Piergiorgio Odifreddi

Divertimento geometrico

Le origini geometriche della logica
da Euclide a Hilbert

Bollati Boringhieri

della geometria euclidea ridusse la consistenza della geometria a quella dell'analisi. Il problema della consistenza dell'analisi divenne noto come il *secondo problema di Hilbert*, ed è stato uno stimolo per le maggiori ricerche logiche di questo secolo: tentativi rivolti alla sua soluzione, almeno parziale (ad esempio, la consistenza dell'aritmetica) risultarono nel programma di Hilbert, nei teoremi di Gödel, nella teoria della dimostrazione di Gentzen, nell'indipendenza dell'Ipotesi del Continuo di Cohen, e nel λ-calcolo polimorfo di Girard.

Il libro di Hilbert si può dunque a ben diritto considerare, oltre che un punto di arrivo di uno sviluppo assiomatico della geometria, anche come un punto di partenza della moderna metamatematica.

Capitolo 1

Assiomatizzazione

In questo capitolo iniziamo il nostro studio della geometria con una rilettura del libro I degli *Elementi* di Euclide, che si apre con una lista di definizioni, assiomi e postulati, procede con una lista di proposizioni, e si conclude con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo inverso.

Come abbiamo però preannunciato nell'Introduzione, noi lo rileggeremo al contrario: partendo, cioè, dalla dimostazione del teorema di Pitagora, risalendo all'indietro in un processo di progressiva riduzione a proposizioni via via più elementari, e arrivando infine a scoprire gli assiomi e i postulati.

1.1. L'impianto del primo libro di Euclide

Per fissare le idee, oltre che come riferimento a futura memoria, elenchiamo anzitutto l'impianto del primo libro come Euclide lo presenta *a priori*, prima di passare a giustificarlo *a posteriori* nel resto del capitolo.

mancano definizioni

Definizioni

Angoli supplementari Sono quelli formati da una retta e una trasversale (dalla stessa parte della retta).

Angoli retti Sono angoli supplementari uguali (li indicheremo con R).

Rette parallele Sono rette che non si intersecano.

Parallelogramma È un quadrilatero con lati opposti paralleli.

Quadrato È un parallelogramma con tutti i lati uguali fra loro, e tutti gli angoli uguali fra loro.

Due triangoli con la stessa base e vertici dalla stessa parte della base hanno la *stessa altezza* se i vertici opposti alla base stanno su una retta a essa parallela.

Assiomi logici (detti anche *nozioni comuni*)

1) Due cose uguali a una terza sono uguali fra loro:

$$x = z \wedge y = z \Rightarrow x = z.$$

2) Se si aggiungono cose uguali a cose uguali, si ottengono cose uguali:

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2.$$

3) Se si sottraggono cose uguali a cose uguali, si ottengono cose uguali:

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

4) Cose coincidenti sono uguali:

$$x = y \Rightarrow x = y.$$

5) Il tutto è maggiore della parte:

$$x \subset y \Rightarrow x < y.$$

I termini «aggiungere», «sottrarre», «coincidere», «maggiore» sono da intendersi come indefiniti.

Postulati geometrici

1) Per due punti passa un *segmento*.
2) Ogni *retta* è illimitata, nel senso che ogni segmento è estendibile.
3) Con centro in un punto passa un *cerchio* di raggio dato.
4) *Angoli retti* sono uguali.
5) Se due rette formano da una parte di una trasversale angoli coniugati interni la cui somma è minore di due retti, esse si incontrano da quella parte della trasversale.

I postulati 1 e 3 sono esistenziali per segmenti e cerchi: non ci sono postulati esistenziali per i *punti*.

Il postulato 2 dice soltanto che una retta è illimitata, e non che è infinita.

Dalla proposizione **I.2** si deduce che Euclide pensa, nel postulato 3, a un compasso collassabile (che, in particolare, non si può usare per trasportare segmenti di lunghezza data). Ma il contenuto di **I.2** è appunto che il compasso può essere supposto rigido, perché una serie di operazioni effettuate con il compasso collassabile permette il trasporto di segmenti.

In entrambi i postulati esistenziali (1 e 3) manca l'*unicità*.

I postulati 4 e 5 esprimono proprietà di enti (angoli retti e rette parallele) di cui non si conosce l'esistenza: essa verrà provata in **I.11** (angoli retti) e **I.31** (parallela a una retta data per un punto).

Principali proposizioni del libro I (sono evidenziate quelle usate in seguito).

1 Triangolo equilatero
2 Trasporto di segmenti
4 Criterio *SAS*
5 Angoli alla base di triangoli isosceli
8 Criterio *SSS*
9 Bisezione dell'angolo
10 Punto medio di un segmento
11 Perpendicolare a una retta da un punto su di essa
12 Perpendicolare a una retta da un punto fuori di essa
13 Angoli supplementari hanno somma $2R$
14 Angoli con somma $2R$ sono supplementari
15 Angoli al vertice
16 Angolo esterno
22 Costruzione di un triangolo dati i lati
23 Costruzione di un angolo
26 Criterio *ASA*

27 Rette formanti angoli alterni uguali sono parallele
29 Rette parallele formano angoli alterni interni (o esterni) e angoli corrispondenti uguali, e angoli coniugati interni (o esterni) supplementari
31 Parallela a una retta data
34 Area di metà parallelogramma, e lati e angoli opposti uguali
35 Area di parallelogrammi con stessa base e altezza
37 Area di triangoli con stessa base e altezza
39 Altezza di triangoli con stessa base e area
41 Area di triangoli e parallelogrammi con stessa base e altezza
46 Quadrato su un segmento
47 Teorema di Pitagora
48 Inverso del teorema di Pitagora

La divisione evidenziata fra **26** e **27** mostra il punto in cui interviene per la prima volta la teoria delle parallele (l'assioma delle parallele viene usato a partire da **29**).

1.2. La dimostrazione di Euclide del teorema di Pitagora

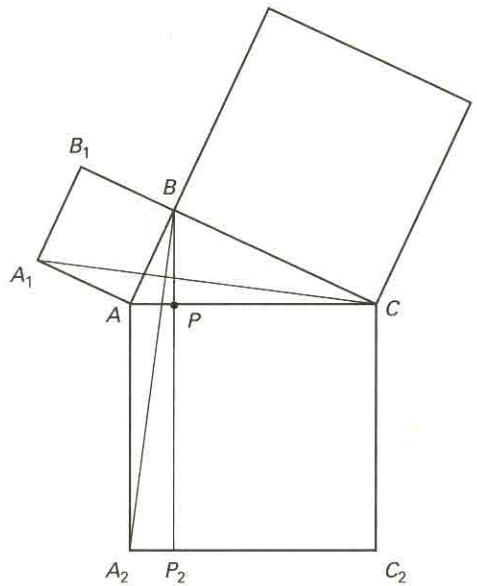
L'obiettivo del libro I di Euclide, così come di questo nostro primo capitolo, è dimostrare il teorema di Pitagora, cioè la:

Proposizione I.47 *In un triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.*

Nota che si parla qui di quadrati in senso geometrico (come figure), e non algebrico (come quadrati di lunghezze): Euclide non aveva infatti *misure* di lunghezze o aree.

Dimostrazione Dato il triangolo ABC retto in B, costruiamo i quadrati sui lati.
1) Consideriamo la parallela ad AA_2 per B, e i triangoli AA_1C e ABA_2:

- l'angolo in A è uguale (a un angolo retto più $\widehat{BAC}$)
- $AA_1 = AB$ (quadrato su AB)
- $AA_2 = AC$ (quadrato su AC).



Quindi i due triangoli sono congruenti, e dunque hanno area uguale. Ma

- area di $AA_1C = \frac{1}{2}AA_1 \cdot AB$ perché AA_1 è la base e AB l'altezza
- area di $ABA_2 = \frac{1}{2}AA_2 \cdot AP$ perché AA_2 è la base e AP l'altezza.

Dunque $AA_1 \cdot AB$ (l'area del quadrato su AB) è uguale ad $AA_2 \cdot AP$ (l'area del rettangolo AA_2P_2P).

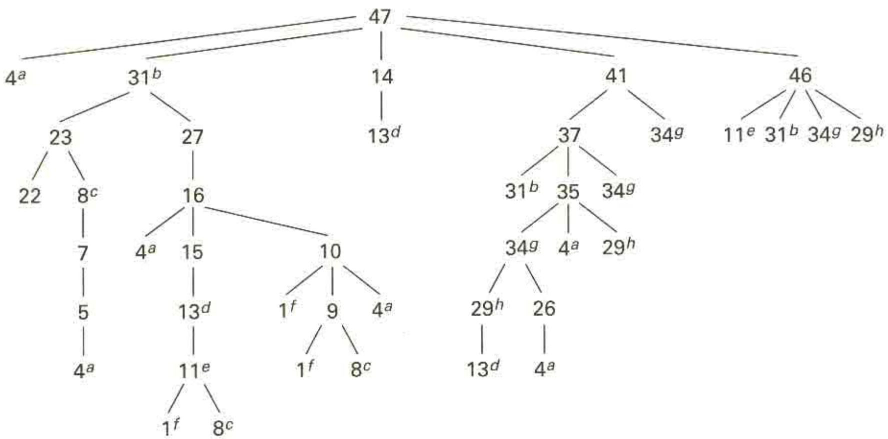
2) Analogamente, l'area del quadrato su BC è uguale all'area del rettangolo CC_2P_2P.
3) Dunque la somma delle aree dei quadrati su AB e BC è uguale all'area del quadrato su AC. □

Analizziamo ora quali assunzioni sono implicite nella dimostrazione precedente:

- si deve poter costruire un quadrato su un segmento (**I.46**)
- si deve poter costruire la parallela a una retta da un punto (**I.31**)
- due angoli retti devono essere uguali (*postulato 4*), perché nei triangoli AA_1C e ABA_2 si considerano due angoli retti distinti
- due triangoli con due lati e l'angolo compreso uguali devono essere identici (criterio *SAS*, **I.4**), in particolare avere la stessa area
- l'area di un triangolo deve essere $\frac{1}{2}$ base $\times$ altezza (**I.41**)
- per poter asserire che AB è l'altezza di AA_1C, bisogna che AA_1 e BC siano parallele e che AB sia perpendicolare a entrambe: questo segue dal fatto che l'angolo $\widehat{ABC}$ è retto (per ipotesi sul triangolo ABC), l'angolo $\widehat{ABB_1}$ è retto (perché angolo di un quadrato), ed essi sono supplementari perché la loro somma è due retti (**I.14**).
- per poter asserire che l'area del quadrato su AC è la somma delle aree dei due rettangoli AA_2P_2P e CC_2P_2P, l'area deve essere additiva (*assioma 2*). Analogamente per gli angoli: $R + \widehat{BAC} = R' + \widehat{BAC}$.

1.3. Il resto del primo libro di Euclide, a ritroso

Passiamo ora a dimostrare le varie assunzioni necessarie a completare la dimostrazione del teorema di Pitagora. Seguiremo lo schema seguente, che mostra la complessa struttura del primo libro di Euclide:



In preparazione per il capitolo 9, non ci accontenteremo comunque di seguire le dimostrazioni di Euclide, ma metteremo anche in evidenza gli svariati problemi che esse presentano, e che saranno affrontati e risolti dalle assiomatizzazioni moderne.

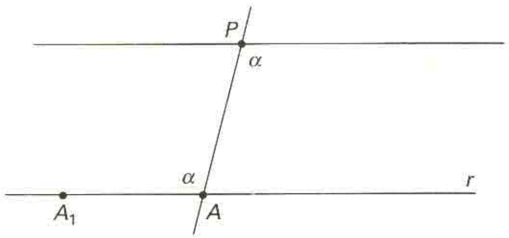
Proposizione I.4 **(Criterio SAS)** *Due triangoli sono uguali se hanno due lati e l'angolo compreso uguali.*

Dimostrazione Due triangoli che hanno due lati e l'angolo compreso uguali si possono far coincidere spostandone uno sull'altro. Per l'*assioma 4*, cose coincidenti sono uguali. □

Problema Chi ci dice che, muovendola da una parte del piano all'altra, una figura si mantenga inalterata?

Inoltre, se anche così fosse, come si possono far coincidere due triangoli speculari, muovendoli soltanto sul piano?

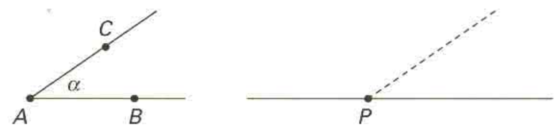
Proposizione I.31 *Costruire una parallela a una retta data da un punto P fuori di essa.*



Dimostrazione Data una retta, scegliamo due punti A e A_1 su di essa, e tracciamo la retta per AP (*postulato 1*). Riportiamo ora l'angolo $\alpha = A_1\hat{A}P$ sulla retta AP con vertice in P (**I.23**): otteniamo due rette tagliate da una trasversale e formanti angoli alterni interni uguali. Le rette sono allora parallele (**I.27**). □

Problema Chi ci dice che su una retta ci siano due punti distinti?

Proposizione I.23 *Data una retta e un punto P su di essa, costruire un angolo uguale a uno dato.*



Dimostrazione Dato l'angolo α con vertice in A, scegliamo B e C sui suoi lati, e costruiamo un triangolo uguale ad ABC sulla retta data, con vertice in P (**I.22**).

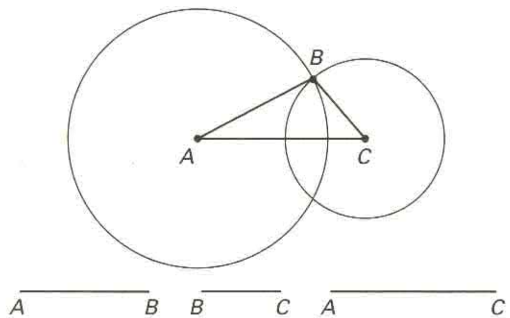
I due triangoli sono uguali perché hanno i tre lati uguali (criterio *SSS*, **I.8**), dunque i loro angoli sono uguali, e in particolare l'angolo in P è uguale ad α. □

Problema Come sopra, chi ci dice che i punti B e C esistano?

Proposizione I.22 *Costruire un triangolo dati i lati.*

Dimostrazione Scegliamo un lato minore della somma degli altri due (ad esempio AC), e costruiamo:

- un cerchio di centro A e raggio AB (*postulato 3*)
- un cerchio di centro C e raggio BC (*postulato 3*).



Il punto B è l'intersezione dei due cerchi. □

Ovviamente, la costruzione è possibile solo se ciascuno dei tre lati è minore della somma degli altri due (**I.20**), ma questo non ci serve.

Problema Chi ci dice che i due cerchi si intersechino?

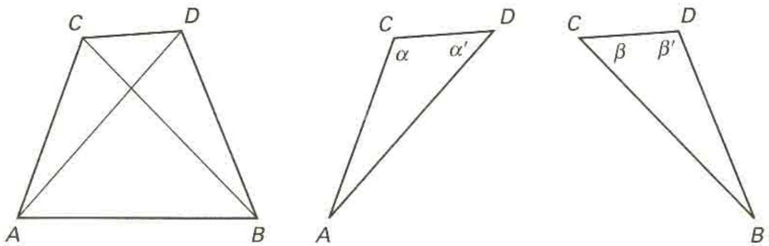
Proposizione I.8 (Criterio SSS) *Due triangoli sono uguali se hanno tre lati uguali.*

Dimostrazione Due triangoli con i tre lati uguali si possono far coincidere (per **I.7**), ponendo due lati uguali uno sull'altro, e il vertice opposto dalla stessa parte del lato coincidente. Per l'*assioma 4*, cose coincidenti sono uguali. □

Problemi Come per **I.4**, c'è il problema del moto.
Inoltre, che cosa significa «stessa parte»? Chi ci dice che una retta divide il piano in due parti?

Proposizione I.7 *Se due triangoli hanno base comune, vertice opposto dalla stessa parte della base, e lati uguali, hanno il vertice opposto coincidente.*

Dimostrazione Se C e D non coincidono, possiamo tracciare la retta per essi (*postulato 1*). Il triangolo CAD è isoscele, perché CA e DA sono uguali per ipotesi sui due triangoli, e dunque gli angoli alla base sono uguali (**I.5**): $\alpha = \alpha'$. Inoltre, per l'*assioma 5*, $\widehat{DCA}$ è maggiore di $\widehat{DCB}$, e dunque $\alpha > \beta$.



Analogamente, il triangolo CBD è isoscele, dunque $\beta = \beta'$, e per l'*assioma 5*, $\beta' > \alpha'$. Allora

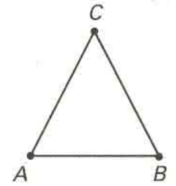
$$\alpha > \beta = \beta' > \alpha' = \alpha$$

cioè $\alpha > \alpha$, contraddizione. □

Problemi Mancano qui assiomi per l'ordine analoghi a quelli per l'uguaglianza:

- transitività: $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$
- invarianza: $\alpha > \beta \wedge \beta = \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$
- irriflessività: $\neg(\alpha > \alpha)$.

Proposizione I.5 (Pons Asinorum) *Triangoli isosceli hanno angoli alla base uguali.*

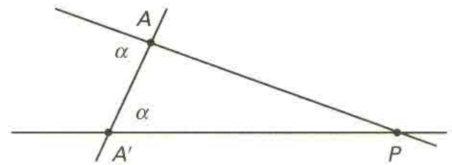


Dimostrazione Diamo la bella dimostrazione di Pappo. Poiché $AC = BC$, i due triangoli ABC e BAC sono uguali per il criterio SAS (**I.4**), perché l'angolo in C è lo stesso. Dunque hanno gli stessi angoli, e $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$. □

Abbiamo così completato la dimostrazione di **I.23**.

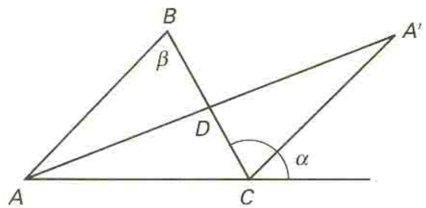
Proposizione I.27 *Rette tagliate da una trasversale e formanti angoli alterni interni uguali sono parallele.*

Dimostrazione Supponiamo che esse si incontrino in P. Allora l'angolo esterno in A è uguale all'angolo interno opposto, contro **I.16**.



□

Proposizione I.16 *L'angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun angolo interno non adiacente*



$\alpha > \beta$

Dimostrazione Consideriamo il punto D a metà fra B e C (**I.10**), ed estendiamo AD in AA', con $AD = DA'$.

I triangoli BDA e CDA' sono uguali per **I.4**, perché hanno lati uguali e l'angolo compreso uguale: infatti, angoli opposti al vertice sono uguali (**I.15**).

Dunque $\widehat{DCA'} = \beta$, e $\alpha > \beta$ per l'*assioma 5*. □

Problemi Il teorema dell'angolo esterno è uno dei più problematici in Euclide.

Anzitutto, come sappiamo di poter estendere AD di una quantità data e in una data direzione (dall'altra parte di A)? Il postulato 2 dice soltanto che le rette sono illimitate, non infinite.

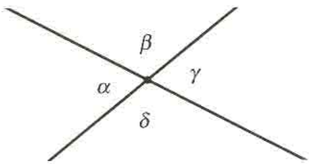
Inoltre, anche potendo estendere AD come voluto, chi ci dice che il punto A' cadrà all'interno dell'angolo α (così da poter applicare l'assioma 5)? Ad esempio, nella geometria sferica potrebbe ricadere dentro il triangolo.

Qui manca in modo essenziale la divisione delle rette mediante un punto, e del piano mediante una retta, in due parti (*assioma di Pasch*).

Proposizione I.15 *Angoli opposti al vertice sono uguali*

Dimostrazione $\alpha + \beta = 2R$, perché angoli supplementari hanno somma uguale a due retti (**I.13**).

$\beta + \gamma = 2R'$, analogamente.



Per il *postulato 4*, angoli retti sono uguali fra loro, e dunque $R = R'$. Allora

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma$$

per l'*assioma 1*, e

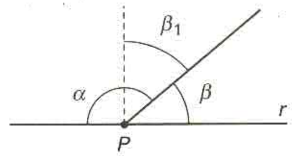
$$\alpha = \gamma$$

per l'*assioma 3*. □

Proposizione I.13 *Angoli supplementari hanno somma uguale a due retti.*

Dimostrazione Se $\alpha = \beta$ allora entrambi sono retti, per *definizione* di angolo retto.

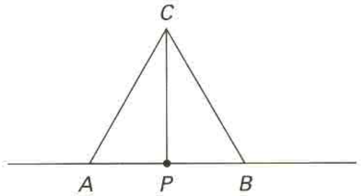
Se $\alpha \neq \beta$ si traccia la perpendicolare a r in P (**I.11**), ed essa deve essere interna a uno dei due angoli α e β, ad esempio α.



$$\begin{aligned} R &= \beta_1 + \beta \\ 2R &= (R + \beta_1) + \beta && \text{per il } \textit{postulato 4} \text{ e l'} \textit{assioma 2} \\ &= \alpha + \beta && \text{per l'} \textit{assioma 1}. \end{aligned}$$ □

Proposizione I.11 *Costruire una perpendicolare a una retta per un punto P su di essa.*

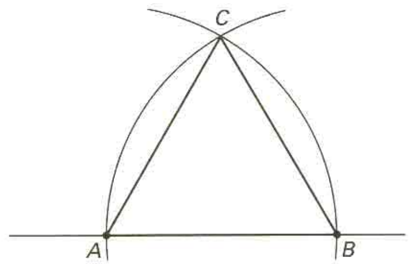
Dimostrazione Scegliamo un punto A sulla retta data, tale che $A \neq P$. Mediante il *postulato 3*, tracciamo un cerchio di centro P e raggio PA, e individuiamo il punto B sulla retta data.



Dato AB, costruiamo un triangolo equilatero su di esso (**I.1**). Allora PC è perpendicolare ad AB: i due triangoli APC e BPC sono uguali perché hanno tre lati uguali (criterio *SSS*, **I.8**), e dunque $\widehat{APC} = \widehat{BPC}$, ed entrambi sono retti (per *definizione* di angolo retto). □

Problemi Come già in precedenza, non sappiamo se una retta ha più di un punto, nè se una retta e un cerchio si intersecano.

Proposizione I.1 *Costruire un triangolo equilatero su un segmento dato.*



Dimostrazione Dato AB, si costruiscono:

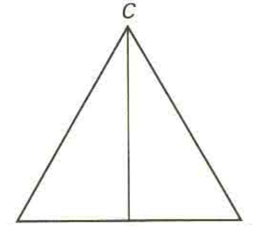
- il cerchio di centro A e raggio AB
- il cerchio di centro B e raggio BA

(per il *postulato 3*). Se C è il punto di intersezione, ABC è equilatero (i lati sono tutti uguali ad AB per costruzione, e dunque uguali fra loro per l'*assioma 1*). □

Problema Al solito, come sappiamo che i due cerchi si intersecano?

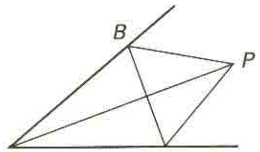
Abbiamo così completato la dimostrazione di **I.15**.

Proposizione I.10 *Costruire il punto medio di un segmento.*



Dimostrazione Dato AB, costruiamo un triangolo equilatero su di esso (**I.1**), e bisechiamo l'angolo in C (**I.9**). Allora ACP e BCP sono uguali per il criterio SAS (**I.4**), e in particolare $AP = BP$. □

Proposizione I.9 *Bisecare un angolo.*



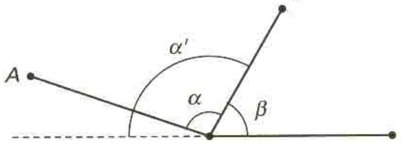
Dimostrazione Dato l'angolo in A, scegliamo B e C tali che $AB = AC$ (mediante il *postulato 3*, basta tracciare un cerchio di centro A).

Costruiamo poi il triangolo equilatero BCP su BC, per **I.1**, e la retta AP (per il *postulato 1*).

I triangoli ABP e ACP sono uguali per il criterio SSS (**I.8**), e dunque $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$. □

Abbiamo così completato la dimostrazione di **I.27**, e dunque di **I.31**.

Proposizione I.14 *Angoli con somma uguale a due retti sono supplementari.*



Dimostrazione Scegliamo A, B e C sui lati degli angoli α e β in P. Se $\alpha + \beta = 2R$, vogliamo dimostrare che A, P e C sono collineari.

Supponiamo che non lo siano: per il *postulato 2*, estendiamo ad esempio CP. Abbiamo:

$$\alpha' + \beta = 2R' \quad \text{per } \mathbf{I.13}$$
$$\alpha + \beta = 2R \quad \text{per ipotesi.}$$

Dunque

$$\alpha' + \beta = \alpha + \beta$$

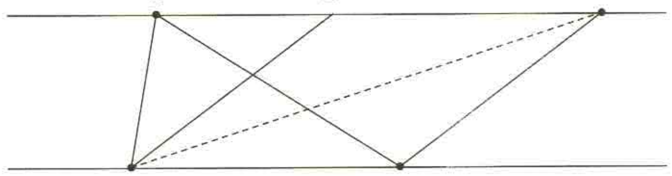
per il *postulato 4* ($R = R'$) e l'*assioma 1*, e

$$\alpha = \alpha'$$

per l'assioma 3. □

Finora non si è usato il *postulato 5 delle parallele*. Esso interviene ora, nel trattamento dell'*area*.

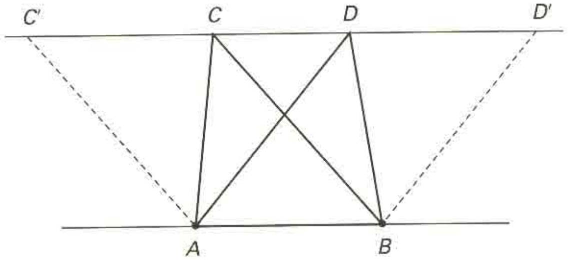
Proposizione I.41 *L'area di un triangolo è metà dell'area di un parallelogramma con stessa base e altezza.*



Dimostrazione Dati ABC e $ABB'A'$, tracciamo AB' (per il *postulato 1*). I triangoli ABC e ABB' hanno la stessa area perché hanno base e altezza comuni (**I.37**), e ABB' ha area pari alla metà dell'area di $ABB'A'$ (**I.34**). □

Problema Si richiede una misura di area (per poter parlare di metà).

Proposizione I.37 *Due triangoli con stessa base e altezza hanno la stessa area.*

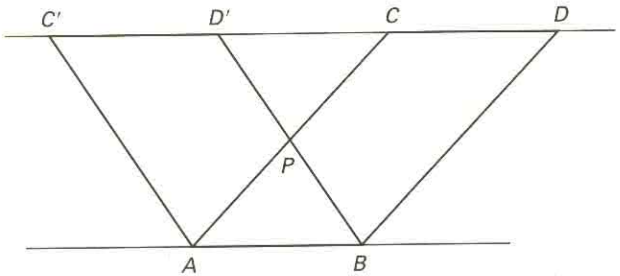


Dimostrazione Per **I.31**, possiamo tracciare AC' parallela a BC e BD' parallela ad AD. I parallelogrammi $ABCC'$ e $ABD'D$ hanno la stessa area perché hanno stessa base e altezza (**I.35**).

Ma AC è la diagonale di $ABCC'$, e dunque il triangolo ABC ha area pari a metà dell'area di $ABCC'$, per **I.34**. Analogamente, il triangolo ABD ha area pari a metà dell'area di $ABD'D$.

Per l'*assioma 1*, ABC e ABD hanno allora la stessa area. □

Proposizione I.35 *Due parallelogrammi con stessa base e altezza hanno la stessa area.*



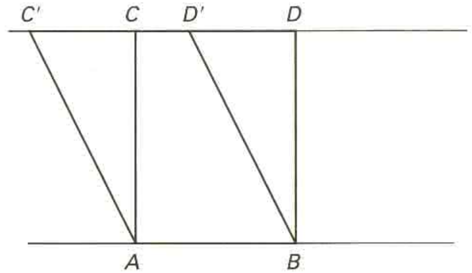
Dimostrazione Poiché $ABD'C'$ è un parallelogramma, $AB = C'D'$ per **I.34**. Poiché $ABDC$ è un parallelogramma, $AB = CD$ per **I.34**. Allora $CD = C'D'$ per l'*assioma 1*.

I triangoli CAC' e DBD' sono uguali per il criterio *SAS* (**I.4**), in quanto:

- $CC' = DD'$ per $CD = C'D'$ e l'*assioma 2*.
- $C'A = D'B$ perché $ABD'C'$ è un parallelogramma (**I.34**)
- $\widehat{CC'A} = \widehat{DD'A}$ perché AC' e BD' sono parallele (per *definizione* di parallelogramma) tagliate da una trasversale, e dunque formano angoli corrispondenti uguali (**I.29**).

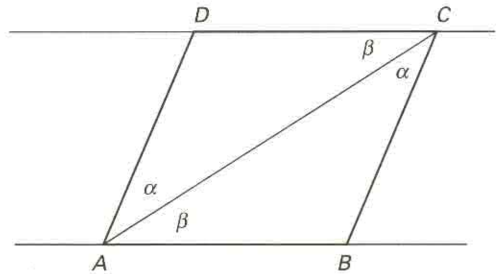
I triangoli $CC'A$ e $DD'B$ hanno allora la stessa area. Togliendo l'area di $CD'P$ e aggiungendo quella di ABP, per gli *assiomi 2* e *3* si ottengono aree uguali, e dunque $ABD'C'$ e $ABDC$ hanno la stessa area. □

Problema Euclide ragiona sulle figure, e non fa tutti i casi possibili. In particolare, non ha trattato il caso:



in cui C sta fra C' e D'. Esso si può comunque trattare in modo analogo.

Proposizione I.34 *In un parallelogramma, lati e angoli opposti sono uguali, e una diagonale divide il parallelogramma in due triangoli di metà area.*

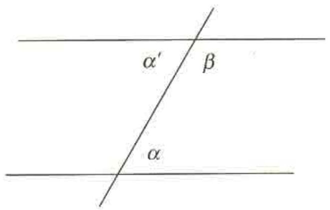


Dimostrazione Basta provare che ADC e CBA sono uguali, perché hanno un lato e i due angoli adiacenti uguali (criterio *ASA*, **I.26**).

Ma gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ACD}$, così come gli angoli $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BCA}$, sono uguali perché angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale (per **I.29**). □

Problema Di nuovo si richiede misura di area.

Proposizione I.29 *Due parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali, angoli corrispondenti uguali, e angoli coniugati interni supplementari.*



Dimostrazione Se $\alpha \neq \alpha'$, uno è maggiore dell'altro, ad esempio $\alpha < \alpha'$. Ma

$\alpha' + \beta = 2R$ perché α' e β sono supplementari (**I.13**)

$\alpha < \alpha'$ per ipotesi.

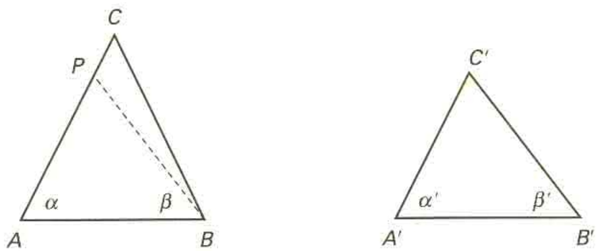
Dunque $\alpha + \beta < 2R$ e per il *postulato 5* le due rette non sono parallele.

Il caso degli angoli corrispondenti è analogo. □

Problemi Mancano vari assiomi dell'ordine:

- tricotomia: se $\alpha \neq \beta$ allora $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$
- monotonia: $\alpha < \beta \rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- invarianza: $\alpha < \beta \wedge \beta = \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

Proposizione I.26 (Criterio ASA) *Due triangoli sono uguali se hanno un lato e gli angoli adiacenti uguali.*



Dimostrazione Supponiamo $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Basta dimostrare che $AC = A'C'$, perché allora si può applicare il criterio *SAS* (**I.4**), e i due triangoli sono uguali.

Se $AC \neq A'C'$, uno è maggiore dell'altro, ad esempio $AC > A'C'$. Scegliamo P su AC in modo tale che $AP = A'C'$ (nel solito modo, mediante un cerchio di centro A e raggio $A'C'$, per il *postulato 3*). Allora i triangoli BAP e $B'A'C'$ sono uguali per il criterio *SAS* (**I.4**), e dunque $\widehat{ABP} = \widehat{A'B'C'} = \beta'$. Ma

$$\beta = \beta' \Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ABC}$$

per l'*assioma 1*, contro l'*assioma 5* ($\widehat{ABP}$ è solo una parte di ABC, perché $AP = A'C' < AC$). □

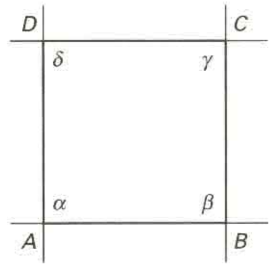
Nota Anche questo criterio, come già *SAS* e *SSS* (**I.4** e **I.8**), si potrebbe facilmente provare per sovrapposizione. Il fatto che Euclide lo provi diversamente dimostra che egli era conscio del problema che tali dimostrazioni presentavano.

Problema A parte il solito problema di continuità (intersezione di retta e cerchio), manca la tricotomia per i segmenti:

$$AB \neq CD \quad \Rightarrow \quad AB > CD \text{ o } AB < CD.$$

Abbiamo così concluso la dimostrazione di **I.41**.

Proposizione I.46 *Costruire un quadrato su un segmento dato.*



Dimostrazione Dato AB, costruiamo AD perpendicolare ad AB (per **I.11**), in modo che $AD = AB$ (nel solito modo, col *postulato 3*). Tracciamo poi DC parallela ad AB (per **I.31**), e BC parallela ad AD (per **I.31**). Sia C la loro intersezione.

Lati:

$AB = DC$ e $AD = BC$ perché $ABCD$ è un parallelogramma (**I.34**).

Inoltre $AB = AD$ per costruzione.
Dunque i lati sono uguali fra loro per l'*assioma 1*.

Angoli:
$\alpha + \delta = 2R$ perché AB e DC sono parallele (**I.29**).
Ma $\alpha = R$ per costruzione, dunque $\delta = R$ per l'*assioma 3*.
Inoltre $\beta = \delta$ e $\alpha = \gamma$ perché angoli opposti di un parallelogramma (**I.34**).
Dunque gli angoli sono uguali fra loro per l'*assioma 1*. □

La dimostrazione di **I.47** è così finalmente conclusa.

Capitolo 2
Costruibilità

Benché la geometria greca non si limitasse alle costruzioni con riga e compasso, esse costituiscono il tema principale della sinfonia euclidea.

In questo capitolo analizziamo dinque le potenzialità di questi strumenti, lasciando la complementare analisi delle loro limitazioni al capitolo 8. In particolare, effettueremo principalmente due variazioni sul tema: da un lato, costruendo varie figure geometriche (soprattutto poligoni regolari e lunule), e dall'altro cercando di «quadrarle», cioè di ridurle a un quadrato con la stessa area.

Fu proprio in questi due campi che i Greci si imbatterono in alcuni problemi che divennero famosi per la loro insolubilità: primi fra tutti, come vedremo appunto nel capitolo 8, la costruzione dell'ettagono regolare e la quadratura del cerchio.

2.1. Operazioni sugli angoli

Abbiamo visto nel primo capitolo che le proposizioni **I.9** e **I.23** di Euclide permettono di effettuare *bisezione* e riporto di angoli, e dunque, in particolare, la loro addizione e sottrazione.

Per la *trisezione*, che nel § 8.3 dimostreremo non essere effettuabile con riga e compasso, la soluzione si può almeno approssimare a piacere con gli stessi strumenti nel modo seguente (così come l'area del cerchio si può approssimare a piacere con poligoni costruibili con riga e compasso, vedi p. 110).

Dato un angolo $P_0\widehat{A}P_1$ lo si biseca ottenendo P_2. E si continua induttivamente, bisecando l'angolo definito da P_n e P_{n+1} con A (cioè $P_n\widehat{A}P_{n+1}$ o $P_{n+1}\widehat{A}P_n$, a seconda di come sono disposti P_n e P_{n+1}), ottenendo P_{n+2}.