+p-1),$$

eppertanto i gruppi della serie γ_m^1 (che può anche esser riducibile, in virtù dell'Oss. 2ª) risultano equivalenti.

Osservazione 4ª. — Un'altra conseguenza del teorema dimostrato è la seguente:

Se sopra una curva C si ha una semplice infinità algebrica di gruppi di n punti, tale che i multipli secondo k di questi gruppi sieno equivalenti, i gruppi stessi risultano equivalenti.

Sia Σ la semplice infinità di gruppi G. Chiamati omologhi di un punto x di C gli ulteriori punti y appartenenti ai $\nu(\geq 1)$ gruppi G per x, fra i punti x, y si ha una corrispondenza simmetrica T, di indici $\nu(n-1)$. E, per l'ipotesi del teorema, la corrispondenza kT ha la valenza $k\nu$. Ne segue che kT possiede $2k\nu(n+p-1)$ punti uniti, i quali cadono nei punti uniti di T, ognuno contato k volte. Dunque T ha $2\nu(n+p-1)$ punti uniti, eppertanto i gruppi G son equivalenti.

In base all'Oss. 2ª, la serie Σ può anche esser riducibile. Dalla proposizione precedente scende poi il corollario:

Se fra i punti d'una curva C intercede una corrispondenza T, tale che kT abbia la valenza $k\gamma$, allora T avrà la valenza γ.

La proprietà, per $\gamma = 0$, riducesi senz'altro alla precedente. Suppongasi $\gamma > 0$. E dicasi Y il gruppo dei β punti y corrispondenti a un dato punto a di C, mediante T. Allora il gruppo $kY + k\gamma a$ varia in una serie lineare; epperò altrettanto accade del gruppo $Y + \gamma a$. Ciò significa che T è a valenza γ.

Se infine γ è negativa ($\gamma = -\gamma'$, con $\gamma' > 0$) costruiscasi una corrispondenza S, tale che $S + T$ sia a valenza zero (pag. 229): allora la corrispondenza $kT + kS$ è pure a valenza zero, e poichè kT ha la valenza $-k\gamma'$, kS avrà la valenza $k\gamma'$. Onde S avrà la valenza γ', e quindi T avrà la valenza γ.

Osservazione 5ª. — La formula di Zeuthen scritta sotto la forma $d = 2(m+p-1) - 2m\pi$, come abbiamo fatto al principio di questo n., ci prova che *il difetto di equivalenza di un'involuzione di ordine m e di genere π è eguale ad $m\pi$.*

83. Determinazione del primo indice della corrispondenza complementare d'una data. — Nel n. 75 abbiamo introdotto il concetto di corrispondenza complementare S di una data corrispondenza T, di indici α, β, sopra una curva di genere p, ed abbiamo lasciato in sospeso la determinazione del primo indice α' di S, il cui secondo indice è p.

Ora ci proponiamo di determinare α', ed anzi di eseguire tale determinazione nell'ipotesi in cui la data corrispondenza

$T(\alpha, \beta)$, intercede fra due curve distinte C_1, C_2, di generi p_1, p_2; giacchè è ovvio che, anche in questo caso più generale, può introdursi la nozione di corrispondenza complementare S di T. Basta all'uopo fissare su C_2 una generica $g^{\beta}_{\beta+p_2}$, ed associare ad ogni punto x di C_1 il resto del gruppo Y, omologo di x in T, rispetto a quella $g^{\beta}_{\beta+p_2}$. Si fa così corrispondere ad x, mediante S, un gruppo G *non speciale* di p_2 punti di C_2; mentre ad un generico punto y di C_2 risponderà su C_1, mediante la corrispondenza S^{-1}, un certo numero α' di punti x.

È appena necessario di avvertire che un'altra corrispondenza complementare, Σ, può definirsi mutando le veci delle due curve: essa farà corrispondere ad un generico punto di C_2 un gruppo non speciale di p_1 punti di C_1, e, ad un punto di questa curva, β' punti di C_2. In tal caso vi sarà da determinare il *secondo* indice β'.

La corrispondenza S è variabile in un sistema continuo ∞^{p_2}, come le $g^{\beta}_{\beta+p_2}$ di C_2; e similmente Σ è variabile in un sistema continuo ∞^{p_1}.

Tutto ciò premesso, dimostriamo che:

Il primo indice α' della corrispondenza complementare di una, T, di indici α, β, data fra le curve C_1, C_2, distinte o sovrapposte, vale $\frac{\alpha}{\alpha_0}z$, ove α_0, z denotano rispettivamente l'indice e il difetto di equivalenza della serie dei gruppi Y di C_2, che corrispondono, mediante T, ai punti di C_1.

Suppongasi anzitutto che la corrispondenza T^{-1} non sia composta (pag. 216), cioè che la corrispondenza fra il punto x variabile su C_1 ed il gruppo Y dei β punti y ad esso omologhi in T, sia birazionale. Allora l'indice α_0 della serie degli Y eguaglia α; e, poichè i gruppi Y corrispondono birazionalmente ai gruppi non speciali G, di p_2 punti, omologhi di x in S, un determinato gruppo G proverrà, esso pure, da un sol punto x, onde non sarà composta neppure la corrispondenza S^{-1}, e l'indice α' di S eguaglierà l'indice della serie dei gruppi G.

Ora ognuno dei G passanti per un generico punto y di C_2, insieme al corrispondente gruppo Y, dà un gruppo, passante per y, della serie $g^{\beta-1}_{\beta-1+p_2}$ residua di y rispetto alla suddetta $g^{\beta}_{\beta+p_2}$. E viceversa, ad ogni gruppo Y contenuto in quella serie residua, corrisponde un G passante per y. Dunque i G

passanti per y son tanti quanti gli Y comuni alla serie degli Y e alla considerata $g^{\beta-1}_{\beta-1+p_2}$; e ciò dimostra il teorema.

Nel caso in cui la corrispondenza T^{-1} è composta con un'involuzione γ^1_μ, sicchè $\alpha = \alpha_0\mu$, anche la S^{-1} risulta evidentemente composta colla medesima involuzione. L'indice della serie dei gruppi G sarà ancora eguale al difetto d'equivalenza z della serie degli Y, ma l'indice α' di S si otterrà invece moltiplicando per μ l'indice della serie dei G; cioè risulterà $\alpha' = \mu z$, come si voleva provare.

Osservazione. — È facile verificare che il secondo indice β' della corrispondenza complementare Σ, sopra definita, eguaglia α'. Invero, denotati con d', d i numeri dei punti doppi della corrispondenza situati rispettivamente su C_1, C_2, e supposto che la corrispondenza (α, β) sia composta su C_1 con un'involuzione $\gamma^1_\mu (\mu \geq 1)$ e su C_2 con un'involuzione $\gamma^1_{\mu'} (\mu' \geq 1)$, viene (n. 68):

$$\alpha = \mu\alpha_0, \quad \beta = \mu'\beta_0, \quad \alpha' = \mu z, \quad \beta' = \mu' z',$$

$$2\mu'\beta_0(p_1 - 1) + \mu d = 2\mu\alpha_0(p_2 - 1) + \mu' d',$$

ove α_0, β_0 son gl'indici e z, z' i difetti d'equivalenza rispettivi delle serie dei gruppi Y, X corrispondenti ai punti di C_1, C_2 nelle T, T^{-1}.

L'ultima delle precedenti relazioni si può anche scrivere:

$$2\mu'\beta_0(\alpha + p_1 - 1) - \mu' d' = 2\mu\alpha_0(\beta + p_2 - 1) - \mu d,$$

e poichè (n. 82):

$$2z = 2\alpha_0(\beta + p_2 - 1) - d, \quad 2z' = 2\beta_0(\alpha + p_1 - 1) - d',$$

ne segue $\mu' z' = \mu z$, cioè $\beta' = \alpha'$.

84. **Grado di una corrispondenza.** — Oltre ai caratteri considerati finora, si può, per una corrispondenza T, fra due curve C_1, C_2, introdurne un altro assai importante, il quale diviene particolarmente significativo allorchè la corrispondenza s'interpreta come una curva sulla superficie F delle coppie di punti di C_1, C_2 (pag. 194). Vogliamo alludere al *grado* della corrispondenza, che noi qui considereremo limitatamente al campo della geometria sopra una curva, riservandoci di ritornare su di esso in altro volume del Trattato, quando ci occuperemo della geometria sopra una superficie.

A pag. 226 abbiamo osservato che una corrispondenza T a valenza zero, sopra una curva, appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze analoghe, aventi gli stessi indici. Il ragionamento e la conclusione valgono anche se la corrispondenza intercede fra due curve distinte.

Indicheremo con $\{T\}$ il sistema continuo cui appartiene T. Se α, β son gl'indici di T, e T_1 è un'altra corrispondenza di $\{T\}$, il numero delle coppie comuni a T, T_1, cioè il numero dei punti uniti della corrispondenza a valenza zero TT_1^{-1}, si conserva costante, mentre T, T_1 variano del sistema $\{T\}$ (pag. 226), ed è eguale a $2\alpha\beta$, somma degli indici di TT_1^{-1}. Designeremo questo numero col simbolo $[TT_1]$ e lo chiameremo il *grado* della corrispondenza T (e di tutte le corrispondenze del medesimo sistema continuo).

Ricorrendo alle curve T, T_1, che rappresentano le considerate corrispondenze sulla superficie F (priva di punti multipli e di curve eccezionali), il grado di T s'interpreta come il numero dei punti comuni alla curva T e ad un'altra curva variabile nel sistema continuo $\{T\}$.

In particolare, quando T_1 tende a T, al limite si hanno le coppie comuni alla T e ad una corrispondenza infinitamente vicina. Pertanto il grado di T s'indicherà altresì col simbolo $[TT]$ od anche $[T^2]$.

Le stesse cose valgono anche se T non è a valenza zero, purchè però si sappia che esiste un sistema continuo $\{T\}$, in cui la data corrispondenza sia suscettibile di variare (cfr. colla pag. 230).

Però, mentre quando T è a valenza zero, il suo grado si esprime senz'altro mediante gl'indici (è eguale a $2\alpha\beta$), non altrettanto accade, come vedremo, se T non è a valenza zero.

In verità può darsi che fra le coppie comuni alla T e ad un'altra corrispondenza T_1, variabile nel sistema continuo $\{T\}$, ve ne siano di fisse; cioè che, sulla superficie F, il sistema continuo $\{T\}$ abbia qualche punto base.

Di queste coppie fisse può a volontà tenersi o no conto. S'esse s'escludon dal computo, si viene a considerar soltanto le coppie *variabili* comuni alle T, T_1, ed il loro numero chiamasi il *grado effettivo* di T. Se invece s'includono, si ha il *grado virtuale* di T. Nel seguito noi ci riferiremo di regola, salvo avviso in contrario, al grado virtuale.

Ci converrà anzitutto di estendere la nozione di grado di una corrispondenza, definendo per ogni corrispondenza, anche *isolata* (cioè non suscettibile di variare in un sistema continuo) il ***grado virtuale***: grado che coincide con quello già definito, quando la corrispondenza possa variare con continuità.

Sia dunque T una corrispondenza qualunque fra le due curve C_1, C_2, di generi p_1, p_2. E sia S una corrispondenza tale che $W=T+S$ risulti a valenza zero: p. es. la corrispondenza complementare di T, costruita sulla curva C_2 (n. 83).

Se T è variabile in un sistema continuo $\{T\}$, presa una corrispondenza T_1 di questo, diversa da T, si ha:

$$[WT_1]=[TT_1]+[ST_1],$$

e poichè i tre numeri che compajono nella precedente relazione, essendo eguali ai numeri dei punti uniti delle corrispondenze WT_1^{-1}, TT_1^{-1}, ST_1^{-1}, non s'alterano al variare continuo di tali corrispondenze (pag. 230), così potremo scrivere

$$[T^2]=[WT]-[ST] \text{ (1)}.$$

Ebbene, questa relazione si assumerà come definizione del grado virtuale $[T^2]$ di T, quando T è isolata. Ma perchè tale definizione sia legittima, occorre provare che il numero $[T^2]$ dipende soltanto da T e non da S; cioè che, presa un'altra corrispondenza S_0, tale che $W_0=T+S_0$ sia a valenza zero, risulta:

$$[WT]-[ST]=[W_0T]-[S_0T].$$

E invero, dalle

$$W=T+S, \quad T+S_0=W_0,$$

sommando a membro a membro, segue:

$$W+S_0=W_0+S,$$

e quindi:

$$[WT]+[S_0T]=[W_0T]+[ST],$$

che equivale alla relazione da dimostrarsi.

(1) In verità il simbolo $[WT]$, preso alla lettera, rappresenta il numero dei punti uniti della corrispondenza WT^{-1}, la quale, scindendosi nella somma $TT^{-1}+ST^{-1}$, ha infinite coincidenze. S'intenderà dunque che $[WT]$ denoti il numero delle coppie comuni a T e ad una corrispondenza generica del sistema $\{W\}$.

Se due corrispondenze T, T', fra le curve C_1, C_2, hanno i gradi virtuali n, n', ed è i il numero delle coppie comuni alle due corrispondenze, il grado virtuale di $T+T'$ è:

$$n+n'+2i.$$

Si ha cioè la relazione simbolica

$$[(T+T')^2]=[T^2]+[T'^2]+2[TT'],$$

analoga a quella che dà il quadrato della somma di due numeri.

La cosa è ovvia, quando T, T' non sono isolate. Dette infatti T_1, T_1' due corrispondenze dei loro sistemi continui, viene:

$$[(T+T')^2]=[(T+T')(T_1+T_1')]=[TT_1]+[TT_1']+[T_1T']+[T'T_1'],$$

donde, tenuto conto che:

$$[T_1T]=[T^2],\quad [T'T_1']=[T'^2],\quad [TT_1']=[T_1T']=[TT'],$$

deriva la relazione da dimostrarsi.

Qualora una delle T, T' od ambedue sieno isolate, si determineranno le corrispondenze S, S' tali che $W=T+S$, $W'=T'+S'$ sieno a valenza zero. Risulterà allora a valenza zero anche la $W''=W+W'=T''+S''$, ove si è posto $T''=T+T'$, $S''=S+S'$; e quindi il grado virtuale di T'' verrà espresso da $[W''T'']-[S''T'']$. Ora:

$$[W''T'']=[WT'']+[W'T'']=[WT]+[WT']+[W'T]+[W'T'],$$

e similmente:

$$[S''T'']=[ST]+[ST']+[S'T]+[S'T'],$$

onde:

$$[T''^2]=[WT]-[ST]+[W'T']-[S'T']+[WT']-[ST']+[W'T]-[S'T].$$

E siccome infine:

$$[WT]-[ST]=[T^2],\quad [W'T']-[S'T']=[T'^2],$$
$$[WT']=[TT']+[ST'],\quad [W'T]=[TT']+[S'T],$$

così ne segue la relazione da dimostrarsi.

Il grado virtuale (ed anche il grado effettivo) di una corrispondenza suscettibile di variare con continuità è evidentemente ≥ 0; così come è ≥ 0 il numero dei punti fissi e di quelli variabili comuni a due curve di F, variabili nello stesso sistema continuo. Quando il numero dei punti variabili, comuni a due tali curve, sia zero, per un punto generico di F non potrà passare che una curva del sistema, che sarà dunque un *fascio razionale* o *irrazionale* (pag. 195).

Così ad es. hanno grado nullo (effettivo = virtuale) le corrispondenze degeneri elementari K_x, L_y (pag. 195).

Quando la corrispondenza sia isolata, il grado virtuale può anche risultar negativo: del che vedremo tosto esempi.

Per trovar l'espressione del grado virtuale di una corrispondenza, in funzione degli indici α, β e di quegli altri caratteri che occorra considerare, conviene premettere due lemma. Il primo è questo:

Se sopra una curva C, di genere p, si consideran due serie ∞^1, γ^1_m, $\gamma^1_{m'}$, riferite birazionalmente gruppo a gruppo, per guisa che la somma di due gruppi omologhi varii in una serie lineare (d'ordine $m+m'$), esse hanno lo stesso difetto di equivalenza (¹).

Poichè la proprietà è verificata quando i difetti d'equivalenza delle serie date sieno nulli, supponiamo p. es. che la γ^1_m abbia un difetto d'equivalenza >0. Fissato un generico gruppo A di $m-1+p$ punti, sia G un gruppo di γ^1_m contenuto parzialmente nella g^{m-1}_{m-1+p} individuata da A; G' il gruppo omologo di $\gamma^1_{m'}$, $|L|$ la serie che contiene le somme dei gruppi omologhi di γ^1_m, $\gamma^1_{m'}$; E un gruppo di $p-1$ punti residuo di G rispetto ad $|A|$; E' un residuo di E rispetto alla serie canonica $|K|$. Sussistono allora le:

$$G+E\equiv A,\quad G+G'\equiv L,\quad E+E'\equiv K,$$

ed eliminando fra esse G ed E:

$$G'+E'\equiv K+L-A.$$

Sicchè ad ogni gruppo di γ^1_m contenuto nella data g^{m-1}_{m-1+p}, corrisponde un gruppo di $\gamma^1_{m'}$, contenuto nella serie $g^{m'-1}_{m'-1+p}$ indi-

(¹) Cfr. R. TORELLI [Acc. Napoli Rend., 17_3, 413 (1911)].

viduata da un gruppo A' equivalente a $K+L-A$. E poichè la serie $|K+L-A|$ è indipendente dal gruppo G considerato, comune a γ^1_m e ad $|A|$, e d'altra parte le veci delle due serie γ^1_m, $\gamma^1_{m'}$ posson essere scambiate, tanti saranno i gruppi comuni a γ^1_m e ad $|A|$, quanti i gruppi comuni a $\gamma^1_{m'}$ e ad $|A'|$.

Il secondo lemma cui alludevamo è il seguente:

Il prodotto di due corrispondenze T, S, di cui l'una a valenza zero, fra due curve C_1, C_2, è a valenza zero.

Sia S a valenza zero e sieno $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ gli omologhi su C_2 di un punto x di C_1, rispetto a T; $X_1, X_2, \ldots, X_\beta$ i gruppi degli omologhi su C_1 dei predetti punti di C_2, nella S. Poichè, variando y su C_2, il gruppo X, omologo in S, varia entro una serie lineare $|A|$, al muoversi di x su C_1, il gruppo $X_1+X_2+\ldots+X_\beta$, che è l'omologo di x nella TS, varia nella serie $|\beta A|$. Onde TS è a valenza zero.

Siccome S^{-1} è altresì a valenza zero (n. 63), risulta a valenza zero il prodotto $T^{-1}S^{-1}$, e quindi la sua inversa ST. Pertanto il prodotto è a valenza zero, in qualunque ordine lo si faccia.

Dimostriamo infine che:

Il grado virtuale d'una corrispondenza T, d'indici α, β, fra due curve C_1, C_2, è espresso da $2(\alpha\beta-\alpha')$ o da $2(\alpha\beta-\beta')$, ove α', β' son rispettivamente il primo od il secondo indice della corrispondenza complementare di T costruita su C_2 o su C_1.

Sia $S(\alpha', p_2)$ la corrispondenza complementare di T sulla C_2 (n. 83); e suppongasi inoltre, per generalità, che la corrispondenza data sia composta con un'involuzione γ^1_μ $(\mu \geq 1)$ su C_1 e con una $\gamma^1_{\mu'}$ $(\mu' \geq 1)$ su C_2; cosicchè, conservando le notazioni del n. 83:

$$\alpha = \mu\alpha_0, \quad \beta = \mu'\beta_0, \quad \alpha' = \mu z.$$

La corrispondenza $W = T+S$, di indici $(\alpha+\alpha', \ \beta+p_2)$ è a valenza zero e il grado di T è espresso da:

$$[T^2] = [WT] - [ST].$$

Il numero $[WT]$ è il numero dei punti uniti della corrispondenza WT^{-1} o meglio della corrispondenza W_1T^{-1}, ove W_1 sia una generica corrispondenza del sistema continuo cui appartiene W (cfr. colla nota a piè della pag. 261).

Poichè la W_1T^{-1}, pel secondo lemma, è a valenza zero, risulterà:

$$[WT] = \alpha(\beta+p_2) + \beta(\alpha+\alpha').$$

Calcoliamo $[ST]$. Designamo all'uopo con d_1 il numero dei punti doppi della serie dei gruppi Y corrispondenti mediante T ai punti di C_1; con d_2 il numero dei punti doppi della serie dei gruppi G corrispondenti mediante S ai punti di C_1; e infine con d il numero dei punti doppi della serie dei gruppi $Y+G$. Tenuto presente che, a norma del primo lemma, le due serie degli Y e dei G hanno lo stesso difetto d'equivalenza z, e tenute altresì presenti le considerazioni del n. 68, viene:

$$\mu d = \mu d_1 + \mu d_2 + 2[ST],$$
$$d = 2(\alpha_0+z)(\beta+2p_2-1), \quad d_1 = 2\alpha_0(\beta+p_2-1) - 2z,$$
$$d_2 = 2z(2p_2-1) - 2z,$$

e quindi:

$$[ST] = \mu\alpha_0 p_2 + \mu z(\beta+2) = \alpha p_2 + \alpha'(\beta+2).$$

Risulta perciò:

$$[T^2] = \{\alpha(\beta+p_2) + \beta(\alpha+\alpha')\} - \{\alpha p_2 + \alpha'(\beta+2)\} = 2(\alpha\beta-\alpha').$$

Similmente si trova:

$$[T^2] = 2(\alpha\beta-\beta'),$$

e quindi se ne trae di nuovo $\alpha'=\beta'$, conformemente al n. 83, Oss.

Giova anche sottolineare il risultato sotto quest'altra forma:

Il grado virtuale di T è espresso da $2(\alpha\beta-\mu z)$ ovvero da $2(\alpha\beta-\mu' z')$, ove z, z' sono i difetti d'equivalenza delle serie degli omologhi dei punti di C_1, C_2, e $\mu(\geq 1)$, $\mu'(\geq 1)$ gli ordini delle involuzioni con cui la data corrispondenza è composta, rispettivamente su C_1, C_2.

Poichè μz è di sua natura un numero positivo o nullo, ed è nullo soltanto allora che la serie degli omologhi dei punti di C_1 sia costituita da gruppi equivalenti, cioè la corrispondenza T sia a valenza zero, potremo dire che:

Il grado virtuale di una corrispondenza d'indici α, β, fra due curve, non supera $2\alpha\beta$, ed il massimo è raggiunto allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero.

Osservazione. — Per eliminare qualche disarmonia di linguaggio e di calcolo nell'uso dei simboli delle corrispondenze, conviene introdurre la nozione di *corrispondenze virtuali* (curve virtuali sulla solita superficie delle coppie di punti di C_1, C_2) analoga a quella di gruppi virtuali, introdotta a pag. 109.

Se T, S son due corrispondenze fra C_1, C_2, di cui la prima contenga parzialmente la seconda, nel senso che fra gli omologhi in T di un punto variabile su C_1, compajono gli omologhi in S dello stesso punto (e quindi fra gli omologhi in T^{-1} di un punto di C_2, compajono gli omologhi in S^{-1} dello stesso punto), si può considerare la *differenza* $R = T - S$ delle due corrispondenze. Essa gode della proprietà che $R + S = T$.

Qualora T non contenga S, la differenza $T - S$ si può considerare come un simbolo operativo, che, applicato ad una corrispondenza qualunque Q, contenente S, conduce alla corrispondenza $(Q - S) + T$. Si dirà che $T - S$ è una corrispondenza *virtuale* (che diventa *effettiva* quando T contiene S).

In particolare, quando $T = S$, la $T - S$ è la *corrispondenza zero.*

Definito come *grado virtuale della corrispondenza virtuale* $R = T - S$, l'espressione $[T^2] + [S^2] - 2[ST]$, quale si avrebbe (pag. 262) se R fosse effettiva, si prova agevolmente, sul fondamento di ciò che precede in questo n., che pel grado della somma di due corrispondenze vale la formula data a pag. 262, anche se una o ambedue le corrispondenze son virtuali.

La disuguaglianza $u \leq 2\alpha\beta$ *fra il grado e gl'indici di una corrispondenza effettiva, vale anche se la corrispondenza è virtuale.*

Per provarlo, si osservi anzitutto che una, p. es. S, delle due corrispondenze effettive T, S, mediante cui si definisce per differenza la corrispondenza virtuale $R = T - S$, si può sempre supporre a valenza zero. Basta all'uopo determinare una corrispondenza effettiva S' tale che $S + S'$ sia a valenza zero (p. es. la corrispondenza complementare di S), perchè risulti $R = (T + S') - (S + S')$.

Ciò posto, sieno (α, β), (α', β') gl'indici di T, S ed α_0, β_0 gl'indici di R, cosicchè risulta

$$\alpha_0 = \alpha - \alpha', \quad \beta_0 = \beta - \beta'.$$

Pei gradi di T, S valgono le

$$[T^2] \leq 2\alpha\beta, \quad [S^2] = 2\alpha'\beta',$$

e inoltre il numero delle coppie comuni alle T, S, cioè il numero dei punti uniti della corrispondenza TS^{-1}, che è a valenza zero (pag. 264), eguaglia $\alpha\beta' + \alpha'\beta$. Dunque:

$$[R^2] = [T^2] + [S^2] - 2[TS] \leq 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta' - 2(\alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

cioè:

$$[R^2] \leq 2\alpha_0\beta_0.$$

Se in questa vale il segno $=$, dovrà essere $[T^2] = 2\alpha\beta$, e quindi la corrispondenza T risulterà a valenza zero, come la S; *eppertanto sarà a valenza zero la* $R = T - S$.

85. Genere di una corrispondenza. — Data una corrispondenza irriducibile T, di indici α, β, fra due curve C_1, C_2, c'è da considerare il *genere* (effettivo) π dell'ente ∞^1 costituito dalle coppie di punti omologhi in T, cioè il genere della curva imagine di T sulla superficie F delle coppie di punti di C_1, C_2.

Quando tale curva sia priva di punti multipli (sulla superficie F, pur essa priva di punti multipli) il genere effettivo π si chiamerà altresì *genere virtuale* della T o della sua curva imagine. Il significato dei punti multipli della curva imagine, nei riguardi della corrispondenza, è stato già illustrato a pag. 212. Nel caso in cui la curva imagine possegga punti multipli, in relazione ad ognuno, O, di questi, si aumenterà il genere effettivo di tante unità, quante sono quelle di cui si abbassa il genere di una curva piana, che acquisti un nuovo punto multiplo della composizione di O (nel senso che verrà precisato nel Capitolo concernente la composizione delle singolarità). Così p. es. per ogni punto doppio nodale, il genere effettivo andrà accresciuto di una unità. Il genere effettivo, in tal modo accresciuto, si chiamerà il *genere virtuale* della corrispondenza o della curva.

La formula di Zeuthen, allorchè la curva T non abbia punti multipli, ci dice che:

$$2(\pi - 1) = d + 2\beta(p_1 - 1) = d' + 2\alpha(p_2 - 1), \tag{20}$$

ove p_1, p_2 son i generi di C_1, C_2, e d', d i numeri dei punti doppi di T su C_1, C_2.

Se invece la curva imagine ha punti multipli, ed è π il suo genere virtuale, mediante le (20) si verranno a definire due numeri d, d', che si chiamano i *numeri virtuali dei punti doppi della corrispondenza*, situati rispettivamente su C_2, C_1 [1].

[1] Cfr. De Franchis, Lincei Rend. 12_5, 306 (1903).

Quando la corrispondenza varia in un sistema continuo $\{T\}$, la cui corrispondenza generica sia irriducibile e priva di punti simultaneamente doppi e di diramazione, il genere virtuale di una particolare corrispondenza T_0, di quel sistema, che possegga invece punti siffatti, eguaglia il genere effettivo della generica T.

Suppongasi T irriducibile, priva di punti simultaneamente doppi e di diramazione e non composta, tanto su C_1, che su C_2: allora, detto n il grado virtuale di T, valgono le (pag. 265):

$$n = 2(\alpha\beta - z), \quad 2z = 2\alpha(\beta + p_2 - 1) - d,$$

le quali confrontate colle (20) porgono:

$$2(\pi - 1) - n = 2\beta(p_1 - 1) + 2\alpha(p_2 - 1). \tag{21}$$

Questa relazione vale anche se T, pur continuando ad esser irriducibile, acquista punti simultaneamente doppi e di diramazione o diventa composta; ed anzi la (21) può addirittura assumersi come definizione del genere virtuale, una volta che si conosca già, dal n. prec., il significato di n.

Supposto ora che la corrispondenza irriducibile, variando in un sistema continuo $\{T\}$, si spezzi nelle corrispondenze T_1, T_2 dei gradi n_1, n_2; indici α_1, β_1; α_2, β_2; generi virtuali π_1, π_2, dalla (pag. 262):

$$n = n_1 + n_2 + 2i,$$

ove i è il numero delle coppie comuni a T_1, T_2, mediante il confronto colla (21) e colle due analoghe che possono scriversi in relazione a T_1, T_2, si ricava:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1.$$

Tutte queste nozioni si apprezzano meglio dal punto di vista più largo della geometria sopra una superficie, come a suo tempo vedremo. Non ci dilunghiamo ulteriormente sul concetto di genere virtuale d'una corrispondenza, perchè non è necessario pei nostri scopi immediati.

86. Applicazione della nozione di grado alle corrispondenze birazionali fra due curve. — Sia T una corrispondenza birazionale ($\alpha = \beta = 1$) fra due curve C_1, C_2, di generi necessariamente eguali $p = p_1 = p_2$ (non escludiamo che T possa esser la corrispondenza identica, quando le due curve coincidano). Il grado virtuale n di T è espresso da

$$n = 2(1 - z),$$

ove z è il difetto di equivalenza della serie dei punti di C_2, cioè il numero dei punti di questa serie appartenenti ad una g_p^0. Risulta dunque $z = p$, epperò:

$$n = -2(p - 1).$$

Pertanto, *se $p > 1$, il grado di T è negativo, e quindi T non può variare in un sistema continuo* (pag. 263). Ne segue il teorema di SCHWARZ. È questa sostanzialmente la dimostrazione di DE FRANCHIS, cui alludevamo a pag. 177 ([1]).

È facile verificare che *una corrispondenza birazionale T sopra una curva C di genere $p > 1$, non può essere a valenza, se non nel caso in cui C sia iperellittica e che si tratti della corrispondenza generata dalla g_2^1 di C* ([2]).

E invero, se T possiede la valenza γ, è certo $\gamma \neq 0$, perchè altrimenti su C esisterebbe una g_1^1 e quindi sarebbe $p = 0$. Dovrà inoltre essere γ positiva (≥ 1), perchè il numero $2 + 2\gamma p$ dei punti uniti è positivo o nullo. Ma allora la corrispondenza T^2, non potrà essere non identica, perchè in tal caso il numero $2 - 2\gamma^2 p$ dei suoi punti uniti sarebbe negativo; epperò risulterà T involutoria e di valenza $\gamma = 1$, dato, che $T^2 = 1$ ha la valenza -1. Pertanto T è generata da una g_2^1 di C.

OSSERVAZIONE. — Sia I la corrispondenza identica fra due curve sovrapposte di genere p, e W sia una corrispondenza generalmente irriducibile, variabile con continuità, che si spezzi nella somma $S + I$. Allora il numero dei punti uniti di W vien dato da (pag. 261):

$$[WI] = [SI] + [II] = [SI] - 2(p - 1), \tag{22}$$

e si può quindi dire che *il distaccarsi da W dell'identità abbassa di $-2(p-1)$ unità il numero dei punti uniti.* Tale abbassamento è il medesimo che vien fornito dalla formula

([1]) Qui la dimostrazione è svincolata dalle nozioni di geometria sopra una superficie, che occorrono invece al DE FRANCHIS.

([2]) Cfr. le « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 185. Cfr. pure HURWITZ, Math. Ann. 28, 585 (1887).

delle coincidenze di una corrispondenza a valenza -1, come la I. Ma non è evidentemente lecito applicar senz'altro tale formula, perchè I ha infinite coincidenze. Occorre invece, mediante la nozione di grado virtuale, dare preventivamente, come noi abbiamo fatto, un senso preciso alla (22).

87. **Applicazione della nozione di grado alle involuzioni. Inesistenza sopra una curva di una infinità continua di involuzioni irrazionali.** — Cerchiamo di determinare il grado di una involuzione γ^1_m di genere π, sopra una curva C di genere p; cioè il grado della corrispondenza simmetrica T, di indici $m-1$, generata col chiamare omologhi due punti che appartengano a un medesimo gruppo di γ^1_m.

La corrispondenza T è manifestamente semplice, sicchè il suo grado sarà espresso da:

$$n = 2(m-1)^2 - 2z,$$

ove z è il difetto d'equivalenza della serie, d'ordine $m-1$, costituita dai gruppi Y, omologhi di un punto x variabile su C.

L'indice della serie degli Y è $m-1$ ed il numero d dei suoi punti doppi è quello stesso della involuzione γ^1_m, cioè:

$$d = 2(p-1) - 2m(\pi - 1).$$

Però ognuno di tali punti doppi, appartiene, come tale, ad $m-2$ gruppi Y, onde (n. 82, Oss. 1ª) sarà:

$$2z = 2(m-1)(m+p-2) - (m-2)d = 2(m-1)^2 +$$
$$+ 2(p-1) + 2m(m-2)(\pi-1),$$

e quindi:

$$n = -2(p-1) - 2m(m-2)(\pi-1).$$

Ora, poichè per $p>1$ e $\pi \geq 1$, risulta $n<0$, si deduce (pag. 263) che:

Sopra una curva algebrica non può esistere un'infinità continua di involuzioni irrazionali.

Veramente le precedenti considerazioni permettono di enunciare il teorema soltanto per $p>1$; ma esso è vero anche per $p=1$, come risulterà dal n. seguente.

Un'ulteriore determinazione del teorema è data dalla proposizione:

Una curva algebrica non può contenere che un numero finito di involuzioni irrazionali di genere maggiore di 1.

Sia C la considerata curva di genere p, necessariamente maggiore di 1 (n. 67, Oss. 1ª); γ^1_m un'involuzione di genere $\pi>1$ su di essa esistente. La formula di Zeuthen, che fornisce il numero d dei punti doppi di γ^1_m:

$$d + 2m(\pi - 1) = 2(p-1),$$

mostra che i numeri interi $d(\geq 0)$, $m(\geq 2)$, $\pi(>1)$ possono assumer soltanto un numero finito di valori. Sicchè, per dimostrar l'asserto, basterà provare che non vi sono infinite involuzioni coi medesimi caratteri d, m, $\pi(>1)$ (¹).

All'uopo, consideriamo una curva Γ, imagine della γ^1_m, e, denotato con K un gruppo canonico di Γ, con K' il suo trasformato su C, con D' il gruppo dei punti doppi dell'involuzione, con K^* un gruppo canonico di C, si ricordi che (pag. 208):

$$D' + K' \equiv K^*,$$

donde:

$$3D' + 3K' \equiv 3K^*. \tag{23}$$

Ora la serie $|3K^*|$, sulla curva C, ha l'ordine $6(p-1) > 2p$ (perchè $p \geq 2$) e quindi (pag. 148) la sua imagine proiettiva è una curva, priva di punti multipli, che continueremo ancora a chiamar C, d'ordine $6(p-1)$ dello spazio S_{5p-6}. Alla serie tricanonica di Γ corrisponde su C una serie di dimensione $5\pi - 6$, composta colla γ^1_m; pertanto tale serie è segata su C da un sistema lineare Σ d'iperpiani, passanti per uno spazio H a $5(p-\pi)-1$ dimensioni, ed ogni iperpiano di Σ, che esca da un punto P di C, contiene gli $m-1$ punti coniugati di P nella γ^1_m; cioè lo spazio HP, a $5(p-\pi)$ dimensioni, che da H proietta P, proietta in conseguenza altri $m-1$ punti di C.

(¹) Quest'asserzione si può considerare come un immediato corollario della proprietà indicata nelle note bibliografiche di pag. 177, che cioè le corrispondenze algebriche di dati indici, sopra una curva, si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui. Poichè un'involuzione di grado m dà luogo ad una corrispondenza $(m-1, m-1)$, così le involuzioni di dato grado m, si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici. E se trattasi di involuzioni irrazionali, ognuno di questi sistemi non potrà che ridursi ad una sola involuzione.

Inoltre, in forza dell'equivalenza (23), lo spazio H ha un contatto tripunto con C in ciascuno dei punti doppi di γ^1_m. Detto perciò Δ il cono a $5(p-\pi)+1$ dimensioni, che proietta C da H, il suo ordine risulterà espresso da:

$$\frac{6(p-1)-3d}{m}=6(\pi-1).$$

La determinazione delle involuzioni coi caratteri d, m, π, sulla curva C, vien così ricondotta alla determinazione degli spazi H, a $5(p-\pi)-1$ dimensioni, che hanno d contatti tripunti con C e tali che da ciascuno di essi la curva si proietta m volte.

Le condizioni cui son sottoposti questi spazi H, sono algebriche; epperò gli spazi H, ad esse soddisfacenti, si distribuiscono in un numero finito di varietà algebriche. Ma nessuna di queste può contenere infiniti spazi H, perchè se no su C esisterebbero sistemi continui d'involuzioni irrazionali; dunque gli spazi H, e le involuzioni corrispondenti, sono in numero finito.

Un'ultima osservazione generale vogliam fare sulle involuzioni irrazionali, provando che:

Sopra una curva C di genere $p>1$, la corrispondenza simmetrica T, di indici $m-1$, generata da un'involuzione γ^1_m di genere $\pi>0$, esistente su C, è priva di valenza (¹).

Suppongasi che T possa avere la valenza γ. Se $a_1, a_2, \ldots a_m$ denota un gruppo dell'involuzione, varranno le:

$$a_2+\ldots+a_m+\gamma a_1\equiv a_1+a_3+\ldots+a_m+\gamma a_2,$$

donde:

$$(1-\gamma)a_1\equiv(1-\gamma)a_2.$$

In simil guisa, posto $1-\gamma=k$, viene:

$$ka_1\equiv ka_2\equiv\ldots\equiv ka_m.$$

Per un altro gruppo $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dell'involuzione viene:

$$kb_1\equiv kb_2\equiv\ldots\equiv kb_m;$$

e inoltre sussiste l'equivalenza:

$$a_2+\ldots+a_m+\gamma a_1\equiv b_2+\ldots+b_m+\gamma b_1,$$

(¹) Cfr. le « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 186.

dalla quale, moltiplicandone i due membri per k, tenuto conto delle precedenti relazioni, si trae:

$$k(m+\gamma-1)a_1\equiv k(m+\gamma-1)b_1,$$

Ora i numeri interi k ed $m+\gamma-1$ son entrambi non nulli: k è non nullo, perchè altrimenti sarebbe $\gamma=1$ e la γ^1_m si ridurrebbe ad una g^1_m, contrariamente all'ipotesi $\pi>0$; $m+\gamma-1$ è non nullo, perchè altrimenti sarebbe $\gamma=1-m$ e quindi il numero dei punti uniti della corrispondenza T sarebbe $2(m-1)+2\gamma p=2(m-1)(1-p)$, numero negativo per $p>1$, il che è assurdo.

Ma allora, chiamato h il valore assoluto del prodotto $k(m+\gamma-1)$, si conclude che $ha_1\equiv hb_1$, ove a_1, b_1 son due punti qualunque della curva, epperò (pag. 219) la curva è razionale, contrariamente all'ipotesi che sia di genere $p>1$.

Osservazione. — Abbiamo sopra dimostrato che una curva non può contenere infinite involuzioni di genere $\pi>1$. Il caso $\pi=1$ dà luogo ad un'effettiva eccezione.

Nel n. seguente verrà infatti dimostrato che sopra una curva ellittica vi sono infinite involuzioni ellittiche, e in altro volume, trattando degl'integrali abeliani riducibili, mostreremo che esistono altresì curve di genere $p>1$ con infinite involuzioni ellittiche.

88. Le involuzioni ellittiche sopra una curva ellittica. — Sia C una curva ellittica. Un'involuzione irrazionale γ^1_m, esistente su C, è necessariamente ellittica e non ha punti doppi (n. 67, Oss. 2ª).

Sia T la corrispondenza $(m-1,\ m-1)$ generata da γ^1_m. Dico che T è mutata in sè da ogni t. 2ª s. Infatti, nell'ipotesi contraria, T è portata dalle t. 2ª s. in ∞^1 corrispondenze, tutte irriducibili come T, prive di coincidenze e di grado virtuale zero (pag. 269).

Tutte queste corrispondenze, e non soltanto la generica, son prive di coincidenze, perchè son ottenute l'una dall'altra mediante trasformazioni birazionali.

Ora una coppia x, y di punti di C appartiene ad almeno una delle predette corrispondenze (anzi ad una sola, perchè esse sono di grado zero). In particolare, se $x=y$, si ha una corrispondenza della nostra ∞^1, dotata di un punto unito in $x=y$; ciò che contraddice alla precedente conclusione.

È pertanto assurdo ammettere che le t. 2ª s. non mutino in sè T.

Sia Γ la curva imagine di γ^1_m. Alle ∞^1 t. 2ª s. di C corrisponde su Γ una ∞^1 di trasformazioni birazionali, le quali formano manifestamente un gruppo e sono pertanto (nn. 54, 59) le t. 2ª s. di Γ. Epperò una di queste t. 2ª s. di Γ, che abbia un punto unito, è l'identità (pag. 173): il che equivale a dire che una t. 2ª s. di C, che muti in sè un gruppo di γ^1_m, muta in sè ogni altro gruppo dell'involuzione. È poi chiaro che una trasformazione siffatta è ciclica di ordine m o di un ordine divisore di m.

Effettivamente vi sono t. 2ª s. che mutano in sè uno, e quindi tutti i gruppi di γ^1_m. Son quelle che fanno corrispondere ad un punto di un gruppo di γ^1_m ciascuno degli $m-1$ punti ulteriori.

Per trovare le involuzioni ellittiche d'ordine m esistenti su C, occorre dunque muovere dalle t. 2ª s. cicliche d'ordine m o, in particolare, di ordine divisore di m. Osserviamo, in primo luogo, che una t. 2ª s. ciclica di ordine m (o, in particolare, di un ordine divisore di m) muta in sè il gruppo dei punti m-pli di una fissata g^{m-1}_m, come si vede estendendo ovviamente il ragionamento di pag. 171, concernente le t. 2ª s. involutorie.

Indicati infatti con $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ i punti di un ciclo della nostra trasformazione τ, verrà:

$$A - A_1 \equiv A_1 - A_2 \equiv \ldots \equiv A_{m-1} - A,$$

dalle quali segue:

$$mA \equiv mA_1 \equiv \ldots \equiv mA_{m-1};$$

e ciò prova che i punti del ciclo considerato son punti m-pli di una medesima g^{m-1}_m. Sicchè, fissata comunque una g^{m-1}_m e detto A uno dei suoi punti m-pli, la τ dovrà mutare A in un altro di tali punti.

La conclusione vale naturalmente anche per una t. 2ª s. che sia ciclica d'ordine μ divisore di m, perchè dalle relazioni:

$$\mu A \equiv \mu A_1 \equiv \ldots \equiv \mu A_{\mu-1},$$

moltiplicando per l'intero $\frac{m}{\mu}$, si traggono le:

$$mA \equiv mA_1 \equiv \ldots \equiv mA_{\mu-1}.$$

Detto dunque G il gruppo dei punti m-pli di una data g^{m-1}_m, le t. 2ª s. cicliche d'ordine m (o d'ordine divisore di m), si ottengono tutte facendo corrispondere ad un punto di G un altro punto dello stesso gruppo.

Ora i punti di G sono in numero di m^2 fra loro distinti, perchè ognuno di essi non può che essere m-plo, e quindi i caratteri $i_0, i_1, \ldots, i_{m-3}, i_{m-2}$ di pag. 131, relativi a tale punto, non posson che avere i valori normali

$$i_0 = 1, \quad i_1 = 2, \ldots, \quad i_{m-3} = m-2, \quad i_{m-2} = m.$$

Ne segue che *le t. 2ª s. cicliche d'ordine m o d'ordine divisore di m, sono in numero di $m^2 - 1$ (esclusa l'identità).*

Calcoliamo il numero delle t. 2ª s. cicliche di ordine m, e non minore, cioè delle t. 2ª s. *primitive* di ordine m.

Se $m = \alpha^a$, ove α sia un numero primo > 1 ed a un intero ≥ 1, vi saranno

$$\alpha^{2a} - 1 - (\alpha^{2a-2} - 1) = m^2\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

trasformazioni primitive d'ordine m.

Se $m = \alpha\beta$, essendo α, β due interi primi fra di loro, vi saranno

$$\alpha^2\beta^2 - 1 - (\alpha^2 - 1) - (\beta^2 - 1) = m^2\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right),$$

trasformazioni primitive d'ordine m.

Queste due osservazioni, combinate, conducono subito alla conclusione che, *se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono i divisori primi di m, il numero delle trasformazioni primitive d'ordine m è dato da:*

$$m^2\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\ldots$$

Diremo che un'involuzione γ^1_m è *primitiva* quando è l'insieme dei cicli di una trasformazione primitiva di ordine m. Si badi che questo concetto è distinto da quello di involuzione semplice, cioè di involuzione non composta mediante un'involuzione di ordine inferiore, perchè, se m non è primo, e μ è un suo divisore primo > 1, la involuzione generata dai cicli di una trasformazione primitiva τ, d'ordine m, è sempre composta mediante la involuzione generata dai cicli della trasformazione $\tau^{\frac{m}{\mu}}$, che è primitiva d'ordine μ.

Consideriamo una γ^1_m primitiva, generata dalla trasformazione primitiva τ, d'ordine m. Delle $m-1$ t. 2ª s. $\tau, \tau^2, \dots \tau^{m-1}$, che mutano in sè ogni gruppo di γ^1_m, sono cicliche d'ordine m, e non minore, soltanto quelle che corrispondono ad esponenti primi con m. Sicchè esse sono tante quante i numeri minori di m e primi con m, cioè:

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\dots,$$

ove $\alpha, \beta, \gamma \dots$ denotano ancora i divisori primi di m.

Poichè una trasformazione primitiva d'ordine m, genera una γ^1_m primitiva *ben individuata*, così il numero delle involuzioni primitive di ordine m si otterrà dividendo il numero delle trasformazioni primitive d'ordine m, per $\varphi(m)$. Pertanto:

Le involuzioni primitive ellittiche, d'ordine m, sopra una curva ellittica, sono in numero di

$$m\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\dots,$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sono i divisori primi di m.

Le t. 2ª s. cicliche d'ordine eguale ad m o ad un suo divisore, formano, coll'identità, un gruppo finito Δ di ordine m^2, abeliano o permutabile (cioè di sostituzioni a due a due permutabili), entro cui le t. 2ª s. che mutano in sè una data γ^1_m ellittica, primitiva o no, formano un sottogruppo Δ' d'ordine m. Viceversa, ogni tal sottogruppo genera una γ^1_m ellittica. Le γ^1_m ellittiche sono dunque tante quanti i sottogruppi d'ordine m contenuti in Δ; epperò:

Le involuzioni ellittiche, primitive o no, di dato ordine m, esistenti sopra una curva ellittica, sono in numero finito.

Ne consegue la proprietà, di cui facemmo uso nel n. prec., circa l'inesistenza di un sistema continuo di involuzioni irrazionali (ellittiche) sopra una curva ellittica, giacchè involuzioni di un tal sistema avrebbero lo stesso ordine, e si contraddirebbe al teorema ora dimostrato.

Ma si vede però che sopra una curva ellittica vi sono infinite involuzioni ellittiche (cfr. coll'Oss. alla fine del n. 87), per ogni valore dell'intero m essendovene un numero finito.

89. Linearità delle involuzioni più volte infinite, esistenti sopra una curva. — Considerando sopra una curva C, di genere $p>0$, le serie algebriche d'indice 1, di gruppi di punti, abbiamo veduto che, oltre alle serie lineari semplicemente infinite, posson esistere involuzioni *irrazionali* semplicemente infinite.

Vogliamo ora proporci la questione analoga per le serie algebriche γ^r_m (irriducibili), di dimensione $r>1$ e d'indice 1, sopra la curva C; serie che, avendo l'indice 1, continueremo a chiamare *involuzioni*. Se la γ^r_m consta di gruppi equivalenti, già sappiamo (n. 20) ch'essa è lineare. Ebbene, nel presente n. proveremo che tale conclusione vale (salvo un caso banale) anche quando si abbandona l'ipotesi dell'equivalenza dei gruppi di γ^r_m. Il teorema che stabiliremo è precisamente questo:

Una involuzione γ^r_m, priva di punti fissi, di dimensione $r>1$, sopra una curva C, o è una serie lineare g^r_m, oppure i suoi gruppi si posson ottenere aggruppando ad r ad r, negli ∞^r modi possibili, i gruppi di un'involuzione irrazionale γ^1_μ (cosicchè $m=r\mu$); ed in particolare, per $\mu=1$ e quindi $m=r$, aggruppando ad r ad r i punti della curva.

Supponiamo anzitutto che la γ^r_m sia semplice, di dimensione $r=2$ e di ordine $m>2$. I gruppi di γ^2_m per un punto generico x di C, astraendo da questo, formano una γ^1_{m-1}, variabile con x. E invero, se la γ^1_{m-1} restasse fissa, i gruppi di γ^2_m si otterrebbero associando a ciascun gruppo di γ^1_{m-1} ciascun punto della curva. Ma allora, presi due punti generici x_1, x_2 di C, il gruppo di γ^1_{m-1} passante per x_2, insieme ad x_1, darebbe un gruppo di γ^2_m per x_1, x_2; e similmente il gruppo di γ^1_{m-1} passante per x_1 (generalmente distinto da quello che passa per x_2), insieme ad x_2, darebbe un *altro* gruppo di γ^2_m per x_1, x_2; onde γ^2_m risulterebbe d'indice >2. Di più, essendo γ^2_m semplice, la γ^1_{m-1} variabile non può possedere punti fissi, che sarebbero tali per la γ^2_m. Nè la γ^1_{m-1} può spezzarsi in due serie ∞^1 distinte, poichè altrimenti il suo indice sarebbe >1.

La γ^1_{m-1}, essendo dunque variabile in un sistema ∞^1 di involuzioni di ordine $m-1>1$, è necessariamente una g^1_{m-1} (pag. 270). Da ciò segue subito che la γ^2_m è una g^2_m. Infatti, detta γ^1_{m-1} la serie residua del punto x rispetto alla γ^2_m e $\bar{\gamma}^1_{m-1}$ la serie residua di $\bar{x}$, le due serie lineari $x+\gamma^1_{m-1}$, $\bar{x}+\bar{\gamma}^1_{m-1}$ hanno in comune il gruppo di γ^2_m, che passa per x, $\bar{x}$; e quindi i gruppi di γ^2_m passanti per x sono equivalenti. Donde, pel teorema del n. 20, la conclusione.

Se $r \geq 2$, $m = r$, la γ^r_m riducesi alla serie delle r-ple di punti di C. Se $r > 2$, $m > r$ e la γ^r_m è semplice, si giunge alla conclusione che la γ^r_m è una g^r_m, passando, col procedimento esposto, da $r-1$ ad r.

Se infine la γ^r_m è composta con una γ^1_μ, rappresentata dai punti di una curva Γ, a γ^r_m risponde su Γ una $\gamma^r_{m'}$ $(m' = m:\mu)$ semplice, e quindi, quando sia $m' > r$, la $\gamma^r_{m'}$ sarà lineare e perciò anche la γ^r_m (pag. 63). Se invece è $m' = r$, cioè $m = r\mu$, la $\gamma^r_{m'}$ si otterrà aggruppando ad r ad r i punti di Γ, e pertanto γ^r_m risulterà dall'aggruppare ad r ad r i gruppi di γ^1_μ.

90. Caratterizzazione numerativa delle corrispondenza a valenza. — Un'ultima applicazione faremo, della nozione di grado di una corrispondenza, a caratterizzare le corrispondenze a valenza, mediante una relazione fra i loro caratteri numerativi. Sarà questo un altro esempio assai espressivo, oltre a quello del n. 82, della deduzione di una proprietà funzionale da una relazione meramente numerativa.

Premettiamo il seguente lemma:

Se il multiplo secondo k d'una corrispondenza $T(\alpha, \beta)$ fra i punti di una curva C, ha la valenza γ, risulta necessariamente γ multiplo di k e quindi (pag. 257) *T ha la valenza $\gamma' = \gamma : k$.*

Supponiamo, se è possibile, che l'intero γ, positivo o negativo, non nullo, non sia multiplo di k e indichiamo con θ il massimo comun divisore di k, γ. Dal fatto che è a valenza γ la corrispondenza kT, segue (n. 82, Oss. 4ª), che la corrispondenza $(k:\theta)T$ è a valenza $\gamma:\theta$. Sicchè nulla ci vieta di supporre addirittura che i due interi k, γ, di cui parla l'enunciato del lemma, sieno primi fra loro, e che $k > 1$. Esisteranno allora altri due interi (positivi o negativi) k_1, γ_1, tali che:

$$k\gamma_1 - k_1\gamma = 1. \tag{24}$$

Consideriamo la corrispondenza, eventualmente virtuale (pag. 266):

$$T_1 = k_1 T + \gamma_1 I,$$

ove I denota la corrispondenza identica. L'ipotesi che kT abbia la valenza γ, significa che, detto Y il gruppo degli

omologhi nella T di un punto x di C, vale, qualunque sia x, l'equivalenza:

$$kY + \gamma x \equiv G,$$

ove G è un gruppo, effettivo o virtuale.

Indichiamo con Y_1 il gruppo degli omologhi di x in T_1, cioè il gruppo (effettivo o virtuale):

$$Y_1 = k_1 Y + \gamma_1 x.$$

Tenuto conto della (24), da questa relazione, che definisce Y_1, si trae:

$$kY_1 - x = kk_1 Y + k_1\gamma x \equiv k_1 G,$$

la quale prova che la corrispondenza T_1 è tale che kT_1 ha la valenza -1. Se T_1 non risultasse effettiva, si potrebbe sempre, coll'aggiunta di una conveniente corrispondenza a valenza zero S, fare in modo che fosse effettiva la $T_1 + S$ [1].

Ma allora la corrispondenza effettiva $kT_1 + kS$, somma di una corrispondenza a valenza -1 e di una a valenza zero, risulterebbe a valenza -1.

Si conclude, in conseguenza dell'ipotesi fatta, di cui vogliamo dimostrar l'assurdità, che su C esiste sempre una corrispondenza effettiva T_1 tale che il suo k-plo $(k > 1)$ ha la valenza -1.

Ciò posto, sieno x_i, x_i' due punti qualunque di C ed Y_i, Y_i' i gruppi dei β_1 punti y corrispondenti ad x_i, x_i' nella T_1, cosicchè sarà:

$$kY_i - x_i \equiv kY_i' - x_i'.$$

Detto p il genere di C, si faccia $i = 1, 2, \ldots, p$ e si sommino a membro a membro le p equivalenze ottenute; verrà:

$$k(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p) - X \equiv k(Y_1' + Y_2' + \ldots + Y_p') - X',$$

ove:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_p, \quad X' = x_1' + x_2' + \ldots + x_p'.$$

[1] Infatti una corrispondenza virtuale, come la T_1, può rappresentarsi con la differenza $A - B$ di due corrispondenze effettive A, B. Costruita una corrispondenza B' tale che $S = B + B'$ risulti a valenza zero (si potrà assumer p. es. per B' la corrispondenza complementare di B), la corrispondenza $(A - B) + S = A + B'$ è effettiva.

Fissata una generica serie $g^{\beta_1 p}_{\beta_1 p+p}$, per ogni posizione del gruppo X su C, potremo considerare il residuo Z, rispetto alla predetta serie, del gruppo di $\beta_1 p$ punti $Y_1 + \ldots + Y_p$, corrispondente ad X, mediante T_1. In questo modo dalla T_1 prende origine una corrispondenza H tra i gruppi di p punti di C, ad ogni X corrispondendo un solo Z e ad ogni Z un certo numero di gruppi X.

Dalla precedente equivalenza, tenuto conto che

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p + Z \equiv Y_1' + Y_2' + \ldots + Y_p' + Z',$$

si trae:

$$kZ + X \equiv kZ' + X',$$

come legame fra due coppie (X, Z), (X', Z') di gruppi di p punti omologhi in H.

Poichè $k > 1$, si può scegliere una *generica* $g^{(k-1)p}_{kp}$, nella quale vi saranno $k^{2p} > 1$ gruppi dotati di p punti k-pli (n. 80). Presi due distinti di questi gruppi, indichiamo con Z, Z' i gruppi di p punti distinti, che li costituiscono. Se X (o X') è uno dei gruppi omologhi di Z (o Z') nella H^{-1}, a causa dell'ultima relazione ottenuta, poichè $kZ \equiv kZ'$, risulterà $X \equiv X'$. Ma dal momento che la $g^{(k-1)p}_{kp}$, e quindi Z, sono stati scelti genericamente, il gruppo X, che dipende da p parametri (tanti quanti quelli da cui dipende Z), non può essere speciale. Ne deriva che X coincide con X' e quindi Z con Z', contro il supposto che i due gruppi sieno distinti.

È quindi assurdo che sia $k > 1$, epperò è assurda l'ipotesi che il massimo comun divisore θ dei due interi k, γ inizialmente considerati sia diverso da k; cioè deve essere γ multiplo di k.

Stabilito così il lemma, consideriamo sulla curva C una corrispondenza qualunque T, di indici (α, β), dotata di un numero finito u di punti uniti, e fissiamo l'attenzione sulla corrispondenza R, effettiva o virtuale

$$R = 2pT + cI,$$

ove I rappresenta ancora la corrispondenza identica e

$$c = u - \alpha - \beta.$$

Gl'indici della corrispondenza R sono $(2p\alpha + c,\ 2p\beta + c)$ e quindi il suo grado $[R^2]$ soddisfa alla disuguaglianza

(pag. 267):

$$(25) \qquad [R^2] \leq 2(2p\alpha + c)(2p\beta + c).$$

D'altronde, indicato con 2ν il grado virtuale di T (che è necessariamente pari; pag. 264), in virtù della formula, stabilita a pag. 262, che fornisce il grado della somma di due corrispondenze, viene:

$$[R^2] = 8p^2\nu - 2c^2(p-1) + 4puc,$$

e ciò perchè il grado di I vale $-2(p-1)$ (pag. 269). Sostituendo nella (25) s'ottiene:

$$c^2 \leq 4p(\alpha\beta - \nu).$$

Se in tale relazione vale il segno $=$, varrà pure nella (25), e la corrispondenza R risulterà a valenza zero (pag. 267). Questo significa che la corrispondenza $2pT$ è a valenza c, e quindi, in base al lemma, c sarà divisibile per $2p$ e la corrispondenza avrà la valenza $\gamma = \dfrac{c}{2p}$.

Possiamo pertanto enunciare:

Data sopra una curva di genere p una corrispondenza di indici (α, β), e di grado 2ν, dotata di un numero finito u di punti uniti, sussiste sempre la disuguaglianza:

$$(u - \alpha - \beta)^2 \leq 4p(\alpha\beta - \nu),$$

il segno $=$ valendo allora e solo allora che la corrispondenza T è a valenza $(u - \alpha - \beta):2p$.

91. Le corrispondenze birazionali fra i gruppi di p punti di una curva di genere p. La varietà di Jacobi. — La teoria delle corrispondenze birazionali (ordinarie) fra i punti di una curva ellittica (n. 54), si può agevolmente estendere alle corrispondenze birazionali fra i gruppi di p punti di una curva C, di genere $p > 1$.

Si possono anzitutto considerare le *trasformazioni di 1ª specie* (t. 1ª s.) fra i gruppi di p punti di C, chiamando omologhi due gruppi che insieme costituiscano un gruppo di una fissata g^p_{2p}. La corrispondenza è evidentemente involutoria e birazionale; e, detti A, B due gruppi di p punti di C, ed A', B'

i loro omologhi, essa è caratterizzata dalla equivalenza:

$$A + A' \equiv B + B'.$$

Il prodotto di due t. 1ª s. è una *trasformazione di 2ª specie* (t. 2ª s.), caratterizzata dall'equivalenza:

$$A - A' \equiv B - B',$$

ove, al solito, A', B' sieno gli omologhi di A, B nella t. 2ª s.

Le t. 1ª s. sono ∞^p, perchè, fissato un gruppo A, sono ∞^p i gruppi di p punti che si posson sommare ad A per individuare una g^p_{2p}; e, viceversa, ogni tal g^p_{2p} individua un resto rispetto ad A.

E sono ∞^p anche le t. 2ª s., perchè posson ottenersi tutte moltiplicando una fissata t. 1ª s. per una variabile.

Una coppia di gruppi omologhi A, A' individua una t. 1ª s. ed una t. 2ª s.

Il prodotto di due t. 2ª s. è una t. 2ª s. e il prodotto non muta cangiando l'ordine dei fattori. Pertanto *le t. 2ª s. formano un gruppo continuo abeliano (o permutabile) a p parametri.*

Queste proprietà si stabiliscono con ovvia estensione dei ragionamenti esposti nel n. 54. Qui però c'è da avvertire che una t. 1ª s. o una t. 2ª s. agiscono, è vero, sopra un gruppo generico di p punti associando ad esso *un solo* gruppo; ma che vi sono gruppi particolari, che non hanno l'omologo ben determinato.

Invero, se A, A' è una coppia di gruppi omologhi in una data t. 1ª s. ω, ed uno di essi, A, è speciale, ogni gruppo equivalente ad A corrisponderà ad A' in ω; cioè A' avrà per omologhi tutti gli infiniti gruppi della serie speciale $|A|$. Viceversa, se nella ω ad un gruppo A' corrispondono due gruppi diversi, essi risultano equivalenti e quindi sono speciali.

Analoga conclusione vale per una t. 2ª s. Dunque *l'omologo di un gruppo, rispetto ad una data t. 1ª s. o 2ª s., è indeterminato allora e solo allora che il dato gruppo sia speciale.*

Nei riguardi dei gruppi uniti (coincidenti cioè coi loro omologhi), si vede subito, dall'equivalenza che la definisce, che *una t. 2ª s., diversa dall'identità, non ha gruppi uniti;* mentre *una t. 1ª s. ha 2^{2p} gruppi uniti,* tanti cioè quanti i gruppi di una g^p_{2p}, dotati di p punti doppi (n. 80).

In verità, per affermare che si tratta proprio di 2^{2p} gruppi *distinti*, occorrerebbe provare che un gruppo di g^p_{2p} con p punti doppi, non può contare più volte fra i gruppi dotati dell'analoga proprietà. Non c'indugieremo su questo punto, limitandoci ad osservare come la cosa sia pressochè intuitiva per una g^p_{2p} generica.

La determinazione delle t. 2ª s. cicliche d'ordine m, si riconduce, con un ragionamento del tutto analogo a quello del n. 88, alla determinazione delle t. 2ª s. che mutano in sè l'insieme dei gruppi di p punti, ognun dei quali, ripetuto m volte, dà un gruppo di una prefissata $g^{(m-1)p}_{mp}$. Poichè i gruppi di tal serie, che son dotati di p punti m-pli, sono in numero di m^{2p} (n. 80), e, quando la serie sia generica, *si può ritenere* che sieno distinti, si conclude che *le t. 2ª s. cicliche di un ordine eguale ad m o ad un suo divisore sono $m^{2p} - 1$.*

Dal che si deduce che *vi sono*

$$m^{2p}\left(1-\frac{1}{\alpha^{2p}}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^{2p}}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^{2p}}\right)\cdots$$

trasformazioni di 2ª specie, primitive d'ordine m; α, β, γ... essendo i divisori primi di m.

I cicli di una t. 2ª s. primitiva d'ordine m, costituiscono, entro la varietà dei gruppi di p punti, un'involuzione d'ordine m, la quale è mutata in sè da ogni t. 2ª s. Quella involuzione è cioè rappresentata da una varietà, che possiede essa pure un gruppo continuo permutabile ∞^p di trasformazioni birazionali in sè; ecc. ecc.

Una varietà V i cui punti sieno in corrispondenza birazionale coi gruppi di p punti di C, chiamasi la *varietà di* JACOBI, inerente alla curva C. È chiaro che *tale varietà è algebrica*, perchè la condizione imposta ai gruppi di p punti dello spazio cui appartiene C, affinchè quei gruppi stiano su C, si esprime con equazioni algebriche.

Un modello concreto della varietà di JACOBI può ottenersi p. es. così. Si pensi la curva C in uno spazio S_r e si considerino gli spazi S_{p-1} individuati (pag. 64) dai gruppi di p punti di C. Essi riempiono una varietà a $2p-1$ dimensioni, la cui intersezione con uno spazio S_{r-p+1} dà un modello proiettivo di V.

Si potrebbe dimostrare che, se la C è priva di punti multipli, e la dimensione r è abbastanza grande, il modello proiettivo così costruito riesce privo di punti multipli. A noi basta di osservare che, nei riguardi di proprietà di geometria sull'ente, si può in ogni caso ragionare *come se* V non avesse punti multipli, perchè, presi su V un punto *generico* (semplice) P' ed un punto *qualunque* P, esistono sempre trasformazioni birazionali di V in sè (una di 1ª ed una di 2ª specie), che portano P in P'.

Se la corrispondenza fra i punti di V ed i gruppi di p punti di C, è biunivoca senza eccezioni, agli ∞^{p-1} gruppi speciali di p punti di C, corrispondono su V i punti di una varietà M, a $p-1$ dimensioni, la quale è *eccezionale* nel senso che si può costruire un modello di V, privo di punti multipli, sul quale alla M corrisponda una varietà di dimensione $p-2$.

Per ottenere un siffatto modello V', sul quale alla M di V, corrisponda una M' a $p-2$ dimensioni, basta assumer per V' una varietà, priva di punti multipli, i cui punti rappresentino senza eccezioni le serie lineari d'ordine p appartenenti a V; chè allora un gruppo generico (non speciale) di p punti di C, avrà per imagine un punto determinato tanto su V, che su V', mentre, se è un gruppo d'indice di specialità 1 (corrispondente cioè ad un punto generico di M), ad esso risponderà su M una curva (razionale) e su M' un punto ben determinato.

Osservazione. — Si osserverà che la varietà V' imagine della varietà delle g_p di C, è altresì in corrispondenza birazionale, senza eccezioni, colla varietà delle g_n di dato ordine $n=p+r$ $(r \geq 0)$, contenute in C. Infatti, fissato un gruppo G di r punti di C, ad ogni g_n risponde una g_p residua di g_n rispetto a G, e viceversa ad ogni g_p risponde la g_n somma di G e di g_p.

92. **Nuova dimostrazione dell'inesistenza di un'infinità continua di involuzioni irrazionali sopra una curva.** — Sia V_p la varietà di Jacobi, priva di punti multipli, che rappresenta senza eccezioni le g_p della curva C di genere p. La C contenga inoltre un'involuzione γ^1_m di genere $\pi > 0$, e sia Γ una curva imagine di tale involuzione. Supponiamo $p > \pi$ (o, ciò che è lo stesso, $p > 1$).

Consideriamo su Γ le serie lineari d'ordine μ tale che $\mu m > 2p-2$. Esse son certo non speciali, perchè, essendo per la formula di Zeuthen, $2m(\pi-1) \leq 2p-2$, risulta $\mu > 2\pi - 2$.

Ad una di queste serie di Γ risponde su C una serie d'ordine $n=\mu m$, non speciale. Viceversa, presa su C una g_n completa, che contenga una $\bar{g}_n$ composta con γ^1_m e completa, come serie composta con γ^1_m, cioè non contenuta in una più ampia dello stesso ordine composta con γ^1_m, non può esistere, nella considerata g_n, che un numero finito $\nu \geq 1$ di serie analoghe a $\bar{g}_n$. Infatti, un'infinità discontinua di tali $\bar{g}_n$ non può esservi, perchè la corrispondenza fra le g_μ di Γ e le g_n di C contenenti serie composte con γ^1_m, è razionale in un senso e quindi algebrica (in particolare razionale) nel senso opposto. Per guisa che una g_n, contenente una $\bar{g}_n$, non può contenere che una varietà algebrica di serie analoghe, cioè o un numero finito o un'infinità continua. Ma neppure un'infinità continua di serie $\bar{g}_n$ può esistere in g_n, perchè, mediante la corrispondenza $(m, 1)$ fra C e Γ, ai gruppi di quelle $\bar{g}_n$ corrisponderebbe un'infinità continua di gruppi di μ punti di Γ, aventi i loro m-pli a due a due equivalenti (n. 66). Epperò quei gruppi di μ punti di Γ sarebbero essi stessi equivalenti (pag. 257), cioè contenuti tutti in una g_μ, alla quale corrisponderebbe su C una serie di ordine n, composta con γ^1_m, e contenente tutte le $\bar{g}_n$ della infinità continua; contro l'ipotesi che una di esse sia completa, come serie composta.

La conclusione è che:

Se una curva C di genere p contiene un'involuzione birazionalmente equivalente ad una curva Γ di genere $\pi > 0$, la varietà di Jacobi *V_p, inerente a C, contiene una varietà V_π razionalmente equivalente alla varietà di* Jacobi *inerente a Γ.*

La V_π è birazionalmente equivalente alla varietà di Jacobi W_π di Γ o ad un'involuzione d'ordine ν, ivi esistente; un gruppo di tale involuzione rappresentando ν serie g_μ i cui m-pli coincidono.

Una t. 2ª s. di W_π è definita dalla condizione che una coppia variabile di punti in essa omologhi rappresenta due serie g_μ di Γ, la cui differenza varia in una fissata serie lineare d'ordine zero. Poichè nella corrispondenza fra Γ, C gruppi equivalenti mutansi in gruppi equivalenti, a quella t. 2ª s. resta associata, mediante la corrispondenza fra Γ e C, una t. 2ª s. di V_p, che trasforma in sè V_π. Si ottengono così ∞^π t. 2ª s. di V_p, che mutano in sè V_π. E siccome al prodotto di due t. 2ª s. di W_π resta associato il prodotto di due di queste ∞^π t. 2ª s. di V_p, *si ottiene in V_p un sottogruppo abeliano al-*

gebrico ∞^π, G_π, *contenuto nel gruppo* G_p *delle t.* 2ª *s. di* V_p. *La varietà* V_π *è una traiettoria di questo sottogruppo.*

Applicando le trasformazioni del sottogruppo algebrico G_π a tutti i punti di V_p, questi si ripartiscono in $\infty^{p-\pi}$ varietà analoghe a V_π, anzi birazionalmente equivalenti a V_π. E invero, G_π è un sottogruppo invariante di G_p (mutato in sè da tutte le trasformazioni di G_p); cosicchè, presi due punti P, P' di V_p, la t. 2ª s. che porta P in P', muta la traiettoria del sottogruppo G_π, applicato a P, nella traiettoria dello stesso sottogruppo, applicato a P'. Onde due qualunque di queste traiettorie sono birazionalmente equivalenti, e per *ogni* punto di V_p ne passa una sola.

Da ciò segue che *non può esistere un'infinità continua di sottogruppi algebrici* G_π *del gruppo* G_p.

Infatti, se una tale infinità esistesse, in corrispondenza ad ogni G_π di detta infinità si avrebbe un sistema Σ di $\infty^{p-\pi}$ varietà V_π, tale che per *ogni* punto di V_p passerebbe una V_π di Σ. Fissato allora uno, Σ_0, di questi sistemi, ed una generica V_π, e sia $V_\pi^{(0)}$, in esso, per ogni punto di $V_\pi^{(0)}$ passerà una V_π del generico Σ, appoggiata alla $V_\pi^{(0)}$. Ciò vale qualunque sia Σ. Quando Σ tende a Σ_0, le V_π di Σ appoggiate a $V_\pi^{(0)}$, tendono a V_π di Σ_0 appoggiate a $V_\pi^{(0)}$. Questo è assurdo, perchè per *ogni* punto di $V_\pi^{(0)}$ passano così V_π di Σ_0 diverse da $V_\pi^{(0)}$ (¹).

Pertanto *su C non può esistere un'infinità continua di involuzioni irrazionali di genere* $\pi > 0$, giacchè due tali involuzioni darebbero luogo a sistemi Σ distinti, in quanto una serie lineare non può esser composta con due diverse involuzioni (pag. 63).

Il criterio esposto nel n. 82 e la relativa dimostrazione son di Castelnuovo [Lincei Rend. 15_5, 337 (1906)]. Il teorema contenuto nell'Oss. 3ª del n. 82, che adempie, come si vedrà, ad un ufficio essenziale in talune questioni fondamentali di geometria sopra una superficie, è dell'Autore [Ann. di Mat. 12_3, 55 (1906)]; la primitiva dimostrazione del quale poggia sugli integrali abeliani. Il criterio di Castelnuovo ebbe appunto origine « dal desiderio di ritrovare quel teorema per una via più conforme alla sua natura algebrica ». Felice circostanza, perchè il criterio numerativo ha dato luogo, alla sua volta, a molte conseguenze interessanti, in parte esposte dal n. 82 in poi. Le proposizioni dell'Oss. 4ª (n. 82) trovansi incidentalmente in Note dell'Autore [Palermo Rend. **21**, 281 (1905); Ist. Veneto Atti, **65**, 634 (1906); Torino Atti, **48**, 661 (1913)], nell'ultima delle quali si dimostra altresì il lemma del n. 90 [vedi pure, a tal proposito, Rosati, Lincei Rend. 22_5, 387 (1913)]. La nozione di corrispondenza complementare di una data (n. 75) è stata introdotta dall'Autore [Torino Atti, **48**, 674 (1913)], che ha anche determinato il primo indice di siffatta corrispondenza, deducendolo prima dai risultati trascendenti di Hurwitz, eppoi [Lincei Rend. 1_6, 562 (1925)] per la via geometrica esposta nel n. 83. I concetti di grado e di genere di una corrispondenza si presentano spontanei, quando la corrispondenza venga pensata come una curva sulla superficie delle coppie di punti delle due curve fra cui essa intercede (pag. 194). Da tal punto di vista lo studio delle corrispondenze è stato inaugurato da De Franchis [Lincei Rend. 12_5, 303 (1903)] e dall'Autore nella Memoria « Corrispondenze » già citata (pag. 240). Restando sullo stesso terreno, l'Autore ha assegnato l'espressione $2(\alpha\beta-\alpha')$ (pag. 264) pel grado virtuale di una data corrispondenza [Torino Atti, **48**, 674 (1913)] ed ha osservato che il massimo $2\alpha\beta$ caratterizza le corrispondenze a valenza zero. La originaria dimostrazione dell'Autore, poggiante su teoremi di geometria sopra una superficie, fornisce altresì, pel tramite della formula di Zeuthen, una nuova via per giungere al criterio di Castelnuovo (loco ultimamente citato, pag. 665).

La via con cui si perviene, al n. 83, alla formula $2(\alpha\beta-\alpha')$ è stata dall'Autore indicata più tardi [Lincei Rend. 1_6, 562 (1925)]. Ved. altresì in proposito Rosati, l. c. pag. 388. La caratterizzazione numerativa delle corrispondenze a valenza (n. 90) trovasi nella Nota ultimamente citata dell'Autore, negli Atti di Torino. Il criterio di Castelnuovo è stato esteso da R. Torelli [Torino Atti, **42**, 86 (1906)] alle serie algebriche più volte infinite, nel modo seguente: *Una serie algebrica* ∞^r, *di ordine* m *e d'indice* ν, *sopra una curva di genere* p, *possiede al più* $\nu(r+1)(m+rp-r)$ *punti* $(r+1)$*-pli ed il massimo è raggiunto allora e solo allora che la data serie consti di gruppi equivalenti.* La differenza fra il predetto massimo ed il numero dei punti $(r+1)$-pli, eguaglia $r(r+1)z$, ove z denota il difetto di equivalenza (denominazione introdotta dallo stesso Torelli) della serie ∞^1 formata dai gruppi della serie data passanti per $r-1$ punti generici della curva. Un'altra interessante estensione ha fatto il Torelli del criterio di Castelnuovo alle serie algebriche ∞^2 [Ist. Veneto Atti, **67**, 1330 (1908)]. Indicato con m l'ordine della serie, con ν il suo indice, con δ il numero dei suoi gruppi con due punti doppi, viene:

$$\delta = 2\nu(m+p-2)(m+p-3) - 4\nu p + 4Z - 4z(m+p-4),$$

ove z è il difetto di equivalenza della serie ∞^1 costituita dai gruppi della serie ∞^2 passanti per un punto generico della curva, e Z il numero dei

(¹) Per apprezzare al suo giusto valore questa argomentazione, si consideri nello spazio ordinario una congruenza del 1° ordine di rette, cioè una congruenza Σ_0 tale che per un punto generico dello spazio passi una sola retta della congruenza. La Σ_0 appartiene ad un sistema continuo di congruenze Σ ad essa omografiche e vi è pertanto una rigata R di generatrici di una generica Σ, appoggiate ad una data retta a_0 di Σ_0.

Quando Σ tende a Σ_0, la R tende ad una rigata di rette di Σ_0, che escono dai punti singolari (focali) di a_0, che, com'è noto, son due (distinti o coincidenti).

Nel caso del testo, $V_\pi^{(0)}$ non contiene invece alcun punto focale, e da ciò la conclusione.

gruppi della serie ∞^2, contenuti parzialmente in una generica g^{m-2}_{m+p-2}. È chiaro che Z si annulla quando $z=0$; ma Z può esser nullo, anche senza che lo sia z. Ed il TORELLI dimostra che Z si annulla o quando tutti i gruppi della serie son equivalenti (nel qual caso è altresì $z=0$) oppure quando i predetti gruppi si ripartiscono in ∞^1 serie ∞^1, formate ciascuna da gruppi equivalenti (ed allora è $z>0$). In altro senso il criterio di CASTELNUOVO è stato esteso dal COMESSATTI [Palermo Rend. **36**, 35 (1913)], con riferimento però ad una γ^1_m, d'indice ν, semplicemente infinita, sopra una curva di genere p. Per una tal serie il COMESSATTI introduce p caratteri $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{p-1}$. Il carattere Z_{r-1} è il numero dei gruppi di rm punti, formati da r gruppi di γ^1_m, che appartengono ad una generica $g^{r(m-1)}_{r(m-1)+p}$. L'annullarsi di uno di questi caratteri trae l'annullarsi dei successivi. La loro importanza si rivela sopratutto dal lato trascendente, come risulta dal citato lavoro del COMESSATTI e dall'interpretazione che di quei caratteri ha dato CASTELNUOVO [Lincei Rend. **30**$_5$, 358 (1921)] nel campo delle funzioni abeliane; la quale interpretazione diviene anche più espressiva profittando del concetto di valenze di una corrispondenza qualunque (ved. a pag. 242). In ultimo si deve citare, fra le più notevoli ricerche cui ha dato luogo il criterio di CASTELNUOVO, una memoria di R. TORELLI [Palermo Rend. **37**, 25 (1914)] che studia le serie algebriche di genere $\leq p$ contenute in una curva di genere p.

Il teorema concernente l'inesistenza d'un'infinità continua d'involuzioni irrazionali sopra una curva, contenuto in un risultato trascendente di PAINLEVÉ [Ann. éc. norm. **8**$_3$, 135 (1891)], fu posto in modo esplicito in rilievo, coll'uso degl'integrali abeliani, da CASTELNUOVO [Torino Atti **28**, 727 (1923)] e da HUMBERT [Comptes rendus, **116**, 1350 (1893); Journ. de Math. **10**$_4$, 169 (1894)]. Ambedue questi Autori ne deducono il teorema del n. 89, concernente la linearità delle involuzioni più volte infinite. La prima dimostrazione geometrica dell'inesistenza di un'infinità continua di involuzioni irrazionali, è di DE FRANCHIS [Lincei Rend. **12**$_5$, 310 (1903)]; ed è sostanzialmente la dimostrazione da noi esposta al n. 87, svincolata però, mercè la nostra espressione $2(\alpha\beta-\alpha')$ del grado virtuale d'una corrispondenza, dalle considerazioni di geometria sopra una superficie, che occorrono al DE FRANCHIS. Ad R. TORELLI è dovuta una dimostrazione geometrica, che si svolge sulla curva, della linearità delle involuzioni più volte infinite, senza passar prima pel teorema concernente un'infinità continua di involuzioni irrazionali [Ist. Veneto Atti, **67**, 831 (1908)]. La dimostrazione del n. 92, che astrae da qualunque base numerativa e mostra in modo più intimo la ragione della impossibilità dell'esistenza di una serie continua di involuzioni irrazionali, appare per la prima volta in questo Trattato. L'ulteriore complemento al teorema, precisante che le involuzioni di genere >1 sopra una curva son in numero finito, è esso medesimo contenuto nel risultato di PAINLEVÉ cui sopra si è alluso. La dimostrazione esposta nel n. 87 è dovuta a DE FRANCHIS.

CAPITOLO SETTIMO

La geometria delle serie lineari secondo il metodo iperspaziale.

93. Nuova dimostrazione dell'unicità della serie lineare completa determinata da un gruppo di punti. — In questo Capitolo svilupperemo, nei suoi tratti essenziali, la geometria delle serie lineari secondo l'indirizzo iperspaziale, dovuto a SEGRE e a CASTELNUOVO, cui accennammo alle pagg. 103 e 169.

Il punto di partenza è costituito sempre, com'è naturale, dal concetto di serie lineare completa (cfr. colle notizie bibliografiche di pag. 103). Ecco la via seguita da SEGRE per arrivare a tale concetto.

Sulla curva irriducibile C sieno date due serie lineari g^r_n, $g^{r'}_n$, prive di punti fissi, aventi un gruppo (totale) G_n, di n punti, in comune. Assunti in uno spazio S_ρ a $\rho=r+r'+1$ dimensioni, due spazi indipendenti S_r, $S_{r'}$, costruiamo in essi rispettivamente le curve Γ, Γ' (semplici o multiple), d'ordine n, imagini proiettive delle serie date. Le Γ, Γ' son riferite birazionalmente, e la rigata F, riempita dalle rette che congiungono i punti omologhi di Γ, Γ', è birazionalmente equivalente a Γ, Γ' e a C.

Un iperpiano di S_ρ, passante per lo spazio $S_{r'}$, sega F lungo la curva Γ' e ulteriormente in n generatrici, che congiungono i punti ove quell'iperpiano sega Γ, coi punti corrispondenti di Γ'. Similmente si comportano gl'iperpiani passanti per S_r. La rigata F risulta dunque, intanto, d'ordine $2n$.

Il gruppo G_n, comune alle g^r_n, $g^{r'}_n$ date su C, ha per imagine su Γ un gruppo di n punti ed un altro gruppo di n punti su Γ': gruppi segati sulle Γ, Γ' rispettivamente da iperpiani S_{r-1}, $S_{r'-1}$ degli spazi S_r, $S_{r'}$, cui quelle curve appartengono, e congiunti da n generatrici di F.

Condotto un iperpiano generico per i suddetti spazi S_{r-1}, $S_{r'-1}$ (cioè per lo $S_{\rho-2}$ che li congiunge), esso non conterrà nè S_r, nè $S_{r'}$ e segherà F, oltre che nelle n generatrici su indicate, lungo una curva Γ'', d'ordine n, che sarà una direttrice della rigata, incontrante in un punto una generica generatrice. Pertanto Γ'' risulterà birazionalmente equivalente a C.

Se assumiamo la rigata F come modello dell'ente ∞^1 C, le g_n^r, $g_n^{r'}$ (serie di gruppi di generatrici) vengono staccate su F rispettivamente dagli $S_{\rho-1}$ passanti per $S_{r'}$, S_r; e quindi gli stessi $S_{\rho-1}$ segheranno su Γ'' i gruppi delle g_n^r, $g_n^{r'}$ corrispondenti alle date.

E poichè tali g_n^r, $g_n^{r'}$ di Γ'' son contenute nella serie lineare d'ordine n segata su Γ'' dagli $S_{\rho-1}$ di S_ρ, si conclude che le serie date su C appartengono ad una medesima serie d'ordine n, più ampia di entrambe.

Il risultato si estende alle serie lineari con punti fissi per via analoga a quella riferita, che però non stiamo per brevità ad esporre (¹). Si arriva così al teorema dimostrato a pag. 100, donde deriva, come conseguenza, l'unicità della serie completa che contiene totalmente una data serie lineare (pag. 101).

Un'altra via geometrica per conseguire lo stesso risultato è quella indicata da CASTELNUOVO (²) e da BERTINI (³).

Sopra una curva irriducibile C consideriamo due serie g_n^1, g_m^1, privi di punti fissi, che non abbiano infinite coppie comuni (per guisa cioè che i gruppi delle serie date, che passan per un generico punto di C, non abbiano in conseguenza altri punti comuni). Riferiamo proiettivamente i gruppi delle due serie a due fasci di raggi di centri P, Q, situati in un piano π.

Dato un punto M variabile su C, resta determinato in π il punto R comune ai raggi dei fasci P, Q, che corrispondono ai gruppi di g_n^1, g_m^1 passanti per M. Variando M su C, il punto R descrive una curva Γ, birazionalmente equivalente a C.

Fra i fasci P, Q nasce altresì, in conseguenza, una corrispondenza algebrica (m, n), giacchè, dato un generico raggio di P, resta determinato il gruppo omologo di g_n^1 e vi sono n gruppi di g_m^1 che hanno con esso un punto comune; i

(¹) Cfr. SEGRE, *Introduzione*, n. 54.

(²) Torino Atti **24**, 348 (1889).

(³) Torino Atti **26**, 118 (1890).

raggi di Q imagini di tali gruppi di g_m^1 son quelli che si assumono come omologhi del raggio considerato di P. Viceversa, un raggio generico di Q proviene da m raggi di P.

La curva Γ si chiama la *curva della corrispondenza* (m, n) fra i fasci P, Q (¹).

Si può sempre supporre, senza restrizione, che in tale corrispondenza la retta PQ non sia nè di diramazione nè multipla; bastando all'uopo, ove una di tali particolarità si verificasse, assoggettare uno dei fasci ad una trasformazione proiettiva in sè, che rimuovesse l'inconveniente.

È facile allora verificare che l'ordine μ di Γ eguaglia $m+n$. Diciamo infatti s, s' le molteplicità dei punti P, Q per Γ. Un raggio generico per P sega Γ, fuori di P, negli n punti d'intersezione di quello coi raggi omologhi di Q; e similmente dicasi di un raggio generico per Q. Onde:

$$\mu = n + s = m + s'.$$

D'altro canto gli n punti ove una retta generica a per P sega Γ fuori di P, quando a tende alla retta PQ, tendono tutti a Q su n rette, che son distinte fra loro e da PQ, perchè questa retta non è nè di diramazione nè unita. Dunque la retta PQ non sega Γ fuori di P, Q e non è tangente ad alcuno dei rami di Γ uscenti da Q, e similmente da P. Epperò risulta $\mu = s + s'$. Questa relazione, confrontata colle precedenti, porge $\mu = m + n$, $s = m$, $s' = n$.

Si osserverà, per quanto non giovi per gli scopi immediati, che le tangenti in Q a Γ son n rette distinte (omologhe del raggio PQ, pensato come appartenente a P) e ciascuna di esse ha molteplicità d'intersezione $n+1$ con Γ, in P. Analogamente dicasi del punto m-plo Q (²).

Suppongasi ora che le serie date su Γ abbiano lo stesso ordine n $(m = n)$ e che vi sia un gruppo totale G_n, ad esse comune. A questo risponderà un raggio di P ed un raggio di Q, segantisi in un punto O, imagine simultanea degli n punti di G_n (per guisa che O sarà un punto n-plo di Γ, origine

(¹) Cfr. le « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 100; BERTINI, *Iperspazi*, pag. 478.

(²) Nelle « Vorlesungen » dell'Autore la curva Γ viene usata (pag. 103) per provare che un punto α-plo del gruppo jacobiano di una g_n^1 conta per $\alpha-1$ punti doppi (pag. 113 di questo Trattato).

di n rami lineari, se i punti di G_n sono distinti). Orbene, le coniche passanti pei punti O, P, Q segano Γ, fuori dei tre punti n-pli, in $4n - 3n = n$ punti, e la g_n^2 da esse staccata su Γ contiene totalmente le date g_n^1, perchè fra tali coniche ve ne sono di quelle spezzate nella retta fissa OQ e in una retta per P oppure nella retta fissa OP e in una retta per Q.

Resta così provato che le due g_n^1, aventi un gruppo totale comune, son contenute in una g_n più ampia.

Il procedimento si può variamente estendere a due serie di dimensione qualunque, aventi un gruppo totale comune, mediante la costruzione di un opportuno modello proiettivo della curva data C, in uno spazio di conveniente dimensione [1]; e si possono anche escogitare espedienti per concludere nel caso di serie aventi infinite coppie comuni (il modello che si costruisce risulta una curva multipla) o nel caso di serie con punti fissi. Ma su ciò non ci tratteniamo, intendendo soltanto d'indicare, come si è detto, le linee essenziali del metodo iperspaziale.

94. Nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch. — Come abbiamo accennato a pag. 254, la formula (15) di pag. 252 è di fondamentale importanza nello sviluppo della geometria delle serie lineari, secondo il metodo di Segre-Castelnuovo. Da Schubert (cfr. colla pag. 253) essa è stata dimostrata col principio di corrispondenza di Chasles, cioè in modo elementare, che non presuppone concetti elevati di geometria sopra una curva, quali son quelli di cui noi abbiamo fatto uso nel n. 81. E poichè il caso che interessa per la geometria delle serie lineari è precisamente quello nel quale trattasi di trovare il numero $Z_{r,n}$ dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g_m^1, date sopra una curva C, di genere p, così Castelnuovo ricalcolò questo numero [2] con metodi numerativi elementari, il cui fondamento è costituito in sostanza dalle formule del Veronese (pag. 141).

Noi non ci fermeremo ad esporre questi modi di deduzione del numero $Z_{r,n}$, giacchè essi interesserebbero nel solo caso in cui si volesse trattare *ex novo*, in modo autonomo, la geometria delle serie lineari col metodo iperspaziale.

[1] Cfr. Castelnuovo, l. c., pag. 349; Bertini, l. c.

[2] Ved. la citazione a pag. 254.

Dalla (15) dunque, nel caso di una g_n^r e di una g_m^1, si trae tenuto conto del numero $d = 2(m + p - 1)$ dei punti doppi di g_m^1:

$$Z_{r,n} = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p.$$

Una prima conseguenza importante si deduce da questa formula. Finchè il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni alle g_n^r, g_m^1 è finito, esso non che può esser espresso da $Z_{r,n}$, epperò risulta $Z_{r,n} \geq 0$, cioè:

$$\frac{m-1}{r}(n-r) \geq p.$$

Pertanto, *se*

$$(1) \qquad p > \frac{m-1}{r}(n-r),$$

la g_n^r *e la* g_m^1 *avranno infiniti gruppi comuni di* $r+1$ *punti* [1].

Ne segue che *quando*

$$n - r < p \quad ed \quad m - 2 < r,$$

la g_m^1 *è contenuta parzialmente nella* g_n^r*; anzi ogni gruppo di* g_m^1 *offre al più* $m-1$ *condizioni ai gruppi di* g_n^r *che debbon contenerlo* (è neutro di specie almeno eguale ad 1).

Basta all'uopo dimostrare che un gruppo H di $r - m + 1$ punti arbitrari di C ed un gruppo di g_m^1, costituiscono insieme un gruppo di g_n^r. E difatti, aggiungendo alla g_m^1 il gruppo fisso H, si ottiene una g_{r+1}^1, il cui ordine soddisfa alla (1) [in cui leggasi $r+1$ al posto di m], epperò tale g_{r+1}^1 è contenuta nella g_n^r.

Anche questo teorema trovasi in Castelnuovo [2]. Ed è ottenuto col ragionamento da noi riferito, salvo la forma proiettiva che il ragionamento stesso assume, pel fatto che Castelnuovo prende come serie g_n^r quella delle sezioni iperpiane di una curva d'ordine n dello S_r. Analoga cosa deve dirsi della proposizione successiva.

Se sulla curva C, *di genere* p, *son date una* g_n^r *ed una* g_m^s $(s \geq 1)$, *per le quali*

$$n - r < p, \quad m - s - 1 < r,$$

[1] Castelnuovo, l. c., pag. 353.

[2] L. c., pag. 356.

un gruppo della g^s_m *presenta* $m-s$ *condizioni al più ai gruppi di* g^r_n *che debban contenerlo* (è neutro almeno di specie s).

Fissati su C $s-1$ punti generici P, consideriamo la serie residua del gruppo dei P rispetto alla data g^s_m. È una g^1_{m-s+1}, la quale soddisfa, insieme a g^r_n, al teorema precedente, epperò un suo gruppo generico offre $m-s-\delta$ ($\delta \geq 0$) condizioni ai gruppi di g^r_n. In un gruppo H di g^1_{m-s+1} scegliamo $m-s$ punti, che offrano esattamente $m-s-\delta$ condizioni ai gruppi di g^r_n, e diciamo G_{m-s} il gruppo dei punti scelti; G_s il gruppo formato dal punto rimanente di H e dai punti P. Il gruppo G_{m-s}, insieme ad un punto qualunque di G_s, dà un gruppo di una g^1_{m-s+1} residua dei restanti $s-1$ punti di G_s, rispetto a g^s_m; cioè un gruppo che presenta $m-s-\delta$ condizioni ai gruppi di g^r_n.

Ma poichè già il gruppo G_{m-s} offre $m-s-\delta$ condizioni, si conclude che tutti i gruppi di g^r_n passanti per G_{m-s} contengono in conseguenza G_s, epperò tutti i punti del generico gruppo H della primitiva g^1_{m-s+1}.

Il teorema dimostrato costituisce il punto di partenza per la deduzione del teorema di RIEMANN-ROCH e dei collaterali: nella trattazione di CASTELNUOVO (l. c.) riprodotta con qualche semplificazione in SEGRE (Introduzione, n. 72 e segg.) si fa uso sistematico del linguaggio iperspaziale; ma si può dare all'esposizione un andamento più elementare e più rapido nel modo che segue [1].

Prendiamo come modello proiettivo di C una curva piana d'ordine m, con soli nodi, in numero di d (pag. 77), cosicchè il genere p di C, definito come nel n. 34, risulterà espresso dalla formula di CLEBSCH (pag. 123):

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d.$$

Le aggiunte d'ordine $m-3$ a C, segano sulla curva, fuori dei nodi, gruppi della serie canonica, eppertanto questa (completa) è una $g^{p-1+\delta}_{2p-2}$, con $\delta \geq 0$ (pag. 125). Inoltre le aggiunte d'ordine l segano su C, fuori dei nodi, una $g^{r_l}_{m_l}$ di ordine $m_l = ml - 2d$ e di dimensione

$$(2) \qquad r_l \geq \frac{l(l+3)}{2} - d - \frac{(l-m)(l-m+3)}{2} - 1 = m_l - p.$$

[1] Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica*, vol. III, pag. 84.

Se ne deduce che fra l'ordine n e la dimensione r di una qualsiasi g^r_n completa di C, sussiste sempre la relazione:

$$(3) \qquad r \geq n - p.$$

Invero [1], una g^r_n può imaginarsi staccata su C dalle aggiunte d'un ordine l convenientemente alto, bastando aggregare alle curve del sistema lineare che stacca la data serie, una aggiunta fissa. Dopo ciò g^r_n sarà l'insieme dei resti di certi k punti fissi di C rispetto alla $g^{r_l}_{m_l}$ segata su C da quelle aggiunte. Onde avremo:

$$n = m_l - k, \quad r \geq r_l - k,$$

dalle quali, tenuta presente la (2), segue la (3).

Ciò premesso, applichiamo il teorema di CASTELNUOVO, ultimamente dimostrato, alla serie canonica $g^{p-1+\delta}_{2p-2}$ e ad una qualsiasi g^r_n completa, prese rispettivamente in luogo delle serie g^r_n, g^s_m considerare nell'enunciato del teorema. Appena sia $n - r < p$, risultano verificate le due disuguaglianze

$$(2p-2) - (p-1+\delta) < p, \quad n - r - 1 < p - 1 + \delta,$$

che stanno a fondamento del teorema, onde si conclude che ogni serie g^r_n avente $r > n - p$ è contenuta nella serie canonica (è *speciale*). Ma di più, se fosse $\delta > 0$, la seconda disuguaglianza fondamentale del teorema sarebbe soddisfatta anche per una g^r_n avente $n - r = p$, e quindi la serie canonica conterrebbe ogni serie completa g^r_n, il che è evidentemente assurdo (basta p. es. prendere $n > 2p - 2$). Dunque dev'essere $\delta = 0$, cioè la serie canonica completa è una g^{p-1}_{2p-2}, epperò essa è tutta segata dalle aggiunte d'ordine $m-3$ (cfr. colle pagg. 124-25), che son ∞^{p-1} e non di più.

Consideriamo ora una g^r_n completa speciale, avente cioè $r > n - p$. Poichè essa è contenuta nella serie canonica, vi saranno $\infty^{r'}$ resti $G_{n'}$ di un gruppo G_n di g^r_n, rispetto alla serie canonica, ed essi costituiranno una $g^{r'}_{n'}$ completa, con

$$n' = 2p - 2 - n, \quad r' = p - 1 - n + r + \delta \qquad (\delta \geq 0),$$

e ciò perchè, a norma del teorema di CASTELNUOVO, ogni gruppo della g^r_n presenta al più $n - r$ condizioni ai gruppi canonici obbligati a contenerlo.

[1] Cfr. SEGRE, *Introduzione*, n. 65.

Mutando le veci delle due serie, che son mutuamente residue rispetto alla serie canonica, avremo similmente:

$$n = 2p - 2 - n', \quad r = p - 1 - n' + r' + \delta' \qquad (\delta' \geq 0),$$

e sommando a membro a membro le espressioni di r, r' verrà, a riduzioni fatte:

$$\delta + \delta' = 0,$$

donde $\delta = 0$, $\delta' = 0$. Si conclude così [1] col *teorema di* RIEMANN-ROCH, già dimostrato altrimenti a pag. 157. L'indice di specialità i della g_n^r risulta eguale ad $r' + 1$.

95. Ancora sul teorema del resto sotto forma proiettiva (pag. 153). — Giunti in tal guisa al teorema culminante della teoria delle serie lineari, la parte restante si sviluppa come nel Cap. V. Giova trattenersi un momento soltanto sul teorema proiettivo del resto [2].

Tutto riducesi a provare (n. 44) che le curve aggiunte di un dato ordine l, alla curva piana C (dotata di d nodi), di ordine m, segano su C (fuori dei nodi) una serie lineare completa (cfr. colla pag. 151).

Se infatti $l = m - 3 + \alpha$ ($\alpha > 0$), l'ordine m_l della $g_{m_l}^{r_l}$ segata dalle aggiunte d'ordine l, viene espresso da:

$$m_l = ml - 2d = 2p - 2 + \alpha m,$$

e la dimensione da:

$$r_l \geq m_l - p, \quad \text{cioè:} \quad r_l \geq p - 2 + \alpha m.$$

Ora, poichè questa serie contiene parzialmente la serie canonica (e non vi è dunque contenuta), non può essere $r_l > m_l - p$; epperò è $r_l = m_l - p$ e la serie risulta completa (perchè se no la serie completa avrebbe dimensione $> m_l - p$).

Se $l = m - 3$ già abbiamo veduto, nel n. prec., che la serie lineare segata su C è la serie canonica completa.

Se infine $l = m - 3 - \alpha$ ($\alpha > 0$), la serie risulta completa per la cagione addotta a pag. 151.

L'idea di applicare la formula (15) di pag. 252 per la deduzione di proprietà della serie lineari collegate al teorema di RIEMANN-ROCH, spetta a SEGRE [Ist. Lomb. Rend. (1888)]. Lo sviluppo completo e sistematico della teoria è di CASTELNUOVO (l. c.). Perfezionamenti ulteriori furon portati, nei lavori citati, da SEGRE e da BERTINI.

(1) SEGRE, *Introduzione*, § 19.
(2) SEGRE, *Introduzione*, § 18.

CAPITOLO OTTAVO

La geometria delle serie lineari secondo il metodo algebrico.

§ 1. - TRASFORMAZIONI CREMONIANE PIANE.

96. Trasformazioni razionali di un piano in un altro e loro elementi fondamentali. — Indicate con (x_1, x_2, x_3) le coordinate omogenee di un punto x di un piano X e con (x_1', x_2', x_3') le coordinate omogenee di un punto x' di un piano X', poniamo fra i due piani la trasformazione razionale rappresentata dalle formule:

$$(1) \qquad \rho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ove le f son forme ternarie dello stesso ordine n.

Sappiamo già (Introd., IV) che, mentre x descrive X, il punto x' descrive tutto il piano X', allora e solo allora che il sistema lineare Σ:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

sia ∞^2 (una *rete*), cioè che le f sieno linearmente indipendenti; e inoltre che la rete sia irriducibile, ovvero (pag. 45) che due sue curve generiche si taglino, fuori dei punti base, in un numero finito $\nu \geq 1$ di punti (variabili colle due curve) [1].

Se la rete fosse invece composta colle curve di un fascio, il punto x' descriverebbe su X' una curva razionale, i cui punti corrisponderebbero razionalmente alle curve del fascio.

(1) Si astrae senz'altro dal caso in cui le curve di Σ hanno una componente fissa, perchè, essendo le f_i determinate a meno di un fattore di proporzionalità, una tal parte fissa non ha influenza alcuna e se ne può quindi prescindere.

Lasciamo in disparte questo caso, che non interessa, perchè non conduce ad una corrispondenza fra le totalità dei punti dei due piani.

La corrispondenza fra i punti di X, X' ha gli indici $(\nu, 1)$, cosicchè, se $\nu > 1$, ai punti di X' corrispondon su X i gruppi di un'involuzione di ordine ν, generata dalla rete Σ. Si può anche dire, se $\nu > 1$, che la (1) pone una *trasformazione multipla* fra i due piani, ogni punto del *piano ν-plo X'* rappresentando ν punti di X.

La (1) muta le curve di Σ nelle rette del piano X', e la corrispondenza subordinata tra quelle curve e queste rette, considerate come elementi di due enti lineari ∞^2, è un'omografia, perchè una curva ed una retta omologhe corrispondono ai medesimi valori dei parametri λ.

Sicchè *geometricamente una trasformazione razionale fra piani può definirsi ponendo un'omografia fra le rette di un piano X' e le curve di una rete irriducibile, di grado $\nu \geq 1$; del piano X. Un punto generico x di X determina entro la rete un fascio, al quale corrisponde in X' un fascio di rette, il cui centro x' si assume come omologo di x.*

I punti fondamentali della trasformazione (pag. 7) situati sul piano X, sono i punti base della rete Σ. Approfondiamo le proprietà di questi punti.

Sia O uno di essi e imaginiamo una curva analitica qualunque γ del piano X, uscente da O. Un punto x di γ, distinto dai punti fondamentali, è punto base di un fascio H ben determinato di Σ, cui corrisponde in X' un fascio H' di rette, avente il centro nel punto x' omologo di x. Mentre x muovesi su γ, tendendo ad O, il fascio H tende ad una posizione limite ben definita; e cioè al fascio delle curve di Σ, che toccano in O la curva γ. Pertanto anche x' tende ad una posizione limite determinata. Fa eccezione soltanto il caso in cui tutte le curve di Σ tocchino in O la curva γ. Allora il punto x', omologo del punto variabile x, non ha una posizione limite definita.

Nel caso generale si dirà che la posizione limite di x' è *il punto omologo del punto infinitamente vicino ad O, nella direzione della tangente a γ*; nel caso eccezionale questo punto infinitamente vicino ad O si considererà ancora come fondamentale.

Il luogo dei punti x' corrispondenti a punti infinitamente vicini ad O in direzioni generiche, è in generale una curva (che può in particolare ridursi ad un punto); una curva razionale, perchè i suoi punti son razionalmente determinati dalle rette dal fascio O. È la *curva fondamentale* Ω' corrispondente al punto fondamentale O.

Ma se tutte le curve di Σ toccano in O la curva γ, si posson considerare quelle che hanno un contatto più intimo con γ in O, in guisa da determinare, mediante la ulteriore condizione di contatto, un fascio entro la rete Σ. A questo fascio risponderà un punto determinato x' di X', che si dovrà assumere come l'omologo di un punto infinitamente vicino ad O lungo γ; però di un punto infinitamente vicino, in un intorno di ordine sufficientemente elevato.

Tutto ciò viene meglio chiarito ove si faccia intervenire la rappresentazione analitica del *ramo* γ, di origine O, e si determini la molteplicità d'intersezione di γ in O, colla curva generica della rete Σ (nn. 24-25). Questa molteplicità è necessariamente un numero intero finito (chè altrimenti tutte le curve di Σ avrebbero in comune il ramo γ, e quindi la curva generica di Σ non sarebbe irriducibile). La condizione perchè essa aumenti di un'unità (almeno) si traduce in un'equazione lineare fra i parametri λ; onde si ha un fascio di curve di Σ, che hanno con γ in O molteplicità d'intersezione superiore alla generica.

Pei nostri scopi immediati, non occorre però che approfondiamo fino a questo punto l'argomento; chè anzi dobbiamo supporre di non averne neppure i mezzi, perchè vogliamo, tra l'altro, ridimostrare la possibilità di sciogliere le singolarità di una curva ed arrivare quindi nuovamente per questa via alla nozione di ramo.

Ci basteranno invece le seguenti considerazioni.

Poniamo in O il punto di coordinate $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1)$, e supponiamo si tratti di un punto base s-plo della rete Σ. Poichè come curve $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ si posson prendere tre curve generiche della rete, sarà:

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = x_3{}^{n-s}\theta_s^{(i)}(x_1, x_2) + x_3{}^{n-s-1}\theta_{s+1}^{(i)}(x_1, x_2) + \dots,\quad (i = 1, 2, 3)$$

ove le θ denotano forme binarie degli ordini indicati dai loro indici.

Le coordinate del punto x variabile sopra una retta per O, son espresse da:

$$x_1 = \lambda\xi_1,\quad x_2 = \lambda\xi_2,\quad x_3 = 1,$$

in cui ξ_1, ξ_2 son costanti, dipendenti dalla retta scelta, e λ è un parametro variabile col punto.

Sostituendo queste espressioni nelle (1) viene:

$$\rho x_i' = \lambda^s \theta_s^{(i)}(\xi_1, \xi_2) + \lambda^{s+1}\theta_{s+1}^{(i)}(\xi_1, \xi_2) + \dots \quad (i=1, 2, 3);$$

ovvero, sopprimendo il fattor comune λ^s:

$$\tau x_i' = \theta_s^{(i)}(\xi_1, \xi_2) + \lambda\theta_{s+1}^{(i)}(\xi_1, \xi_2) + \dots \quad (i=1, 2, 3),$$

dove τ è sempre un fattore di proporzionalità.

Se facciamo tendere a zero λ, il punto x' tende al punto di coordinate

(2) $$\tau x_i' = \theta_s^{(i)}(\xi_1, \xi_2). \qquad (i=1, 2, 3)$$

Quando la retta data ruota attorno ad O, cioè quando varia il rapporto $\xi_1 : \xi_2$, le (2) rappresentano parametricamente il luogo del punto x', corrispondente al punto x, variabile nell'intorno di 1° ordine di O. Il luogo (2) è pertanto una curva razionale (pag. 34). Tale curva riducesi a un punto allorchè le $\theta_s^{(1)}(\xi_1, \xi_2)$, $\theta_s^{(2)}(\xi_1, \xi_2)$, $\theta_s^{(3)}(\xi_1, \xi_2)$ hanno rapporti costanti, cioè quando esse differiscono soltanto per un fattore costante. Poichè però la equazione

$$\theta_s^{(i)}(x_1, x_2) = 0$$

rappresenta le tangenti alla curva $f_i = 0$ in O, così il caso eccezionale segnalato potrà presentarsi soltanto quando le tre curve $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, epperò tutte le curve della rete, hanno in O le medesime tangenti fisse. Dunque:

Mediante la trasformazione razionale (1) *ai punti del piano* (x_1, x_2, x_3), *situati nell'intorno di 1° ordine di un punto fondamentale, corrispondono sul piano* (x_1', x_2', x_3'), *i punti d'una curva razionale. Fa eccezione soltanto il caso in cui le curve* $f_i = 0$ *hanno nel punto fondamentale le stesse tangenti. In tal caso ad un punto infinitamente vicino al punto fondamentale, in una direzione generica, corrisponde un punto fisso del piano* (x_1', x_2', x_3').

Se le curve della rete hanno in O talune tangenti fisse e le altre variabili, a priori un punto infinitamente vicino ad O, nella direzione di una tangente fissa, ha l'omologo indeterminato. Ma poichè in tal caso le $\theta_s^{(i)}(x_1, x_2)$ $(i=1, 2, 3)$ hanno certi fattori lineari comuni, dopo soppressi questi fattori nelle (2) si ha un omologo perfettamente determinato per ogni punto infinitamente vicino ad O, in una direzione qualunque.

L'ordine della curva fondamentale Ω', *corrispondente ad un punto fondamentale* O, *eguaglia il numero delle tangenti variabili in* O *di una curva generica della rete* Σ.

Infatti ai punti comuni ad Ω' e ad una retta generica f' del piano X', corrispondono punti della curva f di Σ, omologa della retta f', situati nell'intorno di O; e poichè quelle intersezioni son tutte variabili, questi punti son pur essi mobili. Viceversa, ad ognuno di tali punti, corrisponde una di quelle intersezioni; onde queste ultime son tante quante le tangenti variabili di f in O.

Il caso in cui non vi siano tangenti variabili in O richiede, come si è detto, un esame più approfondito; chè allora curve fondamentali nascono da punti infinitamente vicini ad O in intorni di ordine superiore.

97. **Trasformazioni cremoniane piane.** — Supposto che la rete Σ, di cui al n. prec., sia omaloidica (pag. 8), cioè di grado $\nu = 1$ (pag. 47), la corrispondenza fra i punti dei due piani X, X', salvo le eccezioni corrispondenti ai punti fondamentali, è biunivoca, e si chiama una *trasformazione birazionale* o *cremoniana* (pag. 6).

Le formule (1) in questo caso posson invertirsi razionalmente e si può scrivere:

(3) $$\sigma x_i = \varphi_i(x_1', x_2', x_3') \qquad (i=1, 2, 3),$$

ove le φ son forme di uno stesso ordine n' e σ è *un* fattore di proporzionalità.

Come alle rette del piano X' corrispondono su X le curve $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ della rete Σ, così alle rette di X corrispondono su X' le curve della rete Σ', di equazione.

$$\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 = 0.$$

E alla proiettività che intercede fra le curve di Σ e le rette di X', è collegata la proiettività che intercede fra le curve di Σ' e le rette di X.

La trasformazione si genera ponendo una proiettività fra le curve di una qualunque rete omaloidica Σ di un piano X

e le rette di un piano X'; sicchè, dati i piani X, X' e la rete omaloidica Σ su uno, X, di essi, sono ∞^8 le trasformazioni cremoniane che mutano le rette dell'altro piano, X', nelle curve di Σ (tante quante le omografie fra due piani).

È facile verificare che *le curve che in ciascuno dei due piani corrispondono alle rette dell'altro, sono del medesimo ordine*, cioè che $n' = n$.

Siano infatti r, s due rette generiche dei piani X, X' e φ, f le curve delle reti Σ', Σ che corrispondon rispettivamente ad r, s, mediante la data trasformazione cremoniana. Agli n punti comuni ad r, f, punti che son tutti mobili, al variare di r, s, corrispondono gli n' punti variabili comuni alle φ, s: dunque $n' = n$.

Quest'ordine comune delle curve delle due reti omaloidiche Σ, Σ', si chiama *ordine della trasformazione*. Le omografie son trasformazioni cremoniane di 1° ordine; poi vengono le trasformazioni quadratique (pag. 8); poi le trasformazioni cubiche; ecc.

Una trasformazione cremoniana, la quale sia biunivoca senza eccezioni, è un'omografia.

Questa proprietà, come del resto le precedenti, valgono (cogli opportuni adattamenti di linguaggio) anche per trasformazioni cremoniane fra due spazî S_r: X, X'. Dimostriamola appunto per una trasformazione fra due spazî ad r dimensioni, sul fondamento del teorema di Bézout (pag. 53).

Agl'iperpiani di X corrispondono in X' forme di un sistema lineare omaloidico ∞^r, Σ', i cui punti base (se esistono), essendo la corrispondenza biunivoca senza eccezioni, non posson esser fondamentali. Ciascuno di essi deve aver cioè *un* solo omologo. Ora i punti base di Σ' costituiscono una varietà algebrica V', ad $r-2$ dimensioni, completa intersezione di r forme generiche di Σ'. Alla V' corrisponde in X una varietà V, di dimensione $r-2$.

Pertanto una retta generica di X non incontra V, e quindi ad essa corrisponde in X' una curva razionale di un certo ordine m, la quale non passa pei punti base di Σ' e incontra perciò la generica forma di Σ', che sia d'ordine n, in mn punti tutti variabili. Ma d'altronde questi non sono che gli omologhi dei punti comuni alla retta considerata di X e ad un iperpiano generico dello stesso spazio, dunque $mn = 1$; epperò $m = n = 1$ e la nostra trasformazione è un'omografia.

Insomma *in una trasformazione cremoniana non omografica i punti fondamentali (e le varietà fondamentali di dimensione $r-1$) non posson mancare.*

Osservazione. — Si deduce dal teorema precedente una nuova dimostrazione della proprietà stabilita a pag. 68, che una corrispondenza birazionale fra due curve algebriche irriducibili D, D', appartenenti a spazi ad r dimensioni X, X', la quale muti le sezioni iperpiane dell'una nelle sezioni iperpiane dell'altra, è un'omografia.

Infatti fra gl'iperpiani di X, X' nasce una corrispondenza cremoniana, che è biunivoca senza eccezioni, epperò è una omografia.

98. **Trasformazioni quadratiche piane.** — Studiamo con maggiore diffusione le trasformazioni cremoniane più semplici, dopo le omografie; e cioè le trasformazioni quadratiche.

Indichiamo ancora con Σ, Σ' le reti omaloidiche di coniche che, mediante la data trasformazione quadratica T (brevemente scriveremo t. q.), corrispondono rispettivamente alle rette dei piani X', X.

Due coniche generiche di Σ debbon segarsi in un sol punto variabile; quindi vi saranno tre punti base, distinti o no. Se si hanno tre punti base distinti, T chiamasi una trasformazione quadratica *generale*. Di regola useremo t. q. generali, epperò non ripeteremo sempre l'attributo. Indicheremo invece, in modo esplicito, quando ci occorra di considerare trasformazioni quadratiche *speciali*, per le quali la rete Σ è costituita da coniche tangenti fra loro in un punto dato e passanti per un altro punto generico, ovvero, più in particolare, da coniche osculantisi in un punto dato.

Indicati con A_1, A_2, A_3 i punti base distinti (e non allineati!) della rete Σ, assumiamoli come fondamentali per le coordinate, per guisa che le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 di A_1, A_2, A_3 sieno rispettivamente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Allora le coniche circoscritte al triangolo $A_1A_2A_3$ hanno una equazione della forma

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0\,;$$

cosicchè le tre forme f_1, f_2, f_3 che comparivan nelle (1), riduconsi, in questo caso, a x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2. Si hanno pertanto le formule

(4) $$\rho x_1' = x_2 x_3, \quad \rho x_2' = x_3 x_1, \quad \rho x_3' = x_1 x_2$$

della trasformazione. Le quali posson essere anche scritte:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

La trasformazione inversa (T^{-1}, se con T indicasi la corrispondenza da X ad X') è data dalle:

(5) $$\sigma x_1 = x_2' x_3', \quad \sigma x_2 = x_3' x_1', \quad \sigma x_3 = x_1' x_2',$$

ovvero:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'}.$$

Le (5) mostrano che alle rette di X corrispondono in X' le coniche della rete Σ' di equazione:

$$\mu_1 x_2' x_3' + \mu_2 x_3' x_1' + \mu_3 x_1' x_2' = 0,$$

cioè le coniche circoscritte al triangolo $A_1'A_2'A_3'$ dei punti $A_1'(1, 0, 0)$, $A_2'(0, 1, 0)$, $A_3'(0, 0, 1)$.

Perciò *quando son distinti i punti base della rete Σ, lo sono altresì quelli di Σ' (e viceversa).*

Nel punto fondamentale A_1 le coniche di Σ hanno una tangente variabile. Pertanto ad A_1 corrisponde una *retta fondamentale* (pag. 301). *È facile vedere che questa è la retta* $A_2'A_3'$. Infatti le coordinate di un punto variabile sopra una retta per A_1 son date, al variare di ε, dalle formule:

(6) $$x_1 = 1, \quad x_2 = \varepsilon\xi_2, \quad x_3 = \varepsilon\xi_3.$$

Il punto corrispondente di X' ha le coordinate

$$\tau x_1' = \varepsilon\xi_2\xi_3, \quad \tau x_2' = \xi_3, \quad \tau x_3' = \xi_2.$$

Per $\varepsilon = 0$ si ottiene dunque il punto $(0, \xi_3, \xi_2)$, che è situato sulla retta $A_2'A_3'$ $(x_1' = 0)$.

La corrispondenza fra i punti dell'intorno (di 1° ordine) di A_1 ed i punti della retta fondamentale $A_2'A_3'$, è proiettiva, perchè una direzione per A_1 è individuata dal rapporto $\xi_2 : \xi_3$ ed il punto corrispondente dal rapporto $x_2' : x_3' = \xi_3 : \xi_2$.

Ad una retta generica per A_1 risponde una conica spezzata nella retta fondamentale $A_2'A_3'$ corrispondente ad A_1 ed in una retta residua, passante per A_1'. La corrispondenza tra le rette per A_1, A_1' è manifestamente proiettiva.

Ai punti infinitamente vicini ad A_1 nelle direzioni delle rette A_1A_2, A_1A_3 ($\xi_3 = 0$, oppure $\xi_2 = 0$), corrispondono i punti A_3', A_2' di $A_2'A_3'$.

Pei punti fondamentali A_2, A_3 valgono conclusioni analoghe. Basta ruotar ciclicamente gl'indici. Scambiando poi le lettere senza apici nelle lettere con apici, si hanno le proprietà dei punti fondamentali del piano X'.

Consideriamo ora nel piano X una curva algebrica C, di ordine n, la quale passi pei punti fondamentali A_1, A_2, A_3, colle molteplicità rispettive $s_1(\geq 0)$, $s_2(\geq 0)$, $s_3(\geq 0)$.

Alle intersezioni variabili di C con una conica generica della rete Σ, che sono in numero di $2n - s_1 - s_2 - s_3$, corrispondon le intersezioni della curva C', omologa di C nella T, con una retta generica del piano X'. Dunque *la curva C' è di ordine $2n - s_1 - s_2 - s_3$.*

Inoltre *C' passa pei punti fondamentali A_1', A_2', A_3' colle molteplicità rispettive $n - s_2 - s_3$, $n - s_3 - s_1$, $n - s_1 - s_2$.* E invero, detta σ_1 la molteplicità di C' in A_1', una retta generica per A_1' taglia C' in $2n - s_1 - s_2 - s_3 - \sigma_1$ punti variabili, ai quali corrispondono le intersezioni variabili di C con una retta generica per A_1. Dunque:

$$2n - s_1 - s_2 - s_3 - \sigma_1 = n - s_1,$$

cioè $\sigma_1 = n - s_2 - s_3$.

Alla stessa conclusione si arriva osservando che ad ognuna delle $n - s_2 - s_3$ intersezioni di C colla retta A_2A_3, fuori delle s_2, s_3 intersezioni, che cadono rispettivamente nei punti A_2, A_3, corrisponde un punto di C' infinitamente vicino ad A_1', cioè una tangente a C' in A_1'. Anzi *la corrispondenza fra quelle $n - s_2 - s_3$ intersezioni e queste tangenti è proiettiva,* cosicchè sulle une e sulle altre si verifican le stesse coincidenze.

In particolare, se la retta A_2A_3 tocca C in A_2, avendo ivi colla curva molteplicità d'intersezione $s_2 + h$ $(h \geq 1)$, la curva C' toccherà in A_1' la retta $A_1'A_3'$ e questa tangente conterà h volte nel gruppo delle $n - s_2 - s_3$ tangenti a C' in A_1'.

Facciamo ancora qualche altra utile osservazione.

Ad ogni punto P, esterno alle rette fondamentali, che sia s-plo per la curva C, corrisponde un punto P', esterno alle rette fondamentali, ed s-plo per la curva C'.

Invero, alle $n-s$ intersezioni variabili di C con una retta mobile intorno a P corrispondono le intersezioni variabili di C' con una conica passante per P' e mobile nella rete Σ'. Ora le intersezioni assorbite dai punti base son in numero di $3n-2s_1-2s_2-2s_3$, quelle variabili son in numero di $n-s$; dunque sono

$$2(2n-s_1-s_2-s_3)-(3n-2s_1-2s_2-2s_3)-(n-s)=s,$$

le intersezioni assorbite da P', che risulta perciò s-plo.

A due rette distinte per P corrispondono due coniche distinte di Σ', le quali passano per P' (senza toccarsi). Dunque tante sono le rette tangenti a C in P, quante le coniche di Σ', e quindi le rette, tangenti a C' in P'. Pertanto, chiamato *punto s-plo ordinario* di una curva un punto s-plo colle s tangenti distinte, potremo dire che:

Se P è un punto s-plo ordinario della curva C, fuori delle rette fondamentali, il punto omologo P' è pure un punto s-plo ordinario di C'.

99. **Dilatazione dell'intorno di un punto multiplo di una curva.** — Data sopra un piano π una curva C, di ordine n, avente un punto s-plo O, di natura qualunque, tiriamo per O due rette (generiche), le quali seghino C in $n-s$ punti distinti fra loro e da O, e su di esse assumiamo (genericamente) i punti P, Q, in modo che la retta PQ seghi C in n punti distinti fra loro e da P, Q.

Poniamo indi una proiettività fra le coniche per O, P, Q e le rette di un altro piano π'. Nascerà così fra i due piani una t. q. T, della quale O, P, Q saranno i punti fondamentali su π. Su π' si avranno altri tre punti fondamentali distinti O', P', Q'.

Dal n. prec. si trae che la curva C', trasformata di C mediante T, ha l'ordine $2n-s$ e che possiede un punto n-plo *ordinario* in O' e due punti $(n-s)$-pli *ordinari* in P', Q'. Le tangenti in tutti questi punti son distinte dalle rette fondamentali. Quanto agli altri eventuali punti multipli di C, che, pel modo come furono scelti O, P, Q, son tutti fuori delle rette fondamentali, essi mutansi in punti di egual molteplicità per C' e colle stesse eventuali coincidenze fra le tangenti.

La natura dei punti multipli esterni alle rette fondamentali non viene per nulla alterata, nel senso che la corrispondenza subordinata da T fra due intorni superficiali di due punti omologhi, esterni alle rette fondamentali, è biunivoca senza eccezioni. Due punti omologhi di C, C', esterni alle rette fondamentali, si dirà che hanno *la stessa composizione* o che sono *punti singolari simili*, appunto perchè i loro intorni si corrispondon biunivocamente, senza eccezioni. Nel § successivo verrà precisato che cosa s'intende per composizione di una singolarità; qui si è inteso di introdurre una locuzione comoda, e semplicemente come locuzione essa verrà usata, finchè non se ne conosca il significato sostanziale. Basterà soltanto avvertire per ora che due punti singolari simili hanno la stessa molteplicità e lo stesso numero di tangenti distinte.

Nel passaggio da C a C' ogni punto multiplo di C si muta in un punto multiplo simile, salvo il punto multiplo O, il cui intorno di 1° ordine (insieme delle direzioni per O) si *dilata*, dando luogo a tutta una retta: la $P'Q'$. Al punto multiplo O, vengon sostituiti altri punti di C' (eventualmente multipli), che corrispondono a punti infinitamente vicini ad O, nelle varie direzioni. Tanti sono questi punti di C', quante le tangenti distinte di C in O. Si introducono poi in C' i punti multipli O', P', Q', che son punti multipli essenzialmente nuovi, *creati dalla trasformazione*; ma punti multipli ordinari.

La trasformazione agisce come un microscopio, che ingrandisca l'intorno di O, sostituendo addirittura ad esso un intera retta. La chiameremo, per questa ragione, *la dilatazione dell'intorno del punto multiplo O*. È s'intende che, quando parleremo di questa dilatazione, supporremo sempre che la scelta dei punti fondamentali P, Q sia fatta nel modo generale sopra indicato.

La prima considerazione delle trasformazioni quadratiche risale a Newton (1687), il quale colla descrizione organica delle coniche, studiata più diffusamente nel XIIX secolo da Mac Laurin (1720) e Braikenridge (1733), indicò il modo di trasformare una retta in una conica [ved. i « Complementi di Geometria proiettiva » dell'Autore (Bologna, Zanichelli, 1906), pag. 238 e segg.]. Ma in verità non era il concetto generale di trasformazione fra i punti di due piani, che intervenisse allora; sibbene soltanto una costruzione che permettesse di trasformare una retta in una conica. La trasformazione quadratica veniva fuori come una conseguenza secondaria. Al Poncelet (1822) è dovuta la considerazione della prima trasformazione quadratica, secondo il concetto generale di corrispondenza (la trasformazione di Poncelet si genera associando ad ogni punto di un piano il suo coniugato rispetto a due coniche). La inversione o trasformazione per raggi vettori reciproci o principio delle imagini elettriche di W. THOMSON (1845), è un caso particolare metrico delle trasformazioni quadratiche involutorie (due punti fondamentali sono i punti ciclici), del quale trovansi traccie in APOLLONIO, in VIÈTE (1600), in FERMAT (1679). La inversione fu studiata più ampiamente da DANDELIN (1822), PLÜCKER (1828), BELLAVITIS (1836), nonchè da W. THOMSON. MAGNUS [J. für Math. 8, 51 (1831); Sammlung von Aufgaben, ecc., **1**, 229 (Berlin, 1833)] considerò le t. q. definite da due equazioni bilineari fra le coordinate dei punti di due piani (coppie di punti reciproci rispetto a due date correlazioni). Nella Memoria del 1831 il MAGNUS credette di poter affermare che le sole trasformazioni birazionali fra due piani son omografiche o quadratiche; ma nella prefazione della citata « Sammlung » egli pose in rilievo l'esistenza di una trasformazione di quart'ordine, derivante dal prodotto di due trasformazioni quadratiche. Altre generazioni notevoli di t. q. son dovute a STEINER (1832) e a SEYDEWITZ (1846). La generazione di STEINER consiste nell'assumere come omologhi due punti di due piani (distinti) intersezioni con una retta appoggiata a due rette sghembe fisse (ved. i citati « Complementi » dell'Autore, pag. 289) e quella di SEYDEWITZ nel porre fra due fasci di raggi di un piano e due fasci dell'altro, due date proiettività, e nel chiamare omologhi due punti proiettati da coppie di raggi omologhi. Quando in ambedue le proiettività al raggio comune ai due fasci dell'un piano corrisponde il raggio comune ai due fasci dell'altro, si ha un'omografia, che così apparisce come caso limite di una t. q. All'esempio dato da MAGNUS di una trasformazione birazionale di ordine superiore al secondo, si aggiungeva nel 1859 un esempio più elevato ed utile dato da JONQUIÈRES [Comptes rendus, **49**, 542 (1859); Nouv. Ann. **8**$_2$, 97 (1864)] colle trasformazioni isologiche, che furon poi dette trasformazioni di JONQUIÈRES. La rete omaloidica corrispondente alle rette di un piano è in esse costituita da curve di ordine n con un punto base $(n-1)$-plo e $2n-2$ punti base semplici. La corrispondenza vien ottenuta generalizzando la proiezione sghemba di STEINER, associando cioè due punti di due piani distinti quando son intersezioni con una retta appoggiata ad una curva (razionale) sghemba di ordine n e ad una retta $(n-1)$-secante la curva. Si tratta dunque sempre di costruzioni aventi una carattere particolare e non ancora dominate da una concezione larga. La quale è posta innanzi per la prima volta dal CREMONA [Bologna Mem. **2**$_2$, 621 (1863); **5**$_2$, 3 (1864); Giorn. di Mat. **1**, 305 (1863); **3**, 269, 363 (1865)]. Egli considera il problema generale di costruire tutte le trasformazioni birazionali fra piani e scrive le due relazioni numerative che caratterizzano tali trasformazioni, indicando vari tipi particolari, che da esse si desumono. Affronta inoltre il problema degli elementi fondamentali, e stabilisce notevoli relazioni fra i loro ordini, come diremo più specificatamente in altro volume di questo Trattato. Perciò giustamente le trasformazioni birazionali fra piani o spazî si chiamano *cremoniane*. Più tardi (dal 1870 in poi) si considerarono trasformazioni birazionali fra spazi o iperspazî per opera di CAYLEY, CREMONA, NOETHER. Ma di ciò, come della possibilità di scindere ogni trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche, diremo in un altro volume.

§ 2. - SCOMPOSIZIONE DELLE SINGOLARITÀ DI UNA CURVA.

100. Scomposizione delle singolarità mediante una successione di trasformazioni quadratiche. Singolarità infinitamente vicine. — Sia, in un piano π, la curva algebrica C, irriducibile o riducibile, ma priva di parti multiple; ed n sia il suo ordine. Fissiamo l'attenzione sopra un punto s-plo O di C. Con una dilatazione (n. 99) trasformiamo C in una curva C' di un altro piano π' e sia o' la retta fondamentale di π' nella quale dilatasi l'intorno di O. Alle tangenti distinte $o_1, o_2, \ldots, o_l$ di C in O, che sono in numero di $l \leq s$, corrispondono proiettivamente i punti distinti $O_1', O_2', \ldots, O_l'$ della retta o'. Sia τ_i la molteplicità di o_i nel gruppo delle s tangenti di C in O, cioè la molteplicità del fattore lineare corrispondente a quella tangente nell'equazione complessiva di grado s delle tangenti in O, cosicchè $\sum_{i=1}^{l} \tau_i = s$. Allora il punto O_i' conterà τ_i volte nel gruppo delle s intersezioni di o' colla curva C', fuori dei punti fondamentali; epperò, denotata con s_i la molteplicità del punto O_i' per C', sarà certo $s_i \leq \tau_i$ e quindi anche:

$$\sum_{i=1}^{l} s_i \leq s.$$

Ne segue che, *se $l > 1$, ossia se C ha in O almeno due tangenti distinte, la trasformazione scioglie il punto s-plo O in punti di minor molteplicità della curva C'.*

Le altre singolarità di C, si ricordi, vengon mutate in singolarità simili di C' e non si introducon che tre nuovi punti multipli ordinari (n. 99).

Applicando una nuova dilatazione alla curva C', a partire dal punto s_i-plo O_i', questo punto si muterà in uno o più punti $O_{i1}'', O_{i2}'', \ldots$ della curva corrispondente C'', colle molteplicità rispettive $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$, sotto la condizione $\Sigma s_{ij} \leq s_i$; e così proseguendo.

I punti $O_1', O_2', \ldots, O_l'$ si dice che provengono da punti di molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_l$ per C, infinitamente vicini ad O nell'intorno di 1° ordine; i punti $O_{i1}'', O_{i2}'', \ldots$ da punti di molteplicità $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$ per C, infinitamente vicini ad O nell'intorno di 2° ordine; e così via.

Queste locuzioni son giustificate da ciò, che effettivamente la curva C può concepirsi come limite di una curva variabile, avente il punto s-plo O, e nella quale certi l punti, $O_1, O_2, \ldots, O_l$, multipli secondo $s_1, s_2, \ldots, s_l$, si avvicinano indefinitamente ad O; nello stesso tempo che certi altri punti $O_{i1}, O_{i2}, \ldots$, di molteplicità $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$, si avvicinano ad O_i; ecc.

Indicati invero con P, Q i due ulteriori punti fondamentali sul piano π, e con O', P', Q' i punti fondamentali su π' (sicchè $o' \equiv P'Q'$), assoggettiamo C' ad una piccola rotazione attorno ad O' e sia $\overline{C}$ la curva di π corrispondente alla nuova posizione $\overline{C}'$ di C'. La $\overline{C}$ è di ordine $2(2n-s)-n=3n-2s$ e possiede in O un punto $(2n-s)$-plo ordinario, perchè $\overline{C}'$ incontra la retta o' in $2n-s$ punti distinti. Inoltre $\overline{C}'$ possiede due punti $(n-s)$-pli ordinari, provenienti da quelli che prima cadevano in P', Q' ed l punti di molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_l$, che originariamente occupavan le posizioni $O_1', O_2', \ldots, O_l'$. Trattandosi di punti esterni a rette fondamentali, tanto a quei punti $(n-s)$-pli di $\overline{C}'$, come a questi l punti multipli, corrispondon singolarità simili di $\overline{C}$. Quando $\overline{C}'$ riprende la vecchia posizione C', la curva $\overline{C}$ si spezza nelle rette OP, OQ, da contarsi ognuna $n-s$ volte, e nella curva C, che torna ad avere il punto s-plo O, cui si son avvicinati indefinitamente gli l punti di molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_l$ che $\overline{C}$ possedeva, distinti da O.

Lo stesso può ripetersi per ciascuno dei punti multipli O_i' di C'; e così di seguito.

I punti multipli infinitamente vicini ad O risultano indipendenti dalle dilatazioni che successivamente eseguisconsi per definirli. Infatti le trasformazioni quadratiche fra due dati piani formano un sistema continuo (anzi una varietà algebrica irriducibile ∞^{14}), i cui parametri son quelli da cui dipendono i punti base d'una rete omaloidica di coniche su uno dei due piani e quelli da cui dipendon le omografie in sè dell'altro piano. Si può quindi passare con continuità da una delle ∞^{12} t. q. che dilatano l'intorno di 1° ordine di O, ad un'altra qualsiasi; ed in tale variazione continua le molteplicità dei punti $O_1', O_2', \ldots, O_l'$, che son numeri interi, debbon restare costanti. Similmente si conclude nei riguardi delle singolarità negl'intorni di ordine superiore al 1°.

101. Formula di Noether. — In verità, non resta escluso il dubbio che le singolarità infinitamente vicine rimangano legate alle t. q.; che cioè operando le dilatazioni degl'intorni successivi con trasformazioni cremoniane qualunque, possan trovarsi composizioni diverse per la singolarità O. Questo dubbio però si rimuove riflettendo che (come vedremo in altro volume) una trasformazione cremoniana può sempre scindersi in un prodotto di t. q. D'altro canto la formula, che ora esporremo, pel calcolo della molteplicità d'intersezione di due curve in un loro punto comune, conferisce alle singolarità infinitamente vicine un carattere geometrico intrinseco, indipendente dalle trasformazioni che servono a definirle [1].

Sieno C, D due curve piane, prive di parti comuni, aventi in O rispettivamente un punto s-plo ed un punto t-plo.

Dalla teoria elementare delle molteplicità d'intersezione di due curve piane (pag. 11) si sa che la molteplicità d'intersezione delle C, D in O è st o maggiore; st nel caso che le curve non abbiano alcuna tangente comune; maggiore nel caso contrario. Indichiamo con j la molteplicità d'intersezione incognita, così che:

$$j = st + j_1 \qquad (j_1 \geq 0),$$

e assoggettiamo le curve C, D ad una dilatazione, col punto fondamentale O. Siano C', D' le curve trasformate; $O_1', O_2', \ldots$ i punti della retta fondamentale $P'Q'$, corrispondente di O, i quali son gli omologhi delle tangenti distinte comuni alle C, D in O; e infine sieno $j_1', j_2', \ldots$ le molteplicità d'intersezione delle C', D' nei punti $O_1', O_2' \ldots$.

Sostituiamo a C una curva $\overline{C}$, dello stesso ordine, ad essa vicinissima, che abbia in O un punto s-plo, ma senza alcuna tangente comune con D; sicchè la molteplicità d'intersezione delle $\overline{C}$, D, in O, sarà esattamente st. Inoltre le $\overline{C}$, D avranno in comune j_1 punti, distinti fra loro e da O, i quali, col tendere di $\overline{C}$ a C, tenderanno ad O.

Pel significato stesso che la teoria elementare attribuisce al concetto di molteplicità d'intersezione, la curva $\overline{C}'$, trasformata di $\overline{C}$, essendo vicinissima a C', avrà j_1' intersezioni con D', vicine ad O_1', ma distinte fra loro e da O_1'; altre j_2' intersezioni, vicine ad O_2'; ecc. In conclusione le $\overline{C}'$, D'

[1] Per lo scopo che vogliam conseguire, non è del resto affatto necessario che le singolarità infinitamente vicine sieno svincolate dalle trasformazioni che le definiscono.

avranno $j_1' + j_2' + \ldots$ intersezioni vicine alla retta fondamentale $P'Q'$, ma a distanza finita dai punti di questa retta. Poichè queste intersezioni corrispondono alle j_1 comuni a $\overline{C}$, D, fuori di O, ma vicine ad O, sarà:

$$j_1 = j_1' + j_2' + \ldots.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per ogni punto O_h' comune alle C', D' e proveniente dalle tangenti comuni alle C, D in O, avremo:

$$j_h' = s_h t_h + \sum_k j_{hk}'',$$

dove s_h, t_h denotano le molteplicità rispettive delle C', D' in O_h' ed j_{hk}'' la molteplicità d'intersezione delle C'', D'' in un punto O_{hk}'' trasformato di O_h'; le C'', D'' essendo le trasformate di C', D' mediante una dilatazione col punto fondamentale O_h'. Così proseguendo si giunge alla *formula di* NOETHER:

$$j = st + \sum_h s_h t_h + \sum_{hk} s_{hk} t_{hk} + \ldots,$$

che fornisce la molteplicità d'intersezione di due curve C, D in un loro punto comune O, s-plo per l'una, t-plo per l'altra. Il primo sommatorio è esteso alle singolarità comuni alle due curve nell'intorno di 1° ordine di O; il secondo alle singolarità comuni nell'intorno di 2° ordine; e così via.

Nei riguardi delle intersezioni che assorbono, le singolarità infinitamente vicine si comportano dunque come se fossero distinte.

102. Scioglimento di un punto multiplo qualunque in punti semplici. — Data una curva piana C ed un suo punto multiplo O, eseguiamo una successione di dilatazioni degl'intorni di O, dilatando prima l'intorno di O in una retta o', uno dei punti multipli della curva trasformata C', situati in o' (ma diversi dai punti fondamentali), in un'altra retta; e così via. Se in questa successione di t. q. ogni punto che si soggetta a dilatazione ha sempre almeno due tangenti distinte, in virtù della disuguaglianza del n. 100, i punti multipli che a mano a mano troviamo, come trasformati di punti infinitamente vicini ad O, avranno molteplicità decrescenti e si arriverà pertanto a punti semplici.

Si potrà poi ricominciare l'operazione a partire da un altro dei punti multipli che erano provenuti dall'intorno di 1° ordine di O, ecc.; poi da un altro dei punti provenienti dall'intorno di 2° ordine; ecc.

In ciascuna di queste trasformazioni i punti che non si assumono come fondamentali si mutano in punti di egual molteplicità e collo stesso numero di tangenti distinte (n. 99), onde, se non ci si imbatte mai in punti multipli con una sola tangente, si perviene, con un numero finito di t. q., cioè colla trasformazione cremoniana prodotto di esse, a *sciogliere in punti semplici il punto multiplo dato O*. E si noti di più che in tal modo gli altri punti multipli di C, distinti da O, si son mutati in punti di egual molteplicità. Si sono introdotti, è vero, nuovi punti multipli, non corrispondenti affatto a punti multipli di C, ma tali punti multipli creati dalle trasformazioni son ordinari (n. 99).

Se ora anche gli altri punti multipli di C, distinti da O, avevano almeno due tangenti distinte, tal sarà dei punti corrispondenti biunivocamente a quelli nelle trasformazioni considerate di C. Ricominciando la serie delle t. q. per ognuno di questi altri multipli, nell'ipotesi che non si pervenga mai a punti singolari con una sola tangente, si arriverà in definitiva a sciogliere con una trasformazione cremoniana, prodotto di un numero finito di t. q., tutti i punti multipli di C, in punti semplici dell'ultima curva trasformata; la quale avrà perciò soltanto i punti multipli ordinari creati dalle trasformazioni.

Una trasformazione cremoniana opportuna ha dunque trasformato C in una curva dotata di singolarità ordinarie. Ma questo risultato è subordinato all'ipotesi che non si sia mai avuto da fare con punti multipli dotati di una sola tangente. Ora da quest'ipotesi ci si può liberare con un procedimento di cui conviene delineare anzitutto il concetto.

Se la curva data C, di ordine n, non ha parti multiple, essa non ha parti comuni colla prima polare D, rispetto a C, di un punto generico del piano. Pertanto il numero delle intersezioni delle due curve è finito ed espresso da $n(n-1)$. Qualora si provi che la polare D passa per tutti i punti multipli di C, tanto pei punti multipli distinti (*punti multipli propri*), quanto pei punti multipli infinitamente vicini a punti multipli propri, ne seguirà dunque, in base alla formula di

NOETHER, che il numero dei punti multipli distinti e infinitamente vicini di C è finito [minore di $n(n-1)$]; epperò non potrà darsi che la successione delle t. q. applicate a partire da un punto multiplo (ed in particolare da uno con una sola tangente) prosegua indefinitamente, senza che, a un certo momento, s'incontrino, come trasformati del punto iniziale, punti tutti semplici.

E si badi che, per giungere a tale conclusione, non occorre ancora di aver provato che la composizione di un punto multiplo mediante singolarità infinitamente vicine, ha un significato indipendente dalle trasformazioni (cfr. col n. 101), perchè se anche, per dannata ipotesi, la composizione dovesse mutare a seconda delle t. q. scelte e del loro ordine, resterebbe sempre il fatto che il cangiar della suddetta composizione non dovrebbe alterare il risultato finale del calcolo della molteplicità d'intersezione della C colla polare D, nel punto O, che si è impreso a trasformare. Onde non potrebbe mai avvenire che la catena delle t. q. potesse proseguire indefinitamente senza arrivare a punti tutti semplici, perchè se no quella molteplicità d'intersezione non sarebbe un numero finito, ben determinato. Quanto agli altri punti multipli di C, distinti da O, che si lasciano pel momento in disparte, la molteplicità d'intersezione di C, D in uno di essi è un numero finito, invariante di fronte alle t. q. che non sottopongono quel punto a dilatazioni [1]. Sicchè quel numero si ritrova tal quale dopo che si è sciolto in punti semplici il punto O; epperò, conseguito questo scopo, potremo analogamente operare sui trasformati dei punti multipli di C, distinti da O, sicuri di arrivare a sciogliere anch'essi in punti semplici con un numero finito di t. q.

Il procedimento delineato resterà completato in ogni sua parte, allorchè avremo dimostrato il teorema seguente:

La prima polare D di un punto generico P rispetto alla curva C passa colle molteplicità rispettive $s-1$, $s_h-1, \dots, s_{hk}-1, \dots$ (almeno) pel punto s-plo O di C e pei punti di molteplicità $s_h, \dots, s_{hk}, \dots$ situati negli intorni successivi di O.

Indicato con Q un secondo punto generico del piano π di C, assoggettiamo C ad una t. q. coi punti fondamentali O, P, Q, la quale muti π in un altro piano π'. Ivi sieno O',

[1] È una conseguenza ovvia del significato di molteplicità d'intersezione.

P', Q' i punti fondamentali della t. q. e C', D' le curve omologhe di C, D. A cagione della proiettività che intercede fra i punti di due rette omologhe dei fasci P, P', la curva D' risulta il luogo del gruppo polare di un punto M', variabile sulla retta $O'Q'$, rispetto al gruppo G' delle intersezioni *variabili* di C' colla retta $a' \equiv M'P'$.

Ponga nsi in O', P', Q' i punti fondamentali $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ delle cordinate x_1', x_2', x_3' di punto sul piano π'. Poichè C è di ordine n ed ha in O la molteplicità s, la curva C' è di ordine $m = 2n - s$ e possiede in P' la molteplicità $r = n - s$, ed ha perciò un'equazione della forma:

$$(7)\quad f(x_1', x_2', x_3') \equiv \varphi_r(x_2', x_3') x_1'^{m-r} + \varphi_{r+1}(x_2', x_3') x_1'^{m-r-1} + \dots = 0,$$

ove le φ son forme binarie degli ordini indicati dai loro indici.

Il gruppo G' vien rappresentato facendo, nella (7), $x_3' = \lambda x_2'$ e prescindendo dal fattore $x_2'^r$, che corrisponde alle r intersezioni assorbite da P'. Si ottiene così:

$$f(x_1', x_2', \lambda x_2') \equiv x_2'^r [\varphi_r(1, \lambda) x_1'^{m-r} + \varphi_{r+1}(1, \lambda) x_1'^{m-r-1} x_2' + \dots] = 0.$$

Il gruppo polare del punto $M' \equiv a'.\, O'Q'$ rispetto a G' è rappresentato da:

$$\frac{\partial}{\partial x_2'} [\varphi_r(1, \lambda) x_1'^{m-r} + \varphi_{r+1}(1, \lambda) x_1'^{m-r-1} x_2' + \dots] \equiv$$
$$\equiv \varphi_{r+1}(1, \lambda) x_1'^{m-r-1} + 2 x_2' \varphi_{r+2}(1, \lambda) x_1'^{m-r-2} + \dots = 0.$$

Ora il medesimo gruppo G' s'ottiene intersecando colla retta a', fuori del punto P', la curva

$$(8)\quad (m-r) f - x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} \equiv \varphi_{r+1}(x_2', x_3') x_1'^{m-r-1} +$$
$$+ 2 \varphi_{r+2}(x_2', x_3') x_1'^{m-r-2} + \dots = 0;$$

perciò questa è l'equazione della curva D', luogo di G'.

Più precisamente, l'equazione di D', che è una curva di ordine $2(n-1) - (s-1) = m - 1$, si ottiene dalla (8) sopprimendo il fattore x_2', che divide l'espressione a sinistra. E difatti, C' possiede in O' un punto di molteplicità $n = m - r$, onde, ponendo nella (7) $x_2' = 0$, essa deve ridursi ad $x_1'^{m-r} x_3'^r = 0$; pel che è necessario e sufficiente che nelle forme φ_{r+1}, $\varphi_{r+2}, \dots$

manchino i termini indipendenti da x_2'. Resta così provato che

$$(m-r)f - x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} \equiv x_2'\psi(x_1', x_2', x_3') = 0,$$

ove $\psi = 0$ è l'equazione di D'.

La curva (8), come combinazione lineare di f e di $\frac{\partial f}{\partial x_1'}$, passa pei punti O_1', O_2',..., trasformati dei punti multipli di C, situati nell'intorno di 1° ordine di O, colle molteplicità rispettive $s_1 - 1$, $s_2 - 1$,... (almeno); e poichè i punti O_1', O_2',... giacciono sulla retta $P'Q'$, ma non sulla $O'P'(x_2' = 0)$, ne segue che $\psi = 0$ passa con quelle molteplicità pei detti punti, cioè che D passa colle molteplicità $s_h - 1$ (almeno) pei punti O_h situati nell'intorno di 1° ordine di O; e così proseguendo, pei punti multipli degl'intorni successivi.

103. **Trasformazione cremoniana di una curva piana, priva di parti multiple, in una dotata di soli punti multipli ordinari.** — Dal n. prec. deriva dunque che, data una curva piana C, priva di parti multiple (ma eventualmente anche riducibile), si possono sciogliere ad uno ad uno in punti semplici i suoi eventuali punti multipli straordinari (cioè a tangenti non distinte; n. 98) mediante un numero finito di t. q., ciascuna delle quali introduce nuovi punti multipli, che son però ordinari. Pertanto si arriva al teorema:

Una curva algebrica piana priva di parti multiple, può sempre, mediante una trasformazione cremoniana del suo piano, trasformarsi in una curva dotata di soli punti multipli ordinari.

Non si può però esigere nè che la curva trasformata sia priva di punti multipli, nè che sia dotata di soli punti doppi nodali. Per soddisfare alla prima condizione bisogna infatti trasformare birazionalmente la data curva in un'altra generalmente *non piana*, mediante una corrispondenza che vien definita soltanto, come trasformazione birazionale, fra i punti delle due curve; per soddisfare alla seconda condizione bisogna similmente rinunciare all'esigenza che la trasformazione birazionale fra le due curve *piane* sia subordinata da una trasformazione cremoniana fra i loro piani.

Ciò risulta dal n. 22 (pag. 77). Ma la teoria si può evidentemente, a questo punto, ricostruire *ex novo*, sulla base dei soli risultati di questo Cap. La possibilità di sciogliere

ogni punto multiplo in punti semplici, conduce in primo luogo alla nozione di ramo di curva ed ai relativi sviluppi in serie (nn. 23, 24). Si ricostruisce indi, nel modo indicato nei §§ successivi di questo Cap., la geometria sopra una curva, e se ne deduce il teorema del n. 42 (pag. 147), che contiene le conclusioni ricordate del n. 22 (1).

OSSERVAZIONE 1ª. — Tutto quanto si è fin qui detto della composizione di un punto multiplo di una curva algebrica piana e della possibilità di sciogliierlo in punti semplici mediante una trasformazione cremoniana, *vale anche per la composizione e per lo scioglimento di un punto multiplo di una curva analitica piana* $f(x, y) = 0$, ove f sia una funzione (regolare) delle due variabili complesse x, y, sviluppabile in una serie di potenze di x, y, nell'intorno del punto considerato $O(x = x_0$, $y = y_0)$.

Ciò segue da un classico teorema di WEIERSTRASS (2), in virtù del quale la funzione f è *algebroide* nell'intorno di O. Si posson cioè trovare altre due funzioni regolari $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, tali che nell'intorno di O sia:

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\psi(x, y), \tag{9}$$

ove φ è una funzione non nulla in O e ψ è invece del tipo

$$\psi = y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n,$$

le a essendo funzioni regolari di x nell'intorno di $x = x_0$, ed n un numero intero finito (la funzione $f(x_0, y)$ si suppone non identicamente nulla).

Dalla decomposizione (9), coll'aiuto del teorema fondamentale sulle funzioni implicite (3), si trae la rappresentazione parametrica della $f = 0$, nell'intorno di O, mediante un numero finito di rami (coppie di serie di potenze di un parametro) e si trasporta quindi tutta la teoria delle singolarità delle curve algebriche.

Perchè vi sia un numero finito di singolarità nell'intorno di O, bisogna naturalmente che, nello stesso intorno, ψ non sia decomponibile nel prodotto di più espressioni analoghe, delle quali due o più identiche fra loro; cioè bisogna che f

(1) È questa la via seguita nelle « Vorlesungen » dell'Autore.

(2) WEIERSTRASS, Werke II, pag. 135. Ved. p. es. BIANCHI, l. c. § 72.

(3) Loc. cit. a pag. 86.

non sia divisibile (nel senso di WEIERSTRASS) per una potenza a esponente intero maggior d'uno d'una funzione regolare analoga; o, in altri termini, che fra i rami della curva, uscenti da O, non ve ne sia alcuno multiplo.

Si trasporta senz'altro anche la nozione di molteplicità d'intersezione di due curve analitiche in un loro punto regolare comune; ecc., ecc.

OSSERVAZIONE 2ª. — Sia dato un sistema lineare Σ di curve piane d'ordine n, la cui curva generica C sia priva di parti multiple. Una trasformazione cremoniana del piano di Σ, muta evidentemente quel sistema lineare in un sistema lineare. Si può ottenere che il sistema trasformato sia dotato di *punti base ordinari*, cioè di punti base a tangenti *distinte e tutte variabili?*

A questa domanda si risponde affermativamente. Ed ecco come. Osservato che i punti multipli propri di C cadono tutti nei punti base di Σ (pag. 41), basta, per ottenere l'intento, eseguire una trasformazione cremoniana, che muti la curva composta da due generiche di Σ, in una avente soli punti multipli ordinari.

Se si vuole si può anche evidentemente fare sparire tutti i punti base semplici.

Dunque *un sistema lineare di curve piane, prive di componenti fisse multiple, può sempre trasformarsi cremonianamente in uno dotato di soli punti base ordinari (e privo, se vuolsi, di punti base semplici).*

Consegue altresì che il teorema di BERTINI (pag. 41) sull'inesistenza di punti multipli diversi dai punti base, per la curva generica di un sistema lineare, vale non soltanto pei punti base propri, ma anche per quelli ad essi infinitamente vicini. Infatti le t. q. che fanno sparire i punti multipli inizialmente posseduti da C, fanno sparire pure i punti multipli iniziali di un'altra curva generica del sistema.

104. Trasformazione quadratica di un ramo. — Studiamo ora l'effetto di una t. q. sopra un ramo γ di origine O. Sieno P, Q gli altri due punti fondamentali (generici) della t. q. sul piano di γ ed O', P', Q' i punti fondamentali sul piano del ramo trasformato γ', il quale avrà l'origine in un punto O_1' di $P'Q'$. Sieno inoltre α, α_1 ordine e classe di γ; α', α_1' ordine e classe di γ'.

Una retta a passante per P e vicinissima a PO, ha α intersezioni con γ vicine ad O; onde la retta a' corrispondente, che passa per P' ed è vicinissima a $P'Q'$, avrà pur essa α intersezioni con γ' vicine ad O_1'.

Una retta b passante per O e vicinissima alla tangente ivi al ramo γ, ha con questo α_1 intersezioni vicine ad O (e distinte da O); onde la retta b' corrispondente, che passa per O' ed è vicinissima alla $O'O_1'$, avrà pur essa α_1 intersezioni con γ' vicine ad O_1'.

Ne deriva che, se $\alpha < \alpha_1$, sarà $\alpha' = \alpha$, $\alpha_1' = \alpha_1 - \alpha$ e la retta $O'O_1'$ risulterà tangente a γ'; se $\alpha > \alpha_1$, sarà $\alpha' = \alpha_1$, $\alpha_1' = \alpha - \alpha_1$ e la tangente a γ' sarà la $P'Q'$; se infine $\alpha = \alpha_1$, risulterà $\alpha' = \alpha = \alpha_1$ e nulla si potrà dire, senza ulteriori considerazioni, del valore della classe α_1' e della posizione della tangente.

In quest'ultimo caso la tangente t' a γ' in O_1', essendo distinta da $P'Q'$ e da $O'O_1'$, non passerà per alcun punto fondamentale ed avrà pertanto come corrispondente una conica t irriducibile della rete omaloidica del piano di γ, la quale toccherà in O il ramo γ. Una retta prossima a t', ma non passante per O_1', ha $\alpha' + \alpha_1'$ intersezioni con γ' vicine ad O_1', e quindi una conica della rete, prossima a t, ma non tangente a γ, avrà $\alpha' + \alpha_1'$ intersezioni con γ vicine ad O. Una retta per O_1', prossima a t', ha invece α_1' intersezioni con γ' vicine ad O_1', e quindi una conica della rete, tangente a γ e prossima a t, ha α_1' intersezioni con γ vicine ad O. Tutto questo significa che la conica t ha con γ in O molteplicità d'intersezione $2\alpha + \alpha_1'$.

Riassumendo:

L'ordine del ramo γ' trasformato del ramo γ, d'ordine α e di classe α_1, eguaglia il minore dei due numeri α, α_1; e, se questi sono differenti, la classe di γ' eguaglia la loro differenza. Se invece $\alpha = \alpha_1$, esistono ∞^2 coniche del piano di γ aventi col ramo, nell'origine, molteplicità d'intersezione $i > 2\alpha$ e la classe di γ' eguaglia $i - 2\alpha$.

In particolare, se il ramo γ è lineare, il suo trasformato γ' sarà altresì lineare *e non toccherà la retta fondamentale $P'Q'$*; e se la classe del primo è $\alpha_1 > 1$, il secondo avrà la classe $\alpha_1 - 1$. Sicchè *un ramo lineare di classe > 1, con successive trasformazioni quadratiche, si può ridurre ad un ramo di ordine e di classe eguali ad 1.*

Come per una curva, così per un ramo γ, di ordine α, si può dire che l'origine O è un *punto multiplo secondo* α, in quanto una retta prossima a passar genericamente per O, incontra il ramo in α punti vicini ad O. Se poi con una generica dilatazione del punto O, il ramo γ si muta in un ramo γ' d'ordine α', che dunque ha nel punto O_1' un punto α'-plo, si dirà che il punto infinitamente vicino ad O su γ è multiplo secondo α'. In tal guisa si definiscono i *punti multipli successivi di un ramo*, che può essere un ramo analitico qualunque, o, se appartiene a una curva algebrica, è ad ogni modo considerato staccamente da questa.

Rispetto ad una curva c'è questa sola differenza: che mentre sopra una curva un punto multiplo ne può avere come successivi, nell'intorno immediatamente seguente, più altri, in un ramo si ha per ogni intorno un sol punto, perchè sempre il trasformato di un ramo ha una sola tangente.

Le molteplicità di un punto multiplo proprio O di una curva C e quelle dei punti multipli successivi, risultan così le somme delle molteplicità che presentan negli stessi punti i rami in cui C si scinde nell'intorno di O.

Ripetendo parola per parola, nei riguardi di due rami distinti aventi l'origine comune, il ragionamento svolto nel n. 101 per due curve, *si estende la formula di* NOETHER *al calcolo della molteplicità d'intersezione di due rami nella loro comune origine.*

105. Punti prossimi ad un punto multiplo sopra un ramo o sopra una curva. — Conserviamo le notazioni del n. prec. I punti successivi di γ, che trasformansi in punti successivi di γ', situati sulla retta fondamentale $P'Q'$, si chiamano *punti prossimi* ad O, sul ramo γ. E posson essere punti multipli od anche punti semplici.

Poichè la molteplicità d'intersezione di $P'Q'$ con γ' nella origine O_1' eguaglia α (n. prec.), così la somma delle molteplicità nei punti prossimi ad O sul ramo γ eguaglia la molteplicità α di O.

I punti prossimi ad O sul ramo γ si riducono al solo punto infinitamente vicino nell'intorno di 1° ordine, se la retta $P'Q'$ non tocca $\gamma'(\alpha \leq \alpha_1)$: allora *l'unico punto prossimo ad O ha la stessa molteplicità* α *di O, e viceversa, se O ha un sol punto prossimo, questo ha la molteplicità* α. Ma se $P'Q'$ tocca γ' in $O_1'(\alpha > \alpha_1)$, oltre al punto prossimo di molteplicità α_1, nell'intorno di 1° ordine, vi sono altri punti prossimi la somma delle cui molteplicità eguaglia $\alpha - \alpha_1$, ed essi appartengono ad intorni successivi (di 2°, 3° ordine; ecc.).

Orbene, se sul ramo γ i punti successivi hanno le molteplicità $s, s_1, s_{11}, s_{111}, \ldots$ $(s = \alpha,\ s_1 \leq \alpha_1, \ldots)$, è certo che si può far passare un ramo lineare per i primi due punti della successione; è un qualsiasi ramo lineare avente in O la stessa tangente di γ. La sua molteplicità d'intersezione con γ in O è $s + s_1$. Non sempre invece si può far passare un ramo lineare pei primi tre punti della successione. È facile vedere che *un ramo lineare pei primi tre punti della successione si può far passare soltanto quando il terzo non sia prossimo al primo; in caso diverso pei primi tre punti si può certo far passare un ramo di 2° ordine.*

Invero, nel primo caso un ramo lineare generico tangente in O_1' a γ', non tocca $P'Q'$, e quindi mutasi in un ramo lineare passante pei primi tre punti successivi di γ; nel secondo caso invece quel ramo lineare tocca $P'Q'$, e poichè è di classe 1, si muta in un ramo di 2° ordine (e di classe 1) passante pei primi tre punti successivi di γ. In questo caso inoltre sul ramo di 2° ordine costruito, all'origine succede un punto semplice, epperò la sua molteplicità d'intersezione con γ è $2s + s_1 + s_{11}$. Nel caso in esame non esistono p. es. coniche irriducibili passanti pei tre punti successivi considerati di γ.

Se si considerano quattro punti successivi di γ, si vede similmente ch'essi stanno su rami lineari, se il terzo non è prossimo al primo, nè il quarto al secondo; stanno su rami di 2° ordine, se il terzo è prossimo al primo, ma il quarto non è prossimo al secondo; stanno su rami di 3° ordine, se terzo e quarto sono prossimi a primo e secondo; ecc.

Il concetto di punti prossimi può trasportarsi dai rami alle curve. Punti prossimi ad O, sulla curva C, sono i punti dell'intorno di O che mutansi in punti (propri e infinitamente vicini) comuni alla curva C' trasformata di C e alla retta fondamentale $P'Q'$ (fuori di P', Q').

I punti prossimi, anche se non appartengono all'intorno di 1° ordine, in quanto son punti di $P'Q'$ infinitamente vicini a punti propri di questa retta, posson considerarsi come limiti di punti situati nell'intorno di 1° ordine di O.

Ad ognuna delle tangenti distinte di C in O, corrisponde un nucleo di punti prossimi ad O, nella direzione di quella tangente. La somma delle molteplicità dei punti prossimi di tale nucleo, eguaglia la molteplicità d'intersezione di C' con $P'Q'$, nel punto omologo a quella tangente, cioè (n. 100) la molteplicità della tangente stessa entro il gruppo delle s tangenti a C nel punto s-plo O. Dunque:

La molteplicità di un punto per una curva eguaglia la somma delle molteplicità nei punti prossimi. La molteplicità di una delle tangenti in un punto proprio s-plo (numero delle volte che quella tangente conta fra le s tangenti alla curva nel punto stesso) eguaglia la somma delle molteplicità nei punti che son prossimi secondo la direzione di quella tangente.

106. **Indipendenza della composizione di una singolarità dalle trasformazioni che la definiscono.** — Siamo finalmente in grado di svincolare la nozione delle singolarità infinitamente vicine dalle t. q., che sono soltanto uno degli strumenti più semplici per definirle; e di dare quindi al concetto di composizione di un punto multiplo un contenuto geometrico sostanziale.

Apparisce infatti dal n. precedente che se un ramo γ ha soltanto due punti multipli successivi, essi posson definirsi mediante le molteplicità d'intersezione con rami lineari passanti per l'origine di γ e con rami lineari tangenti; se un ramo γ ha tre punti multipli successivi, definiti nel modo precedente i primi due, il terzo può definirsi mediante la molteplicità d'intersezione con un ramo lineare o di 2° ordine osculatore a γ; se γ ha quattro punti multipli successivi, definiti i primi tre, si definisce il quarto mediante la molteplicità d'intersezione con un ramo di 1°, 2° o 3° ordine contenente quei quattro punti; e così via.

È poi chiaro, atteso il significato geometrico della molteplicità d'intersezione, che permette, con un piccolo spostamento di uno dei due rami, di ottenere tante intersezioni distinte, quante son quelle che si voglion definire come coincidenti, che *una trasformazione analitica regolare (cioè biunivoca senza eccezioni) dell'intorno dell'origine di un ramo, trasforma questo in un altro ramo avente le stesse singolarità successive.*

Nei riguardi di una curva C, la composizione di un punto multiplo, risulta definita dalla scissione in rami della curva stessa, nell'intorno del punto. Restan definite così le *posizioni* dei punti multipli successivi sui singoli rami e le molteplicità ad essi spettanti. Un punto che figuri in più rami ha, per la curva C, una molteplicità eguale alla somma delle molteplicità pei singoli rami.

107. **Esempio: Le varie specie di punti doppi.** — Abbiamo detto a pag. 89, che nei riguardi di un punto doppio O di una curva piana C, due sono le possibilità:

1) Il punto O è origine di due rami lineari.

2) Il punto O è origine di un sol ramo di 2° ordine.

Nel caso 1) i due rami posson avere tangenti distinte in O, ed allora si ha un *nodo (ordinario)*, cui sono prossimi due punti semplici; oppure posson toccarsi in O, ed allora si ha un *nodo di specie superiore*.

Precisamente: se i due rami hanno in O un contatto di ordine k, il nodo è *di specie* k. Una dilatazione col punto fondamentale O, lo muta in un nodo di specie $k-1$; k dilatazioni successive lo mutano in un nodo ordinario, e un'ulteriore dilatazione in due punti semplici.

Un nodo di specie k è costituito da un punto doppio O cui succedono k punti doppi infinitamente vicini; uno per ciascuno degl'intorni di 1°, 2°, ..., k° ordine. Un nodo di specie $k>0$, ha come prossimo un sol punto doppio.

Per $k=1$, il nodo dicesi anche un *tacnodo*; per $k=2$, un *oscnodo*.

Nel caso 2) può darsi che il punto successivo ad O, nell'intorno di 1° ordine, sia semplice, ed allora si ha una *cuspide ordinaria*, origine di un ramo di 2° ordine e di classe 1. Ad O sono prossimi due punti semplici. Oppure il punto successivo ad O è ancora doppio, ed allora si ha una *cuspide di specie superiore*.

Precisamente: se lungo il ramo succedono ad O k punti doppi, la cuspide dicesi *di specie* k. Una dilatazione col punto fondamentale O, la muta in una cuspide di specie $k-1$; k dilatazioni successive la mutano in una cuspide ordinaria, e un'ulteriore, in un punto semplice. Ad una cuspide di specie $k>0$, è prossimo un punto doppio.

108. Costruzione di una curva piana d'ordine abbastanza alto, che possegga molteplicità assegnate, distinte o infinitamente vicine. — A pag. 151 abbiamo dimostrato che, dato sopra una curva piana C, dotata di soli nodi, un gruppo K di t punti, distinti o infinitamente vicini, per una curva di ordine abbastanza alto il passaggio per quei punti equivale a t condizioni lineari indipendenti. Questa proposizione è caso particolare di una più generale che ora stabiliremo.

Anzitutto osserveremo che fissato un gruppo G di punti multipli, propri e infinitamente vicini (*gruppo base*), se esistono curve di un determinato ordine l, aventi quel gruppo di singolarità, esse formano un sistema lineare, come nel caso in cui G consta di punti distinti. E invero il fascio individuato da due generiche di quelle curve, è costituito da curve aventi le stesse singolarità e quindi appartiene al sistema di tutte le curve d'ordine l aventi il dato gruppo base.

Ciò premesso dimostriamo che:

Se in un piano π è dato un gruppo di un numero finito di punti $P_1, P_2, \dots, P_k$ distinti o infinitamente vicini e sono assegnate in essi le molteplicità rispettive $s_1, s_2, \dots, s_k$, una curva d'ordine $l \geq \Sigma s_i - 1$, che possegga in quei punti le date molteplicità, soddisfa con ciò a $\Sigma \binom{s_i+1}{2}$ condizioni lineari indipendenti.

I punti sieno anzitutto distinti: non occorre allora che sia soddisfatta alcuna condizione aritmetica per gli interi $s_i (\geq 1)$; mentre, come vedremo, condizioni siffatte si richiedono se nel gruppo dato vi sono punti infinitamente vicini a punti propri.

Se è $k=1$ ed $l \geq s_1 - 1$, la proprietà è nota e del resto si stabilisce immediatamente, supposto, com'è lecito, che l'origine delle coordinate cada in P_1. Chè allora le condizioni perchè P_1 sia s_1-plo per una curva di ordine l, si esprimono annullando i coefficienti dei termini fino al grado $s_1 - 1$, nell'equazione della curva, e tali condizioni sono manifestamente indipendenti.

Se $k=2$ ed $l \geq s_1 + s_2 - 1$, il punto s_1-plo P_1 presenta $\binom{s_1+1}{2}$ condizioni indipendenti alle curve d'ordine $l - s_2 \geq s_1 - 1$, ed il punto s_2-plo P_2 $\binom{s_2+1}{2}$ condizioni indipendenti alle curve d'ordine s_2. Onde può costruirsi una curva d'ordine $(l - s_2) + s_2$ composta da una curva d'ordine $l - s_2$ e da una d'ordine s_2, che soddisfaccia ad $\binom{s_1+1}{2} + \binom{s_2+1}{2} - 1$ delle predette condizioni, relative ai punti P_1, P_2, e non alla rimanente. Ciò significa che per le curve d'ordine $l \geq s_1 + s_2 - 1$ tali $\binom{s_1+1}{2} + \binom{s_2+1}{2}$ condizioni, son indipendenti.

La conclusione si estende per induzione da k a $k+1$.

Suppongasi ora che il gruppo dato sia costituito da un punto proprio O cui sono infinitamente vicini, nell'intorno di 1° ordine, i punti $P_1, P_2, \dots, P_k$; ed s, s_1; $s_2, \dots, s_k$ siano le molteplicità assegnate nei punti del gruppo.

Si trasformi il piano π, in cui è dato il gruppo di molteplicità (cioè in cui son dati O e k direzioni distinte per O) in un'altro piano π', mediante una t. q. generica avente in π i punti fondamentali O, P, Q, ed in π' i punti fondamentali O', P', Q'. Una curva *variabile*, d'ordine $l \geq s + \Sigma s_i - 1$, avente in O un punto s-plo, e quindi (essendo $l \geq s - 1$) soddisfacente ad $\binom{s+1}{2}$ condizioni lineari distinte, descrive un sistema lineare Σ, di dimensione $\binom{l+1}{2} - 1 - \binom{s+1}{2}$.

Il sistema Σ trasformasi in un sistema lineare Σ' la cui curva generica è di ordine $2l - s$ e possiede un punto l-plo in O' ed un punto $(l-s)$-plo in ciascun dei punti P', Q'. Essa taglia la retta $P'Q'$, fuori dei punti fissi, in s punti variabili. Inoltre ai punti $P_1, P_2, \dots, P_k$ rispondono i punti $P_1', P_2', \dots, P_k'$ di $P'Q'$, distinti fra loro e da P', Q'. Fra le curve di Σ', quelle che presentano in $P_1', \dots, P_k'$ le molteplicità date $s_1, \dots, s_k$ hanno per corrispondenti curve di Σ che posseggon le volute molteplicità nei punti del gruppo dato $O, P_1, P_2, \dots, P_k$.

Ma vi sono curve di Σ' che soddisfacciano a tali condizioni? Le condizioni medesime sono per esse indipendenti? Per rispondere affermativamente a queste domande, basterà provare che esiste qualche curva di Σ', soddisfacente a $\Sigma\binom{s_i+1}{2} - 1$ dalle condizioni inerenti ai punti s_i-pli P_i', $(i=1, \dots, k)$, e non alla rimanente. Una tal curva si compone ad esempio così:

$$(10)\qquad (l-s)\cdot O'P' + \Sigma s_i \cdot O'Q' + (s - \Sigma s_i)\cdot a + (l - s - \Sigma s_i)\cdot b + \varphi,$$

ove colla notazione $(l-s)\cdot O'P'$ si designa la retta $O'P'$ contata $l-s$ volte, e similmente per le altre notazioni analoghe; a, b son rette generiche uscenti rispettivamente da O', Q' e φ è una qualsiasi curva d'ordine Σs_i soddisfacente a tutte le condizioni relative ai punti P_i, tranne una. Effettivamente una tal curva φ può costruirsi, perchè l'esistenza di una curva siffatta richiede soltanto, in virtù della proposizione già dimostrata per un gruppo base di punti distinti, che il suo ordine non sia minore di $\Sigma s_i - 1$.

Però per poter comporre la curva (10) occorre e basta che $l \geq s + \Sigma s_i$, $s \geq \Sigma s_i$; condizione questa ultima che avevamo già trovato come necessaria nel n. 100.

Se invece fosse $l = s + \Sigma s_i - 1$, in luogo della (10) considereremmo la curva:

$$(11)\qquad (l-s)\cdot O'P' + (\Sigma s_i - 1)\cdot O'Q' + (s - \Sigma s_i + 1)\cdot a + \varphi,$$

essendo ancora a una generica retta per O' e φ una qualsiasi curva d'ordine $\Sigma s_i - 1$ soddisfacente a tutte le condizioni relative ai punti P_i, tranne una.

Dunque, se $s \geq \Sigma s_i$, $l \geq s + \Sigma s_i - 1$, si deve rispondere affermativamente alle domande sopra formulate e concludere col teorema che volevamo dimostrare, pel gruppo costituito dai punti $O, P_1, \dots, P_k$.

Se fra i punti base addensati attorno ad O, oltre ai punti $P_1, P_2, \dots, P_k$, ve ne sono taluni $P_{11}, P_{12}, \dots$ nell'intorno di 1° ordine di P_1, una t. q. generica con un punto fondamentale in O riconduce al caso precedente; e così proseguendo.

Se infine il dato gruppo base si scinde in un primo gruppo G di punti addensati attorno ad O; in un altro gruppo K di punti addensati attorno ad un altro punto S distinto da O, ecc.; una volta acquisito il teorema per i gruppi del tipo di $G, K, \dots$, si dimostra il teorema pel gruppo totale $G + K + \dots$ collo stesso ragionamento con cui si passa da uno a due, a tre, ecc., punti base distinti.

Ricaveremo ora dalla dimostrazione esposta talune interessanti conseguenze.

In primo luogo osserviamo che, se si vuole che la curva generica, avente il dato gruppo base, sia irriducibile, occorre ammettere, per $k \geq 2$, $l \geq \Sigma s_i$ e non già $l = \Sigma s_i - 1$ (1).

Supposto $l \geq \Sigma s_i$ e supposto inoltre che le molteplicità assegnate soddisfacciano alla condizione [incontrata nel costruire la (10)] che ogni molteplicità non sia minore della somma delle molteplicità prossime (n. 105), si conclude agevolmente che la curva generica col dato gruppo base è irriducibile ed ha nei punti del gruppo *molteplicità effettive* eguali alle assegnate.

Infatti, se il gruppo base G consta di $k > 1$ punti distinti $P_1, P_2, \dots, P_k$, fra le curve aventi in G molteplicità effettive eguali alle assegnate $s_1, s_2, \dots, s_k$, vi sono quelle composte mediante s_1 rette per P_1, s_2 rette per $P_2, \dots$, s_k rette per P_k ed una curva qualsiasi d'ordine $l - \Sigma s_i$. Onde il sistema lineare delle curve d'ordine l possedenti il gruppo base G non può esser riducibile, perchè non può nè avere una curva base nè esser composto colle curve di un fascio (pag. 45). Di più è evidente che questo sistema lineare non ha punti base diversi dai P.

Se il gruppo base G è quello considerato nella seconda parte della dimostrazione precedente, il sistema lineare H delle curve d'ordine l col gruppo base G, contiene ogni curva trasformata di una del tipo (10), ove φ denoti una curva di ordine Σs_i passante colle molteplicità effettive $s_1, s_2, \dots, s_k$ pei punti $P_1', P_2', \dots, P_k'$; cioè esiste in H qualche curva spezzata in una φ_0 d'ordine $2\Sigma s_i$, passante per O colla molteplicità effettiva Σs_i e pei punti infinitamente vicini $P_1, P_2, \dots, P_k$ colle molteplicità effettive $s_1, s_2, \dots, s_k$; in una retta a_0, contata $s - \Sigma s_i$ volte, passante per O, ed in una retta b_0, contata $l - s - \Sigma s_i$ volte, passante per Q. Se $k > 1$, la curva φ_0 può supporsi irriducibile; se $k = 1$, essa si spezza in s_1 coniche passanti per O e tangenti ivi alla retta OP_1; comunque è chiaro che il sistema lineare in cui è suscettibile di variare φ_0 (trasformato di quello in cui varia φ) non possiede parti fisse, onde il sistema H, in quanto contiene curve del

(1) Per $k = 1$, $l = s_1 - 1$ l'equazione della curva da costruirsi svanisce identicamente; per $k = 2$, $l = s_1 + s_2 - 1$, ognuna delle curve aventi il dato gruppo base si spezza nella retta che congiunge i due punti base e in una curva d'ordine $l - 1$ passante per essi colle molteplicità $s_1 - 1$, $s_2 - 1$.

tipo $\varphi_0 + (s - \Sigma s_i)a_0 + (l - s - \Sigma s_i)b_0$, non può nè avere una curva base, nè esser composto con un fascio; epperò esso è irriducibile. È inoltre evidente che H non ha punti base diversi dagli assegnati.

La conclusione si estende, nel modo già indicato, ad un gruppo base qualsiasi e si perviene al teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano curve irriducibili possedenti in un dato gruppo base molteplicità effettive eguali a quelle assegnate, è che ognuna delle date molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_k$, non sia minore della somma delle eventuali molteplicità base prossime.

Se $k > 1$, curve siffatte ne esistono di un ordine l qualunque, non minore di Σs_i, ed esse formano un sistema lineare di dimensione:

$$\frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2},$$

non avente altri punti base (1).

Le posizioni dei punti del gruppo base, se questo contiene anche punti infinitamente vicini a punti propri, si potranno assegnare dando uno o più rami in cui i punti si succedano; o, ciò che è lo stesso, definendo il gruppo mediante una successione di t. q.

109. Molteplicità virtuali. — Nel n. prec. abbiamo osservato che, dato un gruppo base G, *se esistono* curve di un ordine determinato l, presentanti effettivamente nei punti del gruppo le molteplicità assegnate s_i, esse formano un sistema lineare Σ_l; eppoi abbiamo provato che, se $l \geq \Sigma s_i$, esistono certo curve d'ordine l (irriducibili anche per $l = \Sigma s_i$, se $k > 1$) le quali godono della proprietà ricordata; e inoltre per le curve di ordine $l \geq \Sigma s_i$ l'imposizione del gruppo G equivale a $\Sigma\binom{s_i+1}{2}$ equazioni lineari indipendenti, fra i coefficienti dell'equazione cartesiana di una variabile curva di quell'ordine.

Non resta però escluso che, se entro al predetto sistema lineare Σ_l si considerano curve particolari, esse presentino in G singolarità effettive diverse da quelle della curva generica di Σ_l, cioè diverse dalle singolarità assegnate.

(1) Se $k = 1$, per l'irriducibilità occorre che $l \geq s_1 + 1$.

Così p. es. fra le quartiche aventi una data cuspide O, con data tangente cuspidale, vi sono quartiche che hanno invece in O un tacnodo, la cui tangente tacnodale coincide colla cuspidale. In tal caso il gruppo base consta del punto doppio O (cuspide) con due punti semplici prossimi P_1, P_2 e curve particolari del sistema hanno invece i due punti doppi O, P_1, mentre non passano per P_2.

Vi sono poi quartiche ancor più particolari, che hanno in O un punto triplo, passan semplicemente per P_1 e non per P_2.

Si presenta qui un paradosso, perchè a prima vista parrebbe che curve particolari potessero avere molteplicità superiori a quelle assegnate nei punti di G, non già molteplicità inferiori. Il paradosso deriva dall'arbitraria estensione alle singolarità infinitamente vicine di quel che vale per singolarità distinte. Una dilatazione del punto O muta una quartica C avente in O una cuspide e passante pei punti prossimi P_1, P_2, in una sestica C', tangente alla retta fondamentale $P'Q'$ (fuori di P', Q') nel punto P_1' (al quale è infinitamente vicino P_2' sulla stessa $P'Q'$); mentre una quartica tacnodale $\overline{C}$ dello stesso sistema, si muta in una sestica $\overline{C}'$ che ha in P_1' un nodo. Un'ulteriore dilatazione di P_1' muta C' in una curva C'' dello 11° ordine, incontrante la retta fondamentale $P''Q''$, fuori dei punti fondamentali, nel punto semplice P_2'', mentre la curva $\overline{C}''$ trasformata di $\overline{C}'$, è del 10° ordine e incontra $P''Q''$, fuori dei punti fondamentali, in due punti distinti da P_2''. Però $\overline{C}''$ non è curva totale del sistema lineare trasformato di quello che conteneva la C variabile; per ottenere una curva totale di questo sistema, che è dello 11° ordine, occorre aggiungere a $\overline{C}''$ la retta $P''Q''$. E così la curva totale costruita viene a passare per P_2'', come la generica C''.

Similmente si spiega come curve C particolari possan presentare in O un punto triplo, passar semplicemente per P_1 e non per P_2.

Lo stesso fatto accade quando le singolarità assegnate nei punti di G non soddisfacciano alla condizione che ogni molteplicità sia non minore delle molteplicità delle singolarità base ad essa prossime. Anche in tal caso le condizioni offerte dal gruppo base G si esprimono mediante equazioni lineari nei coefficienti dell'equazione della variabile curva d'ordine l; equazioni che si possono scrivere sciogliendo G in punti multipli distinti. Se p. es. il gruppo G consta di un punto doppio O, cui sono infinitamente vicini, in direzioni distinte, altri due punti doppi P_1, P_2, una dilatazione di O, scioglie G, dando luogo a due punti doppi distinti P_1', P_2' sulla retta fondamentale $P'Q'$. Una curva C d'ordine l passante doppiamente per O si muta in una C' d'ordine $2(l-1)$ incontrante P', Q' in due soli punti variabili. Imponendo a C' due punti doppi in P_1', P_2', le si impongono delle condizioni lineari, che si rispecchiano in altrettante condizioni lineari imposte a C; ma C' viene in conseguenza a spezzarsi in una curva d'ordine $2l-3$, passante per P_1', P_2', e nella retta fondamentale $P'Q'$. Onde C viene in corrispondenza ad acquistare il punto triplo O, coi punti semplici infinitamente vicini P_1, P_2.

In tutti questi casi, in cui le molteplicità effettive della curva risultano diverse dalle molteplicità assegnate o per la insufficiente ampiezza del campo di variabilità della costruenda curva o per la inosservanza della disuguaglianza fra una molteplicità base e le sue prossime, le molteplicità date si chiameranno *molteplicità virtuali*. Son le molteplicità che noi desidereremmo per la curva; disposti però ad accettare molteplicità diverse, se la impostazione del problema lo esige. In ogni caso, per prudenza, le molteplicità assegnate si considereranno sempre come virtuali, finchè non siasi accertata l'esistenza di curve che le posseggono come effettive.

Osservazione 1ª. — Abbiamo provato nel n. prec. che, per $l \geq \Sigma s_i$, il sistema Σ_l delle curve d'ordine l col dato gruppo base G, ha la dimensione:

$$r_l = \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2}.$$

Dico che curve di ordine λ, aventi nel gruppo G le molteplicità *virtuali* $s_1, s_2, \ldots, s_k$, esistono almeno fino ad un λ tale che

$$\frac{\lambda(\lambda+3)}{2} \geq \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2}. \qquad (12)$$

Ma la dimensione r_λ del sistema Σ_λ da esse formato, potrà anche risultar maggiore di

$$\frac{\lambda(\lambda+3)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2}.$$

E difatti, se per $\lambda = l-1$ è soddisfatta la (12), poichè

$$r_l = \frac{(l-1)(l+2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i+1)}{2} + l + 1,$$

sarà $r_l \geq l+1$, e si potrà pertanto soggettare le curve di Σ_l al passaggio per $l+1$ punti di una retta fissata genericamente. Con ciò s'imporranno al più $l+1$ condizioni (esattamente tante, se Σ_l sega sopra quella retta una g_l^l completa) e quindi risulterà:

$$r_{l-1} \geq r_l - l - 1.$$

Facendo decrescere l di un'unità alla volta si arriva così a dimostrare l'asserto. Ma poichè ogni volta s'ottengono curve particolari del sistema lineare da cui si parte, nulla si può dire delle molteplicità effettive da esse possedute nei punti di G.

Il minimo intero positivo λ per cui è soddisfatta la (12), non supera Σs_i, anche per ragioni puramente aritmetiche. Invero, per $l = \Sigma s_i$ risulta $r_l = \Sigma s_i s_j + \Sigma s_i$, ove il primo sommatorio è esteso alle combinazioni semplici degl'indici $1, 2, \ldots, k$.

Osservazione 2ª. — In un sistema lineare Σ_l avente il gruppo base G, colle molteplicità effettive $s_1, s_2, \ldots, s_k$, due curve generiche hanno in un punto proprio O di G una certa molteplicità d'intersezione σ, fornita dalla formula di Noether. Orbene, se una curva particolare C_0 del sistema presenta nei punti base molteplicità effettive diverse dalle assegnate, due casi posson presentarsi:

1) Il primo, che è evidentemente il più generale, è quello in cui C_0 ha in O, colla curva generica C di Σ_l, molteplicità d'intersezione eguale a σ.

2) Il secondo è quello in cui C_0 ha in O con C molteplicità d'intersezione maggiore di σ.

Nel primo caso si dice che le molteplicità virtuali di C_0 nell'intorno di O sono altresì *molteplicità apparenti*, rispetto alla valutazione della molteplicità d'intersezione di C_0 con C.

Nel secondo caso le molteplicità apparenti sono diverse dalle virtuali.

Così, se Σ_l è il sistema delle quartiche C con un gruppo base G costituito da una cuspide O e dai due punti semplici P_1, P_2 ad essa prossimi, una quartica C_0 avente in O, P_1

due punti doppi, ha molteplicità apparenti eguali alle virtuali; mentre una quartica C_1 avente in O un punto triplo e in P_1 un punto semplice, ha molteplicità apparenti diverse dalle virtuali.

La prima idea di sciogliere con procedimenti algebrici i punti multipli di una curva algebrica è di KRONECKER, il quale nel 1858 comunicò a RIEMANN e a WEIERSTRASS e nel 1862 all'Accademia di Berlino, di aver trasformato birazionalmente una curva piana dotata di punti multipli qualunque in una con punti multipli ordinari. Spetta a quanto sembra a KLEIN di aver notato pel primo, in una privata comunicazione del 1869, che, combinando il teorema di KRONECKER con una osservazione di CLEBSCH, si poteva determinare maggiormente quel teorema trasformando la curva in una (piana) dotata di soli nodi. Si trattava però sempre di trasformazioni limitate ai punti della curva. Comunque il teorema, così determinato, apparve per la prima volta in un lavoro di KRONECKER [J. für Math. **91**, 301 (1881)], basato sulla considerazione del discriminante, rispetto ad x, di un polinomio $f(x, y)$, e sul fatto che tale discriminante si scinde in un fattore essenziale, corrispondente ai punti di diramazione di y come funzione di x ed in un fattore inessenziale, corrispondente ai punti multipli della curva $f = 0$, che si altera per trasformazioni birazionali. Indipendentemente da KRONECKER, il NOETHER [Gött. Nachr., 267 (1871); Math. Ann., **9**, 166 (1875); **23**, 311 (1883)] dimostrò la possibilità di ridurre ad ordinarie le singolarità di una curva piana (priva di parti multiple) mediante una successione di trasformazioni quadratiche. L'affermazione, contenuta nella Nota del 1871, che la successione delle trasformazioni occorrenti è sempre finita, fu dimostrata in una Nota contemporanea di HAMBURGER [Zeitsch. f. M. **16**, 461 (1861)], il quale aveva avuto la stessa idea del NOETHER. Ma il merito principale di questi, nella teoria dei punti singolari, consiste nell'aver introdotto la nozione di singolarità infinitamente vicine, le quali si comportano, rispetto ai problemi d'intersezione e alle condizioni che offrono a curve di dato ordine, come se fossero distinte. Anzi queste proprietà geometriche permettono di definire le singolarità infinitamente vicine per astrazione, dando loro un significato indipendente dalle t. q. donde originariamente nacquero. Il BERTINI [Ist. Lomb. Rend. **21**$_2$, 326, 413 (1888); Introduzione, p. 455] rese più elementare la dimostrazione della riducibilità mediante t. q. di una curva piana C, d'ordine n, ad una con singolarità ordinarie, introducendo per O l'espressione

$$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma\frac{s_i(s_i-1)}{2}.$$

Supposto che C consti di $h \geq 1$ parti semplici, si trova subito che $p_1 + h - 1 \geq 0$, e si dimostra indi che, se C con una dilatazione di un suo punto multiplo O, si muta in una curva C', la quale abbia certi nuovi punti di molteplicità r_j sulla retta fondamentale corrispondente ad O (punti diversi dai punti fondamentali ivi esistenti), indicato con p_1' il carattere analogo di C', risulta

$$p_1' = p_1 - \Sigma\frac{r_j(r_j-1)}{2}.$$

Poichè il carattere analogo a p_1, per le successive trasformate di C, deve sempre soddisfare alla disuguaglianza sopra indicata, ne deriva che, dopo un numero finito di t. q., si devon trovare, come trasformati di O, punti tutti semplici; e da ciò il teorema di NOETHER. Contemporaneamente, supposta C irriducibile ($h = 1$), il procedimento precedente conduce a riconoscere che il genere di C è dato dalla espressione stessa che definisce p_1, purchè il sommatorio s'estenda a tutti i punti multipli propri e infinitamente vicini di C (cfr. col successivo n. 114). Formula questa che era già stata osservata da NOETHER [Math. Ann. **8**, 497 (1874)] e che generalizza la formula di CLEBSCH (pag. 127). Quanto alla trasformazione di una curva piana in una dotata di soli nodi, aggiungeremo che il BERTINI [Rivista di Mat. **1**, 22 (1891); Math. Ann. **44**, 158 (1894)] ne diede una semplice dimostrazione diretta mediante una trasformazione piana (1, 2), birazionale fra le due curve. Altre dimostrazioni furon poi date da PICARD, SIMART, VESSIOT, HALPHEN, ecc. Spetta a VERONESE [Math. Ann. **19**, 213 (1881)] di aver osservato pel primo che una curva piana (o sghemba o iperspaziale) dotata di punti multipli qualunque (ma priva di parti multiple) può sempre considerarsi come proiezione di una priva di punti multipli, appartenente ad uno spazio superiore; o in particolare (se la data è una curva piana) appartenente allo spazio ordinario. VERONESE ottiene questo risultato in modo sostanzialmente identico a quello da noi esposto a pag. 163. Ne deriva subito (pag. 77) la possibilità di trasformare birazionalmente una curva piana in una dotata di soli nodi, passando prima per una trasformata birazionale priva di punti multipli in un iperspazio, e proiettando genericamente questa su di un piano. Altre dimostrazioni della possibilità di trasformare una curva in una sghemba, senza punti multipli, furono in seguito date da POINCARÉ, DEL PEZZO, PIERI, VESSIOT. La composizione delle singolarità di una curva piana mediante singolarità infinitamente vicine è stata estesa alle curve sghembe e iperspaziali da DEL PEZZO (l. c. a pag. 94), PANNELLI [Ist. Lomb. Rend. **26**$_2$, 216 (1893)] SEGRE [Ann. di Mat. **25**$_2$, 1 (1897)] e B. LEVI [Torino Mem. **48**$_2$, 83 (1898)]. L'analisi della singolarità si fa con successive trasformazioni cremoniane (in particolare quadratiche) dello spazio. Una curva di S_r ($r > 2$) può sempre, con trasformazioni cremoniane del suo spazio, mutarsi in una priva di punti multipli [B. LEVI, Lincei Rend. **7**$_5$, 111 (1898)]. Da un altro punto di vista posson esser considerate le singolarità delle curve: è quello di SMITH e di HALPHEN, che poggia sugli sviluppi di PUISEUX, dei quali parleremo nella 2ª parte di questo volume, trattando delle funzioni algebriche come funzioni analitiche (Ved. p. es. le « Vorlesungen » dell'A., pag. 197). Mediante questi sviluppi si riconosce a priori, senza premetter l'analisi della singolarità, che l'intorno di un punto (a, b) di una curva algebrica piana $f(x, y) = 0$ si può rappresentare con uno o più sviluppi in serie di $y - b$ secondo le potenze ascendenti di $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ (α intero conveniente ≥ 1) (Ved. p. es. le citate « Vorlesungen », pag. 202). Posto $x - a = t^{\alpha}$, la y viene eguale ad una serie di potenze intere di t e si hanno così gli *elementi* della funzione algebrica, considerata con WEIERSTRASS, come funzione analitica, o *rami* [CAYLEY, J. für Math. **64**, 369 (1865); Quart. J. **7**, 212 (1866)] o *cicli* [HALPHEN, Comptes rendus, **78**, 1105 (1874); Mém. d. sav. étr. 26_2 (1877)], studiati in modo sistematico da SMITH [London Math. Soc. Proc. 6, 153 (1873-76)] e da HALPHEN [Appendice all'edizione francese del trattato di SALMON sulle curve algebriche piane, 1884]. Il concetto di ordine e di classe di un ramo risale a PLÜCKER (1839); la loro reciproca relazione di dualità, accennata sommariamente da CAYLEY (l. c.), fu dimostrata nel 1874 da HALPHEN (l. c.). I caratteri proiettivi di un ramo di curva sghemba furono considerati prima da HALPHEN [Bull. Soc. Math. 6, 10 (1878)], che ne indicò i legami di dualità, eppoi da FINE [Amer. Jour. 8 (1886)], il quale definì più in generale i caratteri proiettivi di un ramo iperspaziale [Amer. Jour. 9, 180 (1887)] (cfr. colla pag. 144 di questo Trattato), e indicò come si trasformano per dualità. La dimostrazione geometrica di questi legami di dualità, da noi esposta alle pagg. 136-137, è di SEGRE (Introduzione, n. 43). Il ponte di passaggio fra la teoria di NOETHER e quella di SMITH-HALPHEN è costituito dalla costruzione, sviluppata da HAMBURGER nel citato lavoro, degli sviluppi di PUISEUX mediante successive t. q. del punto di cui si vuole studiare l'intorno. Ne risulta che la singolarità dipende soltanto da un numero finito di coefficienti e di esponenti dello sviluppo di $y-b$ in serie di potenze di $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$, donde la possibilità di scioglierla in punti semplici con un numero finito di t. q. NOETHER [Palermo Rend. 4, 89, 300 (1890)], colla inversione del procedimento di HAMBURGER, riescì a caratterizzare la composizione del ramo mediante punti multipli infinitamente vicini, e a determinare il numero e la molteplicità di questi punti mediante i quozienti ed i resti risultanti dall'operazione del massimo comun divisore, applicata all'ordine e alla classe del ramo; riattaccandosi così agli *esponenti* e ai *numeri caratteristici del ramo*, già considerati da SMITH e da HALPHEN. Il calcolo della molteplicità d'intersezione di due rami nella loro comune origine, accennato in CAYLEY ed esposto anche da WEIERSTRASS nelle sue lezioni, trovasi nei citati lavori di SMITH e di HALPHEN. La formula di NOETHER, pel calcolo della molteplicità d'intersezione di due curve in un loro punto comune, trovasi nelle memorie sopra citate dei Math. Annalen, 1875 e 1883. ENRIQUES (ved. ENRIQUES-CHISINI, t. II, pag. 327 e segg. e segnatamente pag. 352 e segg.), riprendendo la via seguita da CAYLEY, SMITH, HALPHEN pel calcolo della molteplicità d'intersezione di due rami, giunge alla definizione diretta delle singolarità infinitamente vicine, a prescinder dalle t. q. Un gruppo di punti multipli successivi vien così definito per astrazione mediante tutte le coppie di rami che hanno in comune quei punti e soltanto quelli. Il concetto di composizione della singolarità riesce determinato in modo luminoso, perchè vien dato un preciso senso geometrico non solo alla molteplicità dei punti singolari infinitamente vicini, ma anche alla loro posizione, rappresentata da ENRIQUES con opportuni schemi. Ne risulta che taluni dei punti multipli che compongono la singolarità sono *liberi*, nel senso che variano con continuità al variare di certi coefficienti dello sviluppo in serie di $y-b$, mentre altri sono *satelliti* di punti liberi, dipendendo da elementi aritmetici, formati cogli esponenti dello sviluppo stesso. Allo stesso ENRIQUES è dovuta la nozione di *prossimità* di punti singolari (l. c., pag. 389). Però l'osservazione che tre punti multipli successivi possono non appartenere

ad un ramo lineare, era stata posta in rilievo da SEGRE [Torino Atti, 36, 635, (1901)]. Nel libro di ENRIQUES-CHISINI la teoria delle singolarità è ampiamente sviluppata non soltanto dai punti di vista riferiti, ma altresì dal punto di vista differenziale, caratterizzando le singolarità infinitamente vicine con elementi differenziali inerenti alla curva data. È così spinto fino in fondo un indirizzo accennato da LAGRANGE, da PLÜCKER e sopratutto da HAMBURGER (l. c.) e da STOLZ [Math. Ann. 8, 415 (1874)]. L'idea di trasformare birazionalmente una curva irriducibile in un'altra priva di punti multipli (sghemba o iperspaziale), senza passare attraverso l'analisi delle singolarità eseguita o collo studio del discriminante o cogli sviluppi di PUISEUX e conseguente separazione dei rami o colle t. q., spetta all'Autore [Ist. Veneto Atti, 79, 929 (1920)]. Il concetto è questo: Talune fondamentali proprietà delle serie lineari possono acquisirsi senza curarsi dei punti multipli, perchè in esse entrano in giuoco soltanto punti generici della curva, che sono semplici. Ebbene, sotto certe condizioni, entro una serie lineare g_n^r non possono esistere serie lineari ∞^{r-1} di ordine minore di $n-1$, talchè la serie g_n^r è semplice e la sua imagine proiettiva è una curva priva di punti multipli. Questo concetto si riattacca alla costruzione di un modello privo di punti multipli, indicata a pag. 163. Esso è stato ripreso da ALBANESE [Lincei Rend. 33_5, 13 (1924)], il quale ha potuto così rendere ancor più elementare il procedimento dell'Autore provando che per la serie lineare g_n^r segata sopra una curva piana di ordine m dalle curve di ordine abbastanza grande (p. es. di ordine $m-1$), lo staccamento di una $g_{n_1}^{r-1}$ subordinata, di ordine $n_1 < n-1$, eppoi da questa di una $g_{n_2}^{r-2}$, di ordine $n_2 < n_1 - 1$, ecc., non può proseguire, senza che a un certo momento s'incontri una serie semplice, almeno ∞^2, per cui l'analogo staccamento non è più possibile. La dimostrazione esposta a pag. 75 è appunto quella di ALBANESE. Del concetto di molteplicità virtuali di una curva si trovano i primi accenni in G. JUNG [Ann. di Mat. 15_2, 277 (1887)]. Esso è stato ripreso e sistematicamente sviluppato da CASTELNUOVO [Torino Mem. 42^2 (1891)], ed è di uso continuo nella geometria sopra una superficie. Il teor. di pag. 328 che assegna la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una curva con un dato gruppo base, enunciato sotto quella forma in ENRIQUES-CHISINI (loc. cit. pagg. 392-427) (salvo il limite inferiore per l'ordine l), trovasi implicitamente nella « Vorlesungen » dell'Autore (pag. 115; ved. anche a pag. 302).

§ 3. - IL TEOREMA FONDAMENTALE $Af + B\varphi$.

110. Il teorema $Af + B\varphi$ nel caso semplice. — Sieno, in un piano, f, φ due curve algebriche di equazioni (in coordinate omogenee):

$$f(x_0,\ x_1,\ x_2) = 0, \quad \varphi(x_0,\ x_1,\ x_2) = 0,$$

e degli ordini rispettivi m, n. Sia inoltre P un punto ad esse comune, in cui f, φ abbiano le molteplicità effettive r, s. Si dice che in P le f, φ presentano il *caso semplice*, quando esse non hanno in P alcuna tangente comune. Il teorema che vogliamo stabilire e che (come accennammo a pag. 103) è fondamentale per la trattazione della geometria sopra una curva secondo il metodo di BRILL-NOETHER, chiamasi il « teorema $Af + B\varphi$ » e si enuncia così:

Se le curve $f = 0$, $\varphi = 0$ presentano in ognuno dei loro punti comuni il caso semplice, l'equazione di una qualunque curva algebrica, che passi colla molteplicità virtuale $r+s-1$ per ogni punto P, r-plo per f ed s-plo per φ, ha la forma $Af + B\varphi = 0$, dove $A = 0$, $B = 0$ son curve degli ordini rispettivi $l-m$, $l-n$. Inoltre le A, B possono esser determinate in guisa che le curve $A = 0$, $B = 0$ passino per ogni P colle molteplicità virtuali $s-1$ ed $r-1$.

Osserviamo anzitutto che le f, φ non posson avere che un numero finito di punti comuni, perchè, se avessero una parte comune, in ogni punto di questa possiederebbero la stessa tangente. Ciò posto, sia $g = 0$ una curva di ordine l soddisfacente alle ipotesi enunciate, e dimostriamo il teorema quando l è abbastanza grande.

All'uopo nell'equazione $Af + B\varphi = 0$ consideriamo variabili le A, B, in guisa che le curve $A = 0$, $B = 0$, degli ordini $l-m$, $l-n$, passino rispettivamente per ogni P colle molteplicità effettive $s-1$, $r-1$, il che è sempre possibile (n. 108) quando l è abbastanza grande. Allora la curva $Af + B\varphi = 0$ varia in un sistema lineare Σ.

Determiniamo la dimensione di Σ, che sarà eguale al numero dei coefficienti della combinazione lineare $Af + B\varphi$, diminuito di uno, quando ad ogni curva di Σ corrisponda una sola equazione del tipo $Af + B\varphi = 0$; mentre, se ogni curva di Σ è rappresentabile in ∞^i modi diversi sotto la forma $Af + B\varphi$, per ottener la dimensione di Σ bisognerà togliere $i+1$ dal numero dei coefficienti di $Af + B\varphi$. Occorre dunque verificare dapprima quando e come due rappresentazioni

$$Af + B\varphi = 0, \quad A'f + B'\varphi = 0,$$

dànno luogo alla stessa curva. Perchè ciò sia occorre e basta che, moltiplicata eventualmente una delle due equazioni per un fattore costante, risulti identicamente, rispetto ad x_0, x_1, x_2:

$$Af + B\varphi \equiv A'f + B'\varphi,$$

ovvero:

$$(A - A')f \equiv (B' - B)\varphi.$$

Poichè i due polinomi f, φ son primi fra loro, dovrà essere $A - A'$ divisibile per φ, cioè:

$$A - A' \equiv X\varphi,$$

dove X denota una forma d'ordine $l-m-n$ (così che se $l < m+n$, risulterà $X \equiv 0$). Dalle due identità precedenti si trae:

$$B' - B \equiv Xf.$$

e quindi:

$$A' \equiv A - X\varphi, \quad B' = B + Xf.$$

La curva $X = 0$ non è poi soggetta a nessun'altra condizione, all'infuori di quella che il suo ordine sia $l-m-n$, perchè ogni P risulta senz'altro $(s-1)$-plo (almeno) per A' ed $(r-1)$-plo (almeno) per B', qualunque sia X.

Dunque, data una rappresentazione $Af + B\varphi = 0$ di una curva $g = 0$, sotto le condizioni più volte indicate, ogni altra rappresentazione analoga è della forma:

$$(A - X\varphi)f + (B + Xf)\varphi = 0;$$

epperò, se $l \geq m+n$, risulta $i = \binom{l-m-n+2}{2}$.

D'altronde, se l è abbastanza grande, alle curve $A = 0$, $B = 0$ ogni punto P, per cui esse debban passare colle molteplicità effettive $s-1$ ed $r-1$, presenta loro rispettivamente $\sum_P \binom{s}{2}$, $\sum_P \binom{r}{2}$ condizioni indipendenti (n. 108). Dunque in $Af + B\varphi$ vi sono

$$\binom{l-m+2}{2} + \binom{l-n+2}{2} - \sum_P \left[\binom{s}{2} + \binom{r}{2}\right]$$

coefficienti variabili. Ne deriva che la dimensione di Σ è espressa da:

$$\binom{l-m+2}{2} + \binom{l-n+2}{2} - \binom{l-m-n+2}{2} - \sum_P \left[\binom{s}{2} + \binom{r}{2}\right] - 1 =$$
$$= \binom{l+2}{2} - 1 - mn - \sum_P \binom{r+s}{2} + \sum_P rs.$$

E infine, poichè $\sum_P rs = mn$ (in conseguenza dell'ipotesi che in ogni P le f, φ presentino il caso semplice), si trova per la dimensione di Σ l'espressione

$$\binom{l+2}{2} - 1 - \sum_P \binom{r+s}{2},$$

che è quella stessa spettante al sistema lineare Σ' delle curve $g=0$ d'ordine l, abbastanza grande (n. 108), passanti per ogni P colla molteplicità $r+s-1$ (*effettiva* per la generica g, *virtuale* per qualche g particolare). Si conclude che per l abbastanza grande i sistemi lineari Σ, Σ' coincidono, e così il teorema $Af+B\varphi$ è dimostrato quando l sia abbastanza grande.

Si avvertirà che il teorema è vero anche per una g d'ordine l passante per ogni P colla molteplicità *virtuale* $r+s-1$, giacchè una tal curva sta in Σ' e quindi in Σ. E per una curva siffatta si può soltanto dire che le curve $A=0$, $B=0$ della combinazione $Af+B\varphi=0$, in quanto son particolari nei loro rispettivi sistemi, passano per ogni P colle molteplicità virtuali $s-1$, $r-1$.

Se ora riusciremo a provare che, ammesso il teorema per un certo l, è vero anche per le curve di ordine $l-1$, esso risulterà dimostrato per ogni l.

Possiamo evidentemente supporre che la retta $x_0=0$ non passi per nessun punto P; bastando, se tale condizione non fosse soddisfatta, eseguire prima una trasformazione di coordinate, la quale non influisce affatto sul teorema, che ha carattere proiettivo.

Nell'ipotesi fatta su $x_0=0$ resta inclusa anche l'altra che nessuna delle forme f, φ sia divisibile per x_0.

Sia $g(x_0, x_1, x_2)=0$ una curva d'ordine $l-1$ passante per ogni P colla molteplicità virtuale $r+s-1$. Allora la curva $x_0 g=0$ soddisfa alle stesse condizioni, e pel teorema ammesso sarà:

$$x_0 g(x_0,x_1,x_2) \equiv A(x_0,x_1,x_2)f(x_0,x_1,x_2)+B(x_0,x_1,x_2)\varphi(x_0,x_1,x_2), \tag{13}$$

dove $A=0$, $B=0$ passan per ogni P colle molteplicità virtuali $s-1$, $r-1$. Posto, nella (13), $x_0=0$, avremo:

$$A(0, x_1, x_2)f(0, x_1, x_2) + B(0, x_1, x_2)\varphi(0, x_1, x_2) \equiv 0, \tag{14}$$

donde segue che la forma binaria, non identicamente nulla,

$\varphi(0, x_1, x_2)$ divide $A(0, x_1, x_2)f(0, x_1, x_2)$; e poichè essa non ha fattori comuni con $f(0, x_1, x_2)$ (se no $x_0=0$ conterrebbe qualche P), se ne ricava:

$$A(0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\varphi(0, x_1, x_2), \tag{15}$$

da cui:

$$A(x_0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\varphi(x_0, x_1, x_2) + x_0 A_1(x_0, x_1, x_2), \tag{16}$$

dove A_1 è una forma d'ordine $l-m-1$.

Dal confronto delle (14), (15), si trae:

$$B(0, x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2)f(0, x_1, x_2) \equiv 0,$$

donde:

$$B(x_0, x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2)f(x_0, x_1, x_2) \equiv x_0 B_1(x_0, x_1, x_2), \tag{17}$$

in cui B_1 denota una forma d'ordine $l-n-1$. Dalle (13), (16), (17) segue:

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + x_0 B_1 \varphi,$$

ovvero:

$$g \equiv A_1 f + B_1 \varphi.$$

Dunque g può rappresentarsi come combinazione lineare di f, φ. E le $A_1=0$, $B_1=0$, a norma delle (16), (17), passano per ogni P colle molteplicità virtuali rispettive $s-1$, $r-1$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

111. **Il teorema $Af+B\varphi$ nel caso generale.** — Il ragionamento esposto vale anche nel caso generale in cui le f, φ s'intersechino in un modo qualunque nei punti comuni, purchè esse non abbiano parti comuni, e purchè i punti propri ed infinitamente vicini in cui s'intersecano, vengano trattati come lo sono stati i punti P nel caso semplice.

E invero in due sole fasi della dimostrazione abbiamo usato l'ipotesi del caso semplice, e cioè nel calcolo della dimensione del sistema delle curve $A=0$, $B=0$ o $g=0$, che hanno nei P le date singolarità, e quando abbiamo impiegato la relazione $\sum_P rs = mn$. Ma siccome il calcolo di quelle dimensioni e la relazione $\sum_P rs = mn$, valgono immutati nel caso generale, purchè nei punti P si comprendano tutti i punti propri e infinitamente vicini comuni alle due curve, si conclude che *il teorema $Af + B\varphi$ vale anche nel caso generale, purchè le due curve f, φ non abbiano parti comuni e purchè esso riferiscasi ad una curva che passi colla molteplicità virtuale $r + s - 1$ per ogni punto proprio o infinitamente vicino ad un punto proprio, che sia r-plo per f e s-plo per φ. Analogo riferimento a tutti questi punti deve farsi per ciò che concerne le curve $A = 0$, $B = 0$.*

Il teorema $Af + B\varphi$ è dovuto a NOETHER. Prima di lui il problema della rappresentabilità di una forma come combinazione lineare di due altre, era stato considerato soltanto nei casi più elementari (da LAMÉ, GERGONNE, ecc.) e risoluto con un conto di costanti, non sempre rigoroso. Il NOETHER diede il teorema, nel caso d'intersezioni semplici delle $f = 0$, $\varphi = 0$, nel 1869 [Math. Annalen, **2**, 314]. Nel 1872 [Math. Annalen, **6**, 351], partendo dall'identità che esprime il risultante di f, φ come combinazione lineare dei due polinomi e usufruendo di sviluppi in serie di potenze intere, egli indicò la condizione necessaria e sufficiente affinchè un dato polinomio g sia rappresentabile sotto la forma $Af + B\varphi$, condizione espressa però in modo trascendente. Ma da essa risultava già la condizione sufficiente algebrica relativa al caso semplice (n. 110). La predetta condizione necessaria e sufficiente fu di poi semplificata in seguito alle ricerche dello stesso NOETHER, di HALPHEN, di VOSS, di BERTINI, di BAKER, ecc. [Veggasi in particolare BERTINI, Math. Ann. **34**, 447 (1889); Ist. Lomb. Rend., **24**$_2$, 1095 (1891) e una dimostrazione algebrica diretta, concernente il caso semplice in VOSS, Math. Ann. **27**, 527 (1886)]. Nelle ultime Note dedicate all'argomento il NOETHER potè dare la predetta condizione necessaria e sufficiente, restando nel campo puramente algebrico [Math. Ann. **30**, 410 (1887); Math. Annalen, **40**, 140 (1891)]. La prima di queste Note contiene l'osservazione che la condizione sufficiente relativa al caso semplice vale anche nell'ipotesi di punti infinitamente vicini, purchè questi si considerino come distinti. La dimostrazione esposta nel n. 110 (alla quale si è qui dato una più ampia portata riferendola a singolarità virtuali) deriva da una nota dell'Autore [Lincei Rend. **11**$_5$, 105 (1902)] ove è trattato il problema generale della rappresentazione di una forma di quante si vogliano variabili, per combinazione lineare di più altre [Veggasi altresì, a proposito del problema generale, un'altra Nota dell'Autore in Torino Atti, **41**, 205 (1905), ed una Nota di R. TORELLI, ibidem, pag. 224].

Il concetto della dimostrazione del n. 110 trovavasi del resto in una Nota precedente della Sig.na C. A. SCOTT [Math. Annalen **52**, 593 (1899)]. L'osservazione del n. 111, mercè la quale si estende al caso di singolarità infinitamente vicine il procedimento stesso che serve nel caso semplice, è dell'Autore [Padova Atti, **24**, 137 (1908)]. Per una trattazione più analitica del teorema $Af + B\varphi$, ved. BRILL, « Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen » [Vieweg, Braunschweig (1925)], pag. 284; nonchè l'opera di J. KÖNIG, « Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen » [Leipzig (1903)], pag. 385, ove è considerato il problema generale per forme di quante si vogliano variabili.

§ 4. - LE CURVE AGGIUNTE AD UNA CURVA PIANA DOTATA DI SINGOLARITÀ QUALUNQUE E IL TEOREMA DEL RESTO.

112. **Curve aggiunte ad una curva piana dotata di singolarità qualunque. Gruppi corresiduali.** — Abbiamo già definito e studiato (nn. 43, 95) le curve aggiunte ad una curva piana dotata di soli nodi. Considereremo ora una curva piana f (di equazione $f = 0$) con punti multipli qualunque.

Curva aggiunta ad f dicesi una curva passante per ogni punto s-plo (proprio o no) di f con molteplicità virtuale $s - 1$ (n. 109). Le aggiunte di un dato ordine l formano un sistema lineare, e, se l è abbastanza grande, la generica fra esse ha in ogni punto s-plo di f molteplicità *effettiva* $s - 1$ (e non passa per altri punti fissi di f) (n. 108), mentre una particolare può aver molteplicità diverse.

Sia Σ un sistema lineare di aggiunte d'ordine l, che stacchi su f, supposta irriducibile, una g_n^r. Supporremo che la generica φ di Σ abbia in ogni punto s-plo di f molteplicità effettiva $t (\geq s - 1)$.

Consideriamo un punto proprio O di f (semplice o multiplo), che sia base pel sistema Σ, e un ramo γ di f avente l'origine in O. Il ramo γ abbia con φ la molteplicità d'intersezione I. Se O, come origine di γ, è un punto fisso i-plo $(i \leq I)$ della g_n^r, vuol dire che delle I intersezioni che φ ha con γ in O, soltanto $I - i$ si attribuiscono al gruppo base K di Σ. Supporremo in ogni caso attribuite al gruppo base K per lo meno le $\Sigma s(s - 1)$ intersezioni che sarebbero assorbite dai punti multipli (propri o no) di f, qualora in ogni punto s-plo la generica φ avesse la molteplicità effettiva $s - 1$.

Ciò premesso, decompongasi il gruppo generico staccato su f, fuori di K, dalla φ, in due gruppi G, E, in guisa che la molteplicità di un punto del gruppo composto, risulta la somma delle molteplicità dello stesso punto per i gruppi componenti.

Sia φ' un'altra curva di Σ, passante pel gruppo E, la quale seghi ulteriormente f, fuori di K e del gruppo E, in un gruppo G'. Conduciamo per G un'aggiunta ψ, d'ordine λ; e denotiamo con Γ l'ulteriore intersezione di ψ con f, fuori di G e delle $\Sigma s(s - 1)$ intersezioni che intendiamo in ogni caso assorbite dai punti multipli di f e che costituiscono un certo gruppo H.

La curva composta $\varphi'\psi$ passa con molteplicità virtuale $s+t-1$ per ogni punto (proprio o no) del gruppo base K (ivi compreso il caso $s=1$) e contiene inoltre effettivamente il gruppo $G+E$. Onde sarà (n. 111):

$$\varphi'\psi \equiv \psi'\varphi + \theta f, \tag{18}$$

ove ψ' è una curva d'ordine λ avente molteplicità virtuale $s-1$ in ogni punto s-plo di f, giacchè i punti per cui $s \geq 2$ figuran certo nel gruppo K. Dunque ψ' è un'aggiunta d'ordine λ ad f. Dico ch'essa passa effettivamente pel gruppo $G'+\Gamma$.

Consideriamo infatti un punto proprio O, origine di un ramo γ di f, ed in quanto O si riguardi come origine di questo solo ramo, sieno $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ (ove le i son ≥ 0) le molteplicità di O rispettivamente come punto di K, G, E, G', Γ, H. Allora la curva $\varphi'\psi$ ha in O con γ molteplicità di intersezione $i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+i_6$, e tal sarà perciò di $\psi'\varphi$, in forza della (18). Ma poichè φ ha in O con γ molteplicità d'intersezione $i_1+i_2+i_3$, ψ' avrà ivi molteplicità d'intersezione $i_4+i_5+i_6$, e quindi ψ' conterrà O, i_4 volte come punto di G', i_5 volte come punto di Γ, i_6 volte come punto di H.

Due gruppi, come G, E o G', E o G, Γ, o G', Γ, che insieme costituiscono la completa intersezione di f con una aggiunta, fuori del gruppo base assegnato (nel caso delle prime due coppie, K, nel caso delle ultime due H), diconsi *resti* l'uno dell'altro (rispetto alle aggiunte di quel determinato ordine — per le prime due coppie l, per le ultime λ — e a quel fissato gruppo base).

Due gruppi di un egual numero di punti, come G, G', diconsi *corresiduali* se posseggono un medesimo resto. Ebbene, dall'ipotesi che G, G' avessero il medesimo resto E, abbiamo tratto la conseguenza che un qualsiasi resto Γ di G è altresì resto di G'.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

Dati due gruppi corresiduali, ogni resto dell'uno è resto dell'altro.

In ciò consiste il *Restsatz* sotto la forma di BRILL-NOETHER.

OSSERVAZIONE. — Una lieve estensione del ragionamento precedente prova che il teorema vale anche quando (come fanno BRILL e NOETHER) i gruppi G, G' di cui si parla non contengano lo stesso numero di punti. Essi diconsi ancora corresiduali quando hanno un medesimo resto: l'uno rispetto alle aggiunte di un certo ordine e l'altro rispetto alle aggiunte di un altro ordine. Ma, come apparirà ovviamente dal seguito, la portata del teorema così esteso è più vasta soltanto in apparenza.

113. Costruzione delle serie lineari complete mediante le aggiunte. Unicità della serie lineare completa. — Il *Restsatz* ci offre subito il modo di costruire le serie lineari complete sopra una curva f dotata di singolarità qualunque, estendendo così i risultati dei nn. 43, 44, 95, che riferivansi a una curva con soli nodi.

Sia su f una g_n^r priva o no di punti fissi (eventualmente un sol gruppo di punti, se $r=0$). Essa è staccata su f, fuori di un gruppo base K, da un sistema lineare Σ di curve di un certo ordine l, le quali posson supporsi aggiunte ad f, perchè, se non lo fossero, basterebbe aggregare alle curve di Σ una curva fissa, aggiunta ad f. Nel gruppo base K sono di certo incluse almeno $\Sigma s(s-1)$ intersezioni assorbite dai punti multipli di f e inoltre tutti i punti fissi (propri o no) del sistema Σ, che non lo sono per la serie g_n^r. Pertanto i gruppi di g_n^r sono corresiduali rispetto alle aggiunte di ordine l e al gruppo base K; corresiduali senza resto alcuno o se si vuole assumendo come resto un qualsiasi gruppo contenuto in K [purchè si lascino intatte in K le solite $\Sigma s(s-1)$ intersezioni]. Pertanto:

I gruppi di una serie lineare sono corresiduali; e viceversa.

La reciproca risulta da ciò che, se due gruppi son corresiduali, essi son le intersezioni totali con f di due curve aggiunte dello stesso ordine, fuori di un certo gruppo K, onde essi appartengono alla serie lineare segata su f da tutte le aggiunte di quell'ordine aventi K come gruppo base.

Insomma *il concetto proiettivo di gruppi corresiduali coincide col concetto invariantivo di gruppi equivalenti.*

Ne deriva altresì di nuovo (cfr. col n. 28) che:

Due gruppi corresiduali con un terzo lo sono fra loro.

Invero se A, B hanno lo stesso resto G, e B, C lo stesso resto E, il gruppo G, come resto di B, pel Restsatz, sarà altresì resto di C, epperò A, B, C appartengono alla medesima serie lineare segata dalle aggiunte di un determinato ordine fuori di un certo gruppo base.

La totalità dei gruppi corresiduali con un dato costituisce dunque una serie lineare, che non è contenuta in una più ampia dello stesso ordine. Essa è ben determinata da uno qualunque de' suoi gruppi. *Si ritrova in tal guisa il teorema dell'unicità della serie lineare completa cui appartiene un dato gruppo di punti.*

Di più poichè, sempre in forza del Restsatz, i gruppi segati su f da *tutte* le aggiunte di un dato ordine l, fuori di un gruppo base K, costituiscon l'insieme di tutti i gruppi corresiduali ad uno di essi (rispetto alle aggiunte di quell'ordine ed a quel gruppo base), si conclude che:

Il sistema lineare delle aggiunte di un determinato ordine l, passanti per un dato gruppo base, sega ulteriormente sulla curva una serie lineare completa.

In particolare: *è completa la serie lineare segata da tutte le aggiunte di un dato ordine, fuori dei punti multipli.*

Pertanto, per costruire sulla curva f la serie lineare completa individuata da un dato gruppo G di punti, si condurrà per G un'aggiunta φ d'ordine l così alto, che ne esista qualcuna non contenente come parte f. Detto E il gruppo di ulteriore intersezione di φ con f, fuori di G e del gruppo delle intersezioni assorbite dalle condizioni di aggiunzione, le aggiunte d'ordine l per E, staccheranno su f la serie $|G|$.

114. Il genere di una curva dotata di singolarità qualunque. — Sia la solita curva piana irriducibile f, d'ordine n, dotata di singolarità qualunque, e ne sia p il genere; s denoti la generica molteplicità di un punto multiplo (proprio o no) di f.

Le curve aggiunte ad f, di ordine l abbastanza alto, passano pei punti s-pli di f, che presentano loro condizioni indipendenti, colle molteplicità effettive $s-1$ e non hanno altri punti fissi (n. 108); onde esse staccano su f, fuori dei punti multipli, una serie $g_{n_l}^{r_l}$ (priva di punti fissi), avente:

$$n_l = nl - \Sigma s(s-1), \quad r_l = \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2} - \frac{(l-n)(l-n+3)}{2} - 1,$$

sicchè risulta:

$$n_l - r_l = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2}.$$

Ma d'altra parte, essendo la $g_{n_l}^{r_l}$ completa (n. 113) e non speciale (perchè si può sempre supporre $n_l > 2p - 2$), è $n_l - r_l = p$; dunque:

Il genere di una curva piana irriducibile di ordine n, dotata di singolarità qualunque, è dato dalla formula:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2}, \tag{19}$$

ove il sommatorio è esteso a tutti i punti multipli propri o infinitamente vicini, della curva.

A questo risultato noi siamo giunti rapidamente, combinando il teorema del n. prec. coi teoremi sulla dimensione delle serie lineari complete, altrimenti ottenuti.

Se si suppone per contro che la espressione (19) del genere sia stata direttamente acquisita [1], ne deriva la teoria invariantiva delle serie lineari secondo il metodo di BRILL-NOETHER, perfezionato dai geometri della scuola italiana e segnatamente da BERTINI (ved. le citazioni bibliografiche a pag. 169). Ne daremo un cenno nel n. successivo.

115. La geometria delle serie lineari secondo BRILL e NOETHER. — Calcolata la dimensione r_l della $g_{n_l}^{r_l}$ completa segata sulla curva f, di cui al n. prec., dalle curve aggiunte di ordine arbitrario $l = n - 3 + \alpha$ ($\alpha > 0$), si trova, mercè la (19) [cfr. col n. 95]:

$$r_l \geq p - 2 + \alpha n.$$

Se invece $l = n - 3 - \alpha$ ($\alpha \geq 0$), viene:

$$r_l \geq p - 1 - \alpha n + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}.$$

Quanto all'ordine n_l della serie, esso è rispettivamente espresso da

$$n_l = 2p - 2 + \alpha n, \quad n_l = 2p - 2 - \alpha n.$$

Ne deriva che, in ogni caso, è $n_l - r_l \leq p$; e poichè una g_m^r qualsiasi si ottiene (n. 113) imponendo alle aggiunte di

[1] Ved. p. es. BERTINI, *Iperspazi*, pag. 473.

un certo ordine l il passaggio per μ dati punti di f, così n_l decresce di μ unità ed r_l al più di μ unità. Onde è sempre $m - r \leq p$, cioè:

Per una g_m^r completa sopra una curva di genere p, vale la disuguaglianza $r \geq m - p$.

La serie di ordine $2p - 2$ e di dimensione $\geq p - 1$, staccata su f dalle aggiunte d'ordine $n - 3$, chiamasi la *serie canonica.*

A questo punto si dimostra il teorema di riduzione esattamente come a pag. 155; e introdotte poi le *serie speciali* come le serie contenute nella serie canonica, si arriva al teorema di Riemann-Roch, col ragionamento stesso esposto a pag. 156, cominciando anzitutto a provare che le serie complete g_m^r per cui $r > m - p$ sono contenute nella serie canonica.

116. Le formule di Plücker per una curva piana con singolarità qualunque. — La formula (19) ci offre il mezzo di ottenere facilmente l'estensione delle formule di Plücker (pagg. 43, 127) ad una curva f dotata di punti multipli qualunque.

Denoteremo con n l'ordine di f; con m la sua classe; con s la molteplicità di un generico punto multiplo (proprio o no) di f; con α, α_1 ordine e classe di un ramo generico di f.

Applicando la formula che dà il numero dei punti doppi di una g_n^1 alla serie segata su f dà un fascio generico di rette, viene (n. 34):

$$m + \Sigma(\alpha - 1) = 2(n + p - 1), \tag{20}$$

donde, tenuto conto della (19), si trae la *prima formula di* Plücker *generalizzata:*

$$m = n(n - 1) - \Sigma s(s - 1) - \Sigma(\alpha - 1). \tag{21}$$

Da questa per dualità (n. 37) si ricava la *seconda formula di* Plücker *generalizzata:*

$$n = m(m - 1) - \Sigma\sigma(\sigma - 1) - \Sigma(\alpha_1 - 1), \tag{22}$$

ove σ denota la molteplicità di una generica tangente multipla (propria o no) di f.

Eliminando m fra la (20) e la sua relazione duale:

$$n = 2(m + p - 1) - \Sigma(\alpha_1 - 1),$$

viene:

$$\Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3) = 3(n + 2p - 2), \tag{23}$$

la quale si può anche ottenere applicando alla g_n^2 delle sezioni rettilinee di f, la formula del n. 37. La (23) ci mostra come fra i punti tripli di tale g_n^2, che son generalmente *flessi* della curva, ogni origine di un ramo (α, α_1) conta per $2\alpha + \alpha_1 - 3$ unità, come sapevamo già, appunto dal n. 37.

Tenuto conto della (19), la (23) porge la *terza formula di* Plücker *generalizzata:*

$$i = 3n(n - 2) - 3\Sigma s(s - 1) - \Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3), \tag{24}$$

ove i denota il numero dei *flessi ordinari*, origini di rami (1, 2), e il secondo sommatorio è esteso alle origini dei rami pei quali si verifica una almeno delle disuguaglianze $\alpha > 1$, $\alpha_1 > 2$.

Dalla (24) per dualità si deduce la *quarta formula di* Plücker *generalizzata:*

$$k = 3m(m - 2) - 3\Sigma\sigma(\sigma - 1) - \Sigma(2\alpha_1 + \alpha - 3), \tag{25}$$

ove k è il numero delle *cuspidi ordinarie*, origini di rami (2, 1) e il secondo sommatorio è esteso alle origini dei rami pei quali si verifica una almeno delle $\alpha > 2$, $\alpha_1 > 1$.

La (21) si può interpretare (n. 109, Oss. 2^a) dicendo che *la prima polare di un punto generico, rispetto ad f, ha in ogni punto s-plo di f la molteplicità apparente $s - 1$, e la molteplicità apparente 1 in $\alpha - 1$ punti semplici successivi sopra ogni ramo di ordine α, avente per origine quel punto.*

La somma $\Sigma(\alpha - 1)$ relativa ad un determinato punto s-plo di f, chiamasi *la diramazione* (Noether) o *l'indice cuspidale* (Smith) di quel punto.

117. Completezza della serie caratteristica di un sistema lineare completo di curve piane. — Un'altra notevole applicazione si può fare del teorema concernente la completezza delle serie lineari segate sopra una curva dalle aggiunte.

Consideriamo in piano un sistema lineare Σ di curve di ordine m, la cui curva generica C sia irriducibile ed abbia in un punto base di Σ la molteplicità effettiva s.

Il sistema sia *completo*: cioè sia costituito da *tutte* le curve di ordine m passanti pei dati punti base colle molteplicità (virtuali = effettive) s.

Grado (effettivo) n del sistema è il numero delle intersezioni di due sue curve, fuori delle Σs^2 assorbite dai punti base (cfr. col n. 13). *Genere (effettivo)* p di Σ è il genere della C generica.

Se r è la dimensione (effettiva) del sistema, sulla C le altre curve di Σ staccano una g_n^{r-1} priva di punti fissi; sicchè il grado n è certo >0, se $r>1$, mentre è zero se il sistema è un fascio. La suddetta g_n^{r-1} chiamasi la *serie caratteristica* di Σ (sulla curva C).

Una trasformazione cremoniana del piano muta manifestamente Σ in un sistema lineare Σ', che ha lo stesso grado e lo stesso genere, perchè alle n intersezioni variabili di due curve di Σ rispondono biunivocamente le intersezioni variabili delle curve analoghe di Σ'. Alla serie caratteristica di Σ risponde la serie caratteristica di Σ'. Sicchè, per studiare la serie caratteristica, possiamo riferirci al caso in cui Σ ha punti base ordinari, bastando eventualmente assoggettare prima il dato sistema ad un'opportuna trasformazione cremoniana (n. 103, Oss. 2ª).

Ora, per ottenere su Σ la serie caratteristica, consideriamo anzitutto la serie lineare tagliata sulla generica C, fuori dei punti base, dalle aggiunte dello stesso ordine m di C. La generica di queste aggiunte ha in ogni punto base O s-plo di Σ molteplicità effettiva eguale ad $s-1$ o ad s: non superiore ad s, perchè tale è ivi la molteplicità di C, che è aggiunta di se stessa. Comunque sia, le aggiunte considerate staccano su C una serie lineare completa. Imponendo loro di passare per ciascuno dei punti infinitamente vicini ad un punto base O, sugli s rami di cui esso è origine (beninteso, se già le suddette aggiunte non hanno spontaneamente O come s-plo), esse acquistano in O un punto s-plo; e d'altronde non cessano di segare su C una serie lineare completa (fuori dei punti fissi), perchè la serie da esse segata non è che la serie residua di un gruppo di punti di C, rispetto ad una serie completa. Si conclude pertanto:

La serie caratteristica di un sistema lineare completo di curve piane, dotato di punti base qualunque, è completa.

Questo teorema permette di assegnare subito, in base al teorema di Riemann-Roch, la dimensione $r-1$ della serie caratteristica e quindi la dimensione r di Σ. Si avrà:

$$r = n - p + 1 + i,$$

ove i è l'indice di specialità delle serie caratteristica. Se ora si tiene conto che:

$$n = m^2 - \Sigma s^2, \quad p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2},$$

viene:

$$r = \frac{m(m+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2} + i.$$

D'altronde i punti base del sistema impongono alle curve d'ordine m un numero di condizioni lineari che è eguale a $\sum \frac{s(s+1)}{2}$ oppure a $\sum \frac{s(s+1)}{2} - \sigma$, qualora σ di quelle condizioni sieno conseguenza delle rimanenti; dunque $i = \sigma$.

Se $\sigma = 0$, il sistema dicesi *regolare*; se $\sigma > 0$, dicesi *sovrabbondante* e σ chiamasi la *sovrabbondanza* del sistema. Si può in conclusione enunciare:

La sovrabbondanza di un sistema lineare di curve piane eguaglia l'indice di specialità della serie caratteristica.

In particolare *un sistema a serie caratteristica non speciale è regolare*. Così è dunque di un sistema per cui sia $n > 2p - 2$ oppure $r > p$.

Osservazione. — Abbiamo già avvertito (pag. 40) che il concetto di gruppi caratteristici sulle curve di un sistema lineare rientra in quello più generale di gruppi caratteristici sulle curve di un sistema continuo.

Per le notizie storiche e bibliografiche relative al *Restsatz* e alla unicità, che ne consegue, della serie completa cui appartiene una data serie lineare, rinviamo alle pagg. 103, 108, 168. Qui aggiungeremo che il *Restsatz* sotto la sua forma generale, valevole anche per curve con singolarità qualunque, fu dato da Noether [Math. Ann. **23**, nn. 27, 28 (1883); Math. Ann. **34**, 451 (1889)] in lavori posteriori alla classica Memoria da lui scritta con Brill. Per un'esposizione della teoria più vicina al primitivo disegno di Brill-Noether, veggansi p. es. le « Vorlesungen » di Brill citate a pag. 340. L'espressione (19) del genere per una curva piana con singolarità qualunque è di NOETHER [Math. Annalen 8, 497 (1874); Math. Ann. 23, 332 (1883)]. Ved. pure BERTINI, Ist. Lomb. Rend. 21_2, 326, 413 (1888); Iperspazi, pag. 473. Anche le estensioni delle formule di PLÜCKER (n. 118) sono dovute a NOETHER [Math. Ann. 9, 182 (1875)] e sono state ritrovate, da punti di vista vari, da SMITH, HALPHEN, ZEUTHEN; ecc. Nei riguardi del comportamento della prima polare di un punto generico rispetto ad una curva piana, nei punti multipli di questa, il teorema enunciato alla fine del n. 116 è contenuto nei lavori su citati di NOETHER; quanto al comportamento *effettivo* di quella polare veggasi ENRIQUES-CHISINI, vol. II, pag. 438.

Notizie storico-bibliografiche circa la serie caratteristica d'un sistema lineare completo di curve piane abbiamo dato a pag. 40. Aggiungiamo che la completezza di questa serie è stata dimostrata da BRILL-NOETHER (loc. cit. a pag. 40) e che l'eguaglianza fra l'indice di specialità della serie caratteristica e la sovrabbondanza del sistema è stata osservata da CASTELNUOVO (loc. cit. a pag. 40). In precedenza però SEGRE (loc. cit. a pag. 40) aveva osservato che ogni sistema per cui $n > 2p - 2$ o $r > p$ è regolare, ed anzi (pag. 148) per $n > 2p$ o $r > p + 1$ è semplice. Sulla teoria generale dei sistemi lineari di curve piane avremo da tornare in altro volume.

Notizie bibliografiche da aggiungersi a pag. 288.

La Nota di DE FRANCHIS citata alla fine di pag. 288 trovasi in Palermo Rend. 36, 368 (1913). La dimostrazione accennata nella Nota a piè della pag. 271 è dell'Autore [Lincei Rend. 23_5, 581, nota (1) a piè pagina (1914)]. La condizione che le involuzioni di cui trattasi sieno di genere > 1 è necessaria, perchè vi sono effettivamente curve di genere qualunque possedenti un'infinità discontinua di involuzioni ellittiche: il che noi vedremo in altro volume quando ci occuperemo degli integrali abeliani (ved. le « Vorlesungen » dell'Autore, pag. 293 e segg). Lo studio delle involuzioni ellittiche sopra una curva ellittica è stato compiuto da CASTELNUOVO [Torino Atti, 24, 3 (1888)] e allo stesso [Ist. Lomb. Rend. 25_2 (1893)] è dovuto lo studio delle corrispondenze birazionali fra i gruppi di p punti d'una curva di genere p. La varietà di JACOBI, sulla quale avremo da tornare nella teoria delle funzioni abeliane, vien chiamata col nome del grande analista, pel suo stretto legame colle funzioni theta di JACOBI.

ELENCO DEGLI AUTORI CITATI

ABEL 240.
ALBANESE 335.
APPELL e GOURSAT 34.
APOLLONIO 308.
ARGAND 81.
BAKER 340.
BECK 43.
BELLAVITIS 308.
BERTINI 4, 7, 9, 15, 22, 29, 38, 40, 41, 44, 46, 54, 64, 67, 69, 70, 72, 94, 108, 138, 143, 231, 290, 291, 292, 296, 332, 333, 340, 345, 350.
BERZOLARI 16.
BÉZOUT 50, 53, 54, 56.
BIANCHI 82, 83, 86, 115.
BORDIGA 108, 249.
BRAIKENRIDGE 307.
BRILL 40, 46, 51, 63, 103, 108, 111, 143, 144, 153, 154, 233, 240, 242, 243, 249, 250, 254, 340, 342, 343, 345, 349.
CASTELNUOVO 38, 40, 48, 65, 103, 108, 144, 149, 241, 243, 250, 254, 286, 287, 288, 289, 290, 292, 293, 294, 295, 296, 335, 350.
CAUCHY 102.
CAYLEY 89, 138, 139, 143, 144, 233, 240, 242, 243, 249, 254, 308, 333, 334.
CHASLES 224, 241, 242, 249, 253, 292.
CHISINI 15, 53, 118, 180, 254, 294, 334, 335, 350.
CLEBSCH 143, 149, 240, 332, 333.
CLIFFORD 112, 158, 159, 160, 161.
COMESSATTI 250, 288.
CREMONA 6, 38, 126, 142, 308.
DANDELIN 308.
DEDEKIND 103.
DE FRANCHIS 143, 144, 177, 212, 267, 269, 287, 288, 350.
DEL PEZZO 94, 333.
ENRIQUES 15, 38, 53, 103, 108, 118, 180, 241, 254, 294, 334, 335, 350.
FANO 180.
FERMAT 308.
FINE 144, 334.
GAUSS 81.
GERBALDI 126.
GERGONNE 340.
GIAMBELLI 250.
GÖHNER 250.
GORDAN 143.
GUCCIA 126, 144.
HALPHEN 144, 241, 333, 334, 340, 350.
HAMBURGER 332, 334. 335.
HUMBERT 38, 241, 288.
HURWITZ 144, 177, 190, 233, 240, 241, 242, 243, 269, 287.
JACOBI 281, 283, 284, 285, 350.
JONQUIÈRES 38, 144, 241, 242, 243, 244, 249, 250, 308.
JUNG (G.) 335.
KANTOR (S.) 190.
KLEIN 95, 121, 177, 180, 190, 243, 332.
KÖNIG (J.) 340.
KRONECKER 15, 332.
LAMÉ 340.
LAGRANGE 335.
LEVI (B.) 333.
LIE 170, 180.
LINDEMANN 240.
LÜROTH 29, 32, 34, 46, 206, 207.
MAC LAURIN 307.

MAGNUS 308.
MEYER (F.) 250.
NEWTON 307.
NOETHER 40, 51, 63, 103, 108, 111, 143, 150, 154, 250, 308, 331, 332, 333, 334, 340, 342, 343, 345, 347, 349, 350.
PAINLEVÉ 241, 288.
PANNELLI 333.
PICARD 333.
PIERI 241, 333.
PINCHERLE 82, 83, 86, 115.
PLÜCHER 42, 43, 123, 129, 138, 139, 140, 141, 308, 334, 335, 346, 347, 350.
POINCARÉ 177, 333.
PONCELET 307.
PUISEUX 333, 334, 335.
RIEHLE 46.
RIEMANN 101, 103, 143, 155, 157, 292, 294, 296, 332, 346, 349.
ROCH 155, 157, 292, 294, 296, 346, 349.
ROSATI 242, 243, 287.
SALMON 185, 334.
SALOMON 46, 47.
SCHUBERT 22, 143, 252, 253, 292.
SCHWARZ 177, 243, 249.
SCOTT 340.
SEGRE 11, 15, 22, 38, 40, 74, 102, 103, 108, 111, 138, 141, 142, 143, 144, 177, 190, 240, 241, 242, 253, 289, 290, 292, 294, 295, 296, 333, 334, 335, 350.
SEVERI 29, 39, 42, 73, 110, 121, 143, 144, 177, 211, 240, 241, 242, 249, 250, 253, 269, 272, 286, 287, 291, 307, 308, 335, 340, 350.
SEYDEWITZ 308.
SIMART 333.
SMITH 333, 334, 347, 350.
STEINER 43, 308.
SYLVESTER 126.
TANTURRI 250.
TAYLOR 202.
THOMSON (W.) 308.
TORELLI (R.) 144, 246, 247, 249, 254, 263, 287, 288, 340.
VERONESE 63, 67, 94, 138, 139, 141, 142, 144, 292, 333.
VESSIOT 333.
VIÈTE 308.
VOSS 340.
WEBER 108, 210.
WEIERSTRASS 95, 143, 146, 332, 333, 334.
ZEUTHEN 143, 207, 209, 210, 211, 217, 226, 228, 230, 231, 234, 235, 238, 241, 242, 249, 250, 257, 267, 271, 284, 287, 350.

INDICE

PREFAZIONE . . . . PAG. V
Nozioni introduttorie . . . . » 1
I. Funzioni algebriche di una variabile . . . . . » 1
II. Funzioni algebriche di più variabili . . . . . » 3
III. Funzioni algebriche di un punto variabile sopra una curva o ipersuperficie algebrica . . . . . » 4
IV. Trasformazioni razionali e birazionali . . . . . » 5
V. Curve algebriche sghembe . . . . . » 9
VI. Curve e varietà algebriche iperspaziali . . . . . » 14
VII. Geometria sopra un ente algebrico . . . . . » 16
VIII. Geometria numerativa . . . . . » 16

CAPITOLO PRIMO

Sistemi lineari di curve piane . . . . . PAG. 18
§ 1. *Generalità sopra i sistemi lineari di curve piane* . . . . . » 18
1. Definizioni e proprietà elementari. Sistema congiungente e sistema intersezione di due dati sistemi . . . . . » 18
2. Condizioni algebriche e lineari . . . . . » 22
3. Punti base d'un sistema lineare . . . . . » 27
4. Sistemi lineari di forme algebriche . . . . . » 28
§. 2. *Teoremi di Lüroth e di Bertini* . . . . . » 29
5. Lemma sopra le serie algebriche di gruppi di punti sopra una retta . . . . . » 29
6. Il teorema di Lüroth . . . . . » 32
7. Sistemi algebrici di indice uno di curve piane . . . . . » 34
8. Digressione sopra una proprietà differenziale di una curva piana variabile in un sistema continuo e dotata di punti multipli variabili . . . . . » 38
9. Seguito . . . . . » 40
10. Il teorema di Bertini sopra i punti multipli della curva generica d'un sistema lineare . . . . . » 40
11. Altre applicazioni immediate del teorema del n. 8: La prima formula di Plücker. Il numero delle normali condotte ad una curva da un punto . . . . . » 42
12. Sistemi lineari riducibili . . . . . » 44
13. Sistemi lineari semplici e composti . . . . . » 47

Capitolo Secondo

Prime proprietà fondamentali di geomtria sopra una curva . . Pag. 50
§ 1. *Le serie lineari sopra una curva algebrica* . . . . » 50
14. Serie lineari e involuzioni semplicemente infinite . . . » 50
15. Il teorema di Bézout per le curve iperspaziali. . . . . » 53
16. Serie lineari più volte infinite . . . . » 55
17. Costruzione della imagine proiettiva di una data serie lineare. Serie semplici e composte . . . . » 60
18. Proiezioni di una curva iperspaziale algebrica. . . . . » 64
19. Condizione perchè una corrispondenza birazionale fra due curve sia una un'omografia . . . . » 67
20. Serie lineari contenute in una data . . . . » 69
21. Interpretazione proiettiva della relazione fra una serie lineare ed una serie lineare subordinata . . . . . . » 70
§ 2. *Trasformazione birazionale di una curva algebrica in una priva di punti multipli*. . . . . » 74
22. Costruzione di un modello proiettivo privo di punti multipli » 74
23. Rami di una curva algebrica . . . . » 78
24. Rappresentazione analitica di un ramo. . . . . » 81
25. Caratteri proiettivi di un ramo . . . . » 85
26. Proiezioni di un ramo . . . . » 93

Capitolo Terzo

Gruppi equivalenti. Serie lineari complete . . . . Pag. 95
27. Ordine di una funzione razionale di un punto variabile sopra una curva in un punto dato . . . . » 95
28. Equivalenza di due gruppi di punti sopra una curva. Concetto di serie lineare completa . . . . » 99
29. Operazioni di somma e di sottrazione sulle serie lineari . » 103
30. Gruppi e serie lineari virtuali . . . . » 109
31. Interpretazione proiettiva delle serie lineari complete. Curve normali . . . . » 110
32. Applicazione alle curve razionali . . . . » 111

Capitolo Quarto

Il genere di una curva . . . . Pag. 113
33. Gruppo jacobiano di una serie lineare ∞^1. Serie jacobiana di una serie ∞^r. . . . . » 113
34. La serie canonica di una curva ed il genere . . . . . » 122
35. Applicazioni: Trasformazione per dualità di un ramo di curva piana. La seconda e la terza formula di Plücker » 127
36. Ulteriore applicazione: Normali ad una curva piana da un punto . . . . » 129

37. Altre importanti applicazioni: Gruppo dei punti multipli secondo $r+1$ di una serie g_n^r. Trasformazione per dualità di un ramo di curva iperspaziale . . . . Pag. 131
38. Formule di Cayley, di Veronese e di Segre . . . . . . » 138

Capitolo Quinto

La geometria delle serie lineari secondo il metodo rapido . . . Pag. 145
39. Un lemma sopra i gruppi di punti di una curva. . . . » 145
40. Nuova definizione che ne consegue pel genere di una curva » 146
41. Serie lineari non speciali e speciali . . . . » 146
42. Serie lineari le cui imagini proiettive son curve sicuramente prive di punti multipli . . . . » 147
43. Completezza della serie lineare segata sopra una curva piana, dotata di soli nodi, dalle aggiunte di un dato ordine. Equivalenza della definizione del n. 40 e delle precedenti definizioni del genere . . . . » 148
44. Il teorema del resto sotto forma proiettiva . . . . . . » 153
45. Dimensione della serie canonica. Teorema di riduzione . » 154
46. Il teorema di Riemann-Roch. . . . . » 155
47. Prime conseguenze del teorema di Riemann-Roch . . . » 157
48. In qual caso la serie canonica è composta. Curve iperellittiche. Teorema di Clifford. . . . . » 158
49. La curva canonica del genere p . . . . » 159
50. Ulteriore determinazione del teorema Clifford . . . . . » 160
51. Conseguenza dei teoremi precedenti, in ordine al problema di trasformare birazionalmente una data curva, in una priva di punti multipli. . . . . » 161
52. Il teorema delle lacune. . . . . » 164
53. Limite inferiore pel numero dei punti Weierstrass distinti sopra una curva di genere $p > 1$ . . . . » 166

Capitolo Sesto

Le corrispondenze fra curve algebriche. Moduli di una curva ellittica o iperellittica . . . . Pag. 170
§ 1. *Trasformazioni birazionali di una curva in sè*. . . . . . » 170
54. Trasformazioni birazionali di una curva razionale o ellittica in sè medesima . . . . » 170
55. Il teorema di Schwarz-Klein sopra le trasformazioni birazionali in sè di una curva di genere $p > 1$ . . . . » 173
56. Limite superiore pel numero dei punti uniti di una trasformazione birazionale sopra una curva. Un'altra dimostrazione del teorema di Schwarz-Klein . . . . . » 175
57. Curve algebriche con infinite omografie in sè . . . . . » 177
58. Concetto di moduli d'una curva. Moduli d'una curva ellittica o iperellittica . . . . » 180
59. Le corrispondenze birazionali singolari sulle curve ellittiche » 185

§ 2. *Corrispondenze algebriche d'indici qualunque fra due curve distinte o sovrapposte* . . . . PAG. 191
60. Corrispondenze algebriche fra due curve . . . . » 191
61. Il concetto generale di corrispondenza fra due varietà. Corrispondenze irriducibili e riducibili . . . . » 193
62. Corrispondenze rappresentabili con una sola equazione . . » 197
63. Inversa di una corrispondenza a valenza positiva o nulla » 199
64. Corrispondenze dotate di punti multipli variabili . . . » 204
65. Applicazione alle serie razionali di gruppi di punti sopra una curva . . . . » 205
66. Trasformazione di gruppi equivalenti mediante una corrispondenza algebrica . . . . » 206
67. La formula di Zeuthen e il suo significato geometrico-funzionale . . . . » 207
68. Riflessioni critiche sulla formula di Zeuthen. Estensione del suo campo di validità . . . . » 211
69. Corrispondenze algebriche sopra una curva. Prodotto e somma di due corrispondenze . . . . » 217
70. Definizione generale delle corrispondenze a valenza, anche negativa . . . . » 218
71. Operazioni sulle corrispondenze a valenza . . . . » 220
72. Determinazione del gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza zero . . . . » 220
73. Invarianza della molteplicità di un punto unito d'una corrispondenza a valenza zero, di fronte alle trasformazioni birazionali della curva . . . . » 224
74. Regola di Zeuthen per valutare la molteplicità di un punto unito d'una corrispondenza a valenza zero . . . . . » 226
75. Estensione ad una corrispondenza qualunque. Corrispondenza complementare d'una data . . . . » 228
76. Esistenza di corrispondenze con valenza arbitraria (positiva o negativa) sopra una curva . . . . » 231
77. Determinazione del gruppo delle coincidenze d'una corrispondenza a valenza qualunque γ. Numero delle coincidenze . . . . » 233
78. Estensione del concetto di valenza. Dipendenza fra più corrispondenze . . . . » 235
79. Relazione geometrico-funzionale fra i gruppi dei punti uniti di più corrispondenze dipendenti. Il principio generale di corrispondenza . . . . » 237

§ 3. *Applicazioni della teoria delle corrispondenze* . . . . . . » 243
80. La formula di Jonquières e il suo significato funzionale » 243
81. Numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una serie γ_m^1 (razionale o irrazionale) d'indice $\nu \geq 1$ » 250
82. Criterio numerativo per riconoscere se una serie γ_m^1, d'indice $\nu \geq 1$, è costituita da gruppi equivalenti . . » 254
83. Determinazione del primo indice della corrispondenza complementare di una data . . . . » 257

84. Grado di una corrispondenza . . . . PAG. 259
85. Genere di una corrispondenza . . . . » 267
86. Applicazione della nozione di grado alle corrispondenze birazionali fra due curve . . . . » 268
87. Applicazione della nozione di grado alle involuzioni. Inesistenza sopra una curva di una infinità continua di involuzioni irrazionali . . . . » 270
88. Le involuzioni ellittiche sopra una curva ellittica . . . » 273
89. Linearità delle involuzioni più volte infinite, esistenti sopra una curva . . . . » 277
90. Caratterizzazione numerativa delle corrispondenze a valenza . . . . » 278
91. Le corrispondenze birazionali fra i gruppi di p punti di una curva di genere p. La varietà di Jacobi . . . . » 281
92. Nuova dimostrazione dell'inesistenza di un'infinità continua di involuzioni irrazionali sopra una curva . . . » 284

CAPITOLO SETTIMO

La geometria delle serie lineari secondo il metodo iperspaziale . PAG. 289
93. Nuova dimostrazione dell'unicità della serie lineare completa determinata da un gruppo di punti . . . . . . » 289
94. Nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch . . » 292
95. Ancora sul teorema del resto sotto forma proiettiva . . » 296

CAPITOLO OTTAVO

La geometria delle serie lineari secondo il metodo algebrico . . PAG. 297
§ 1. *Trasformazioni cremoniane piane* . . . . » 297
96. Trasformazioni razionali di un piano in un altro e loro elementi fondamentali . . . . » 297
97. Trasformazioni cremoniane piane . . . . » 301
98. Trasformazioni quadratiche piane . . . . » 303
99. Dilatazione dell'intorno di un punto multiplo d'una curva » 306

§ 2. *Scomposizione delle singolarità di una curva* . . . . . . » 309
100. Scomposizione della singolarità mediante una successione di trasformazioni quadratiche. Singolarità infinitamente vicine . . . . » 309
101. Formula di Noether . . . . » 310
102. Scioglimento di un punto multiplo qualunque in punti semplici . . . . » 312
103. Trasformazione cremoniana di una curva piana, priva di parti multiple, in una dotata di soli punti multipli ordinari . . . . » 316
104. Trasformazione quadratica di un ramo . . . . » 318
105. Punti prossimi ad un punto multiplo sopra un ramo o sopra una curva . . . . » 320

106. Indipendenza della composizione di una singolarità dalle trasformazioni che la definiscono . . . . Pag. 322
107. Esempio: Le varie specie di punti doppi . . . . . . » 323
108. Costruzione di una curva piana d'ordine abbastanza alto, che possegga molteplicità assegnate, distinte o infinitamente vicine . . . . » 324
109. Molteplicità virtuali . . . . » 328

§ 3. *Il teorema fondamentale* $Af + B\varphi$ . . . . » 335
110. Il teorema $Af + B\varphi$ nel caso semplice . . . . » 335
111. Il teorema $Af + B\varphi$ nel caso generale . . . . » 339

§ 4. *Le curve aggiunte ad una curva piana dotata di singolarità qualunque e il teorema del resto* . . . . » 341
112. Curve aggiunte ad una curva piana dotata di singolarità qualunque. Gruppi corresiduali . . . . » 341
113. Costruzione delle serie lineari complete mediante le aggiunte. Unicità della serie lineare completa . . . . . » 343
114. Il genere di una curva dotata di singolarità qualunque » 344
115. La geometria delle serie lineari secondo Brill e Noether » 345
116. Le formule di Plücker per una curva piana con singolarità qualunque . . . . » 346
117. Completezza della serie caratteristica di un sistema lineare completo di curve piane . . . . » 347
Elenco degli Autori Citati . . . . » 351

OSSERVAZIONI E CORREZIONI

Pag. 51. Nel caratterizzare una g_n^1 mediante la proprietà *a*), *b*) s'intende che i punti d'un gruppo generico son contati semplicemente, se no essi non sarebbero segnati dalla curva $\varphi - \lambda\psi = 0$, ma da una curva del tipo $(\varphi - \lambda\psi)^k = 0$ (k intero).

Pag. 99 (fine del n. 27). Quando $r = r'$ l'ordine di $\theta \pm \theta'$ sarà generalmente r; diverso, soltanto se fra i coefficienti delle due funzioni passan particolari relazioni.

Pag. 127 (rigo 8 dal basso). Invece di « Sia γ un ramo f... » leggere « Sia γ un ramo di f... ».

Pag. 225 (rigo 5 dall'alto). Invece di « se ci riferisce... » leggere « se ci si riferisce... ».

Pag. 243 (rigo 3 dall'alto). Invece di « a formula... » leggere « la formula... ».

Pag. 243 (rigo 5 dall'alto). Invece di « molteplicità... » leggere « molteplici ».

Finito di stampare

il giorno 27 Dicembre 1926

nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi

in Bologna