UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Emma Castelnuovo e la geometria

Claudio Fontanari
http://www.science.unitn.it/~fontanar/

Trento, 28 marzo 2014

Bibliografia e sitografia

Emma Castelnuovo

La Matematica. La Nuova Italia Editrice, Firenze 2005.

http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/emma.htm

Pubblicazioni di Emma Castelnuovo a cura di Claudio Fontanari.
Le scansioni elettroniche sono state effettuate presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Trento su libri fuori commercio presenti nel Catalogo Bibliografico Trentino e presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano su edizioni a stampa inviate in dono dall'autrice a Paola Gario.

Emma Castelnuovo

Didattica della matematica. La Nuova Italia Editrice, Firenze 1963.

John Aubrey

Brief Lives. John Buchanan-Brown, ed., Penguin Classics, New York (2000), pp. 427-428.

He was forty yeares old before he looked on geometry, which happened accidentally, being in a gentleman's library in ..., Euclid's Elements lay open, and 'twas the 47th Element liber I. He read the proposition. 'By G–,' sayd he, 'this is impossible!' So he reads the demonstration of it, which referred him back to such a proposition: which proposition he read: that referred him back to another, which he also read, and sic deinceps [slowly but surely], that at last he was demonstratively convinced of that trueth. This made him in love with geometry.

Geometria intuitiva e geometria razionale (pp. 81–82)

È giusto che anche i ragazzi abbiano, alla fine del corso triennale, un'idea della differenza fra lo studio della geometria intuitiva, ora terminato, e lo studio della geometria razionale che si svolge nel corso superiore.
Per far capire, anche a dei giovanetti, che questa differenza non consiste solo in un allargamento, in una ripresa del tema su più larghe basi, si può portare un esempio completamente al di fuori dell'insegnamento della matematica, e che – mi sembra – può far cogliere lo spirito delle strade opposte che si seguono nei due corsi.
L'esempio che porto è quello degli scavi archeologici e degli studi ad essi relativi.

L'esempio degli scavi archeologici (p. 82)

L'opera dell'archeologo si divide in due tempi: in un primo momento si procede all'escavazione, alla rimozione della terra in una certa regione dove si presume siano vissute determinate civiltà, e, il più delle volte, si tratta non di una ma di più civiltà che sono fiorite in una zona in epoche diverse; l'archeologo procede dunque dall'alto al basso, dagli strati superiori ai più profondi, da epoche più recenti a quelle più lontane. Ma l'opera dell'archeologo non termina col portare alla luce costruzioni e documenti di antiche civiltà; comincia, dopo il lavoro dello scavo e l'entusiasmo della scoperta, un lavoro più astratto e più profondo: è l'opera di sistemazione storica, di collegamento fra civiltà e civiltà, è una ricostruzione dalle basi, su su, fino alle più recenti tracce umane. Lo studioso non passa ora da civiltà più vicine a quelle più antiche, ma segue il cammino opposto: ricostruisce.

Dalla scoperta alla sistemazione (p. 82)

Come l'opera dell'archeologo si svolge in due tempi, che seguono vie opposte, così in geometria, dopo il lavoro di scoperta che corrisponde allo studio intuitivo (dove si passa dalle necessità di costruzione delle figure e dal problema di risolvere situzioni geometriche complesse, come potrebbe essere quella di calcolare l'area di un campo), comincia il ripensamento delle scoperte fatte e un lavoro di ricostruzione della teoria a partire dagli elementi più semplici che costuiscono le figure.
Il punto, la retta, il piano saranno ora per noi quello che per l'archeologo erano i resti e gli oggetti che aveva trovato nello strato più profondo; sarà un lavoro di collegamento fra teorema e teorema che si dovrà fare, una sistemazione delle varie proprietà in modo che ciascuna avrà senso di esistere solo in quanto si trova dopo una data e prima di un'altra.

Manca il primo volume (pp. 82–83)

A mio parere, il valore della geometria intesa in questo senso, cioè il valore assiomatico di questa scienza, verrà messo tanto più in rilievo quanto più si farà sentire lo stacco dallo studio intuitivo, presentando i due corsi come altrettanto essenziali perché il secondo non avrebbe ragione di esistere se gli enti di cui si parla non avessero la loro origine e le loro radici approfondite in quelle esperienze concrete e in quelle costruzioni di carattere tangibile che formavano lo studio precedente. Non si deve far sì che lo studio della geometria razionale porti a sottovalutare l'importanza del corso di geometria intuitiva, perché, come scriveva alcuni anni or sono il matematico francese Jean Luis Destouches, a proposito della costruzione della scienza, "cominciare un'opera scientifica dalla parte assiomatica è come scrivere un'opera di cui manca il primo volume" [1].

[1] Citazione riportata nel libro di M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955, p. 28

Emma Castelnuovo

È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica?
Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22 (1967), n. 4, pp. 539–549, digitalizzazione disponibile in rete al sito:
`http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_1967_3_22_4_539_0`

Le generazioni di allievi si moltiplicano, a triennio succede triennio. Cambiano le mode, si evolvono i costumi; i bambini di 11 anni che riceviamo oggi alla scuola media sono ben diversi da come eravamo noi a quell'età (...) Eppure, ad una serie di questioni di geometria e di aritmetica che si presentano nei primi giorni di scuola vengono date le stesse risposte oggi come ieri, dai bimbi di città come da quelli di campagna, dai figli di professionisti come da quelli di famiglie che non hanno una tradizione culturale.

- I bambini non vedono che se un quadrato articolabile si trasforma in un rombo l'area cambia, e sostengono che siccome il perimetro rimane invariato anche l'area deve rimanere invariata.
- Non vedono che se uno spago legato viene tenuto a mo' di rettangolo fra l'indice e il pollice delle due mani, avvicinando e allontanando le dita di una stessa mano l'area cambia, e sostengono anche qui che l'area non può cambiare perchè il perimetro è sempre lo stesso, e avvalorano questa tesi dicendo che se diminuisce l'altezza del rettangolo aumenta la base e quindi le dimensioni si compensano.

Perché non vedono?

Perché affermano cose assurde mentre si comportano da adulti in questioni della vita d'ogni giorno ben più complesse? Perché non vedono? In alcuni di questi problemi si tratta, in fondo, solo di guardare un oggetto. Eppure non c'è mai stata un'epoca come l'attuale in cui il senso della vista sia tanto esercitato; sappiamo benissimo quale attrazione esercitino i fumetti e la televisione. Ma, facciamo un esempio di tutti i tempi: un bambino, fin dalla più tenera età, non si stanca di osservare un mulino che ruota sotto la spinta dell'acqua, o una gru che sale e scende. È vero, ma un mulino fermo non gli interessa più e nulla gli dice una gru che non è in azione.

Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo’ di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché ”non sanno vedere”. Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può ”schiacciarsi” e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi ”limite” parlano da sè: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d’un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l’atteggiamento matematico sorga dal ”saper vedere” un concreto dinamico, costruttivo.

Necessità di un ricorso al concreto (pp. 85–86)

1) il disegno non suggerisce dei problemi perché offre un numero finito di casi, e vincola così la libertà di pensiero del bambino;

2) non conduce all'osservazione, e quindi non può portare all'intuizione della verità, per il fatto che è statico;

3) non può inoltre, e ciò è evidente, fornire un'immagine reale di una situazione spaziale.

Queste tre ragioni varrebbero da sole a far comprendere l'insufficienza del disegno per un corso di geometria intuitiva a carattere costruttivo.

Emma Castelnuovo

L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. Il materiale per l'insegnamento della matematica, La Nuova Italia Editrice, Firenze 1965, pp. 41– 65.

Somma degli angoli di un triangolo (p. 49)

Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico del termine occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili.

I casi limite (pp. 50–51)

(...) Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. (...) Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che – si è sempre portati, anche con una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante – quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, qual è questo valore costante? I casi limite conducono a intuire questo valore.

Sia benedetto questo errore! (p. 51)

(...) È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.

Bibliografia e sitografia

Guido Castelnuovo

Opere matematiche: memorie e note, pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 2002–2007, 4 vv.

`http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Biografia/index.htm`

Guido Castelnuovo: una biografia ipertestuale, a cura di Paola Gario. Opera realizzata con il contributo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

`http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Lezioni_E_Quaderni/menu.htm`

Lettere e quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo, a cura di Paola Gario.

L'idolo della perfezione (p. 5)

Guido Castelnuovo [espone] delle riflessioni fortemente indicative per un moderno insegnamento [2] e a cui, rilette a distanza di più di cinquanta anni, potrebbero ispirarsi oggi i compilatori dei programmi di matematica: *È questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegnamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria. Noi vi rappresentiamo l'universo come un edificio, le cui linee hanno una perfezione geometrica e ci sembrano sfigurate e annebbiate in causa del carattere grossolano dei nostri sensi, mentre dovremmo far comprendere che le forme incerte rivelateci dai sensi costituiscono la sola realtà accessibile, alla quale sostituiamo, per rispondere a certe esigenze del nostro spirito, una precisione ideale...*

[2] G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

Io sono uno spirito mite e tollerante (p. 157)

Si dirà che è impossibile dare al bambino una nozione certa di funzione, che è pericoloso parlare del concetto di limite in termini vaghi, si dirà che quanto si insegna deve essere perfetto per non originare idee false che poi sarebbe difficile sradicare per sostituirle con appropriate definizioni. Mi torna alla mente quanto scriveva, nel lontano 1912, Guido Castelnuovo a questo proposito: *Ciò che si sa dal professore o dall'allievo – mi fu detto –, sia pur limitato, ma deve sapersi perfettamente. Orbene, io sono uno spirito mite e tollerante; ma tutte le volte che questa frase mi fu obiettata, un maligno pensiero mi ha attraversato come un lampo la mente.*

Noi nulla sappiamo perfettamente (p. 157)

Oh, se potessi prendere in parola il mio interlocutore, e con un magico potere riuscissi a spegnere per un istante nel suo cervello tutte le cognizioni vaghe per lasciar sussistere soltanto ciò che egli sa perfettamente! Voi non immaginate mai quale miserando spettacolo potrei presentarvi! Ammesso pure che dopo una così crudele mutilazione qualche barlume rimanesse ancor nel suo intelletto, e di ciò fortemente dubito, somiglierebbe questo ad un gioco di fuochi folletti sperduti in tenebre profonde e sconfinate. La verità è che noi nulla sappiamo perfettamente... [3]

[3] G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

Necrologio di Federigo Enriques, 1947

Stavo per suggerirgli la lettura di libri e memorie ma mi accorsi subito che (...) Federigo Enriques era un mediocre lettore. Nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava. Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica. Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'Enriques si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano.

La geometria algebrica e la scuola italiana, 1928

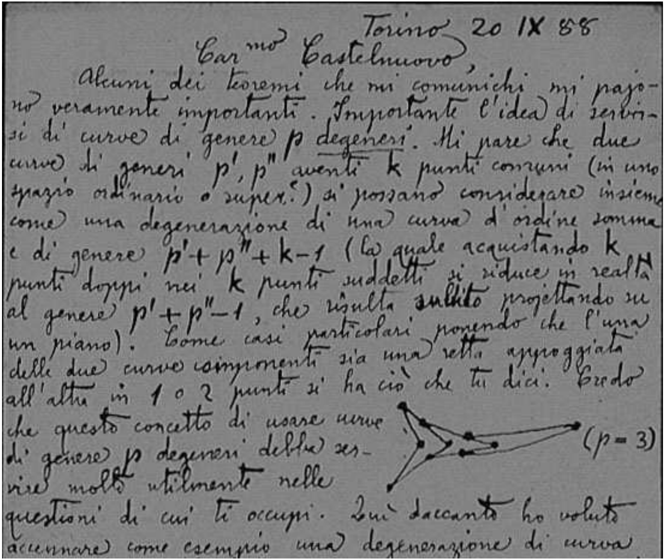
Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le famiglie di superficie.

Guido Castelnuovo

Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III, 1889.

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della conservazione del numero a curve degeneri.
L'idea consiste nel considerare una curva non come un ente geometrico isolato, ma come membro di una famiglia ottenuta variando con continuità i suoi parametri (o moduli). Da questo punto di vista, se una proprietà invariante per deformazioni è verificata da una curva speciale (eventualmente degenere) di una famiglia, allora tale proprietà vale anche per la curva generica della stessa famiglia.

C. Segre a G. Castelnuovo, 20 settembre 1888



Torino 20 IX 88

Car.mo Castelnuovo,

Alcuni dei teoremi che mi comunichi mi pajono veramente importanti. Importante l'idea di servirsi di curve di genere p degeneri. Mi pare che due curve di generi p', p'' aventi k punti comuni (in uno spazio ordinario o super.) si possano considerare insieme come una degenerazione di una curva d'ordine somma e di genere $p'+p''+k-1$ (la quale acquistando k punti doppi nei k punti suddetti si riduce in realtà al genere $p'+p''-1$, che risulta subito projettando su un piano). Come casi particolari ponendo che l'una delle due curve componenti sia una retta appoggiata all'altra in 1 o 2 punti si ha ciò che tu dici. Credo che questo concetto di usare curve di genere p degeneri debba servire molto utilmente nelle questioni di cui ti occupi. Qui daccanto ho voluto accennare come esempio una degenerazione di curva

$(p = 3)$

Guido Castelnuovo, Memorie Scelte, Bologna 1937, Aggiunta p. 69

L'idea che mi ha permesso di raggiungere rapidamente questo e altri risultati consiste nel sostituire ad una curva irriducibile d'ordine n e genere p di un iperspazio, una curva composta di una curva d'ordine $n-1$ e di una retta unisecante o bisecante, secondo che quest'ultima curva ha genere p o $p-1$. Questo *principio di degenerazione* è semplicemente ammesso; la prima dimostrazione che lo spezzamento non altera i numeri richiesti fu data per via topologica (ricorrendo alle superficie di Riemann) da F. Klein in un suo corso del secondo semestre 1892 (...). Per via algebrica occorre far vedere che la curva spezzata può esser riguardata come limite di una curva irriducibile variante entro un sistema continuo, ciò che, sotto ipotesi assai larghe, ha dimostrato F. Severi nelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921).

Moduli Spaces and their Birational Geometry

Han-Bom Moon

Department of Mathematics
University of Georgia

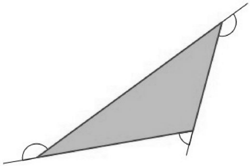
February 25, 2013

Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always 360°.

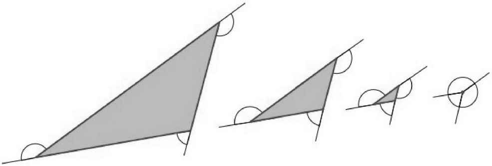


Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always $360°$.



- When we deform our triangle to smaller similar triangles, the sum of angle defects is a constant.
- For the degenerated triangle (a point), the sum is $360°$.