tivi, avrà come insieme di valori tutto R , sarà continua su R e crescente nel caso $a > 1$, decrescente nel caso $a < 1$.

CAPITOLO III

DERIVAZIONE

1. DERIVATA DI UNA FUNZIONE.

Definizione 1. *Una funzione* $f(x)$ *reale definita su un intervallo chiuso* (a, b) *dicesi derivabile in un punto* $x_0 \in (a, b)$ *se esiste il limite*

$$1) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } (a, b) - \{x_0\}) .$$

Tale limite dicesi allora derivata della funzione $f(x)$ *calcolata nel punto* x_0 , *e si indica con uno dei simboli seguenti*

$$f'(x_0) , \quad Df(x_0) , \quad \frac{df}{dx}(x_0) , \quad \left[f'(x)\right]_{x=x_0} , \quad \left[Df(x)\right]_{x=x_0} ,$$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} .$$

Modi equivalenti per indicare il limite (1) sono i seguenti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

dove deve intendersi $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, Δx viene chiamato incremento della variabile x, Δf incremento della funzione f, e il rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ viene chiamato rapporto incrementale.

Osservazione. Dalle analoghe proprietà dei limiti si vede subito che se δ è un numero positivo per stabilire la derivabilità di $f(x)$ nel punto x_0 basta limitarsi a considerare la restrizione di $f(x)$ all'insieme

$$\{x;\ a \leqslant x \leqslant b,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

in particolare se $f(x)$ è definita su tutta la retta, perchè f sia derivabile in un punto x_0 occorre e basta che lo sia la restrizione di f ad un qualsiasi intervallo a cui x_0 è interno.

L'esistenza della derivata di una funzione in un punto è legata alla continuità della funzione nel punto. Vale a questo proposito il seguente

Teorema 1. *Sia* $f(x)$ *una funzione reale definita nell'intervallo chiuso* (a, b) *e derivabile in un punto* $x_0 \in (a,b)$. *Allora* $f(x)$ *è continua nel punto* x_0.

Dimostrazione. Si tratta di verificare che

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (su $(a, b) - \{x_0\}) = f(x_0)$,

cioé che

3) $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)]$ (su $(a, b) - \{x_0\}) = 0$.

Poichè vale ovviamente

4) $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$,

si ha

5) $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)]$ (su $(a, b) - \{x_0\})$ =

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (su $(a, b)-\{x_0\}) \cdot \lim_{x\to x_0} (x-x_0) =$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

c.v.d.

Osservazione. Non è vero che se una funzione è continua in un punto allora essa è anche derivabile in quel punto. Ad esempio la funzione

$$f(x) = |x|$$

è continua nel punto 0 ma non è ivi derivabile.

Fra le operazioni di calcolo della derivata (derivazione) e le operazioni algebriche esistono semplici relazioni che si ricavano dalle analoghe relazioni fra l'operazione di limite e le operazioni algebriche.

Teorema 2. *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni reali definite su un intervallo chiuso* (a, b) *le quali siano de* *rivabili in un punto* $x_0 \in (a, b)$, *allora anche la funzione* $f(x) + g(x)$ *è derivabile nel punto* x_0 *e si ha*

$$6) \qquad D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) .$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in (a, b) - \{x_0\}$ si ha ovviamente

$$\frac{f(x)+g(x)-[f(x_0)+g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0} ,$$

da cui, passando al limite, si ricava la (6) .

c.v.d.

Teorema 3. *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni reali definite su un intervallo chiuso* (a, b) *le quali siano derivabili in un punto* $x_0 \in (a, b)$, *allora anche la funzione* $f(x)\cdot g(x)$ *è derivabile nel punto* x_0 *e si ha*

$$7) \qquad D(fg)(x_0) = g(x_0)\cdot Df(x_0) + f(x_0)\cdot Dg(x_0) .$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in (a, b) - \{x_0\}$ si ha ovviamente

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = g(x)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0}$$

da cui, passando al limite e ricordando che la funzione $g(x)$ essendo derivabile nel punto x_0 è ivi continua (v. Teorema 1), si ricava la (7).

c.v.d.

Osservazione. Dal Teorema 3 e dal fatto ovvio che la derivata di una funzione costante vale sempre zero si ha che: se $f(x)$ è una funzione reale definita in un intervallo chiuso (a, b) ed è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$ e se k è una costante, allora la funzione $kf(x)$ è derivabile nel punto x_0 e si ha

$$8) \qquad D(kf)(x_0) = k\cdot Df(x_0)$$

Dalla (8) e dalla (6) si ha allora anche

$$9) \qquad D(f - g)(x_0) = Df(x_0) - Dg(x_0) .$$

Esempi.

a) le funzioni $f(x) = x^n$ (n intero positivo) hanno derivata in ogni punto di R e si ha

$$10) \qquad Dx^n(x_0) = nx_0^{n-1} , \text{ per ogni } x_0 \in R .$$

Infatti, per $n = 1$, si ha

$$11) \qquad (Dx)(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} \;(\text{su } R - \{x_0\}) = 1$$

Se poi la (10) non fosse vera per ogni intero n vi sarebbe un primo intero ν per il quale la (10) non è vera. Valendo la (11) dovrà risultare $\nu > 1$ e, poichè ν è il primo intero per cui non vale la (10), deve essere

$$12) \qquad (Dx^{\nu-1})(x_0) = (\nu - 1)x_0^{\nu-2} , \text{ per ogni } x_0 \in R .$$

D'altra parte avendosi $x^\nu = x^{\nu-1} \cdot x$ dal Teorema 3 si ricava

13) $$(Dx^{\nu})(x_\circ) = x_\circ(Dx^{\nu-1})(x_\circ) + x_\circ^{\nu-1}(Dx)(x_\circ) =$$
$$= x_\circ(\nu-1)x_\circ^{\nu-2} + x_\circ^{\nu-1} = \nu x_\circ^{\nu-1} .$$

Quindi avremmo che la (10) vale per ν contro l'ipotesi fatta che per esso non valga. Questo è assurdo, cioé è assurdo supporre che vi sia un intero n per cui la (10) non valga, e quindi la (10) deve valere per ogni intero positivo.

b) Derivata di un polinomio.

Se $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ è un polinomio, cioé $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sono numeri reali fissati, si ha, dai Teoremi 2 e 3 e dalla (10)

$$Df(x_\circ) = a_1 + 2a_2x_\circ + 3a_3x_\circ^2 + \ldots + ka_kx_\circ^{k-1} ,$$

per ogni $x_\circ \in R$.

Teorema 4. *Se* $f(x)$ *è una funzione reale definita su un intervallo chiuso* (a, b) , *se* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$ *e* $f(x)$ *è derivabile in un punto* $x_\circ \in (a, b)$, *allora la funzione* $\frac{1}{f(x)}$ *è derivabile nel punto* $x_\circ$ *e si ha*

14) $$D(\frac{1}{f})(x_\circ) = -\frac{Df(x_\circ)}{f^2(x_\circ)} .$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in (a, b) - \{x_\circ\}$ si ha

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_\circ)}}{x - x_\circ} = -\frac{1}{f(x)f(x_\circ)} \cdot \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} ,$$

e quindi ricordando che $f(x)$ deve essere continua nel punto $x_\circ$ (v. Teorema 1) e passando al limite si ha la (14).

c.v.d.

Esempio. Sia $f(x) = x^{-n}$ (n intero positivo). Dal Teorema 4 si ha che per ogni $x_\circ \in R - \{0\}$ vale

$$D(x^{-n})(x_\circ) = -\frac{(Dx^n)(x_\circ)}{x^{2n}} = -\frac{nx_\circ^{n-1}}{x^{2n}} = -nx_\circ^{-n-1} .$$

Teorema 5. *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni reali definite nell'intervallo chiuso* (a, b) *con* $g(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$. *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono derivabili in un punto* $x_\circ \in (a, b)$ *allora anche* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *è derivabile in* $x_\circ$ *e si ha*

15) $$D(\frac{f}{g})(x_\circ) = \frac{g(x_\circ)Df(x_\circ) - f(x_\circ)Dg(x_\circ)}{[g(x_\circ)]^2}$$

Dimostrazione. Osservando che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

dai Teoremi 3 e 4 si ha che $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in $x_\circ$ e vale

$$D(\frac{f}{g})(x_\circ) = \frac{1}{g(x_\circ)} Df(x_\circ) + f(x_\circ)(D\frac{1}{g})(x_\circ) .$$

Tenuto allora conto della (14) si ha la (15).

c.v.d.

Esempio. Derivata di $f(x) = \dfrac{x - 1 + x^2}{x^3 - x}$.

La funzione $f(x)$ è definita ed è derivabile in ogni punto x_0 che sia diverso dai punti $0, 1, -1$ nei quali la funzione $x^3 - x$ si annulla.

Dal Teorema 5 e da quanto osservato sulla derivata di un polinomio si ha allora

$$D\left(\frac{x - 1 + x^2}{x^3 - x}\right)(x_0) = \frac{(x_0^3-x_0)(1+2x_0) - (x_0-1+x_0^2)(3x_0^2-1)}{(x_0^3 - x_0)^2} =$$

$$= \frac{-x_0^4 - 2x_0^3 + 2x_0^2 - 1}{(x_0^3 - x_0)^2} .$$

2. DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA.

Un criterio utile per il calcolo delle derivate è dato dal seguente

Teorema 6. *Sia* $f(x)$ *una funzione reale definita su un intervallo chiuso* (a, b) . *L'insieme dei valori di* $f(x)$ *sia un intervallo* (c, d) *e la* $f(x)$ *sia invertibile. Indichiamo con* $g(y)$ *la funzione reale definita su* (c, d) *inversa della* $f(x)$. *Supponiamo che* $f(x)$ *abbia derivata in un punto* $x_0 \in (a, b)$ *e sia*

$$Df(x_0) \neq 0 .$$

Supponiamo che $g(y)$ *sia continua nel punto* $y_0 = f(x_0)$.

Allora $g(y)$ *ha derivata nel punto* y_0 *e si ha*

$$Dg(y_0) = 1/Df(x_0) .$$

Dimostrazione. La funzione

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

si ottiene componendo la

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

con la funzione $x = g(y)$: basta per convincersene sostituire ad x $g(y)$ e ricordare che essendo g inversa di f e $f(x_0) = y_0$ è anche $f[g(y)] = y$ e $x_0 = g(y_0)$.

Poichè per ipotesi $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = x_0$ avremo , per il Teorema 8 del Cap.II, che il

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad (\text{su} \quad (c, d) - \{y_0\})$$

esiste ed è eguale al

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad (\text{su} \quad (a, b) - \{x_0\}) =$$

$$= \frac{1}{Df(x_0)} .$$

c.v.d.

Esempio. Per ogni intero n positivo la funzione $f(x)=x^n$ considerata sull'insieme $E = \{x ; x \geqslant 0\}$ è invertibile e la sua inversa $g(y) = y^{1/n}$ è definita sullo stesso insieme E ed è continua in ogni punto di E . Avendosi

$$(Dx^n)(x_0) = n\, x_0^{n-1} \ ,$$

per ogni $x_0 \in E - \{0\}$ la derivata di x^n risulta essere diversa da zero e quindi per il Teorema 6 la derivata di $y^{1/n}$ esiste in ogni punto $y_0 \in E - \{0\}$ e si ha

$$16) \qquad (Dy^{1/n})(y_0) = \frac{1}{n\, x_0^{n-1}} \ , \quad \text{dove} \quad x_0 = y_0^{1/n} \ .$$

La (16) si può allora scrivere, tenuto conto delle proprietà delle potenze ad esponente razionale,

$$(Dy^{1/n})(y_0) = \frac{1}{n}\,(y_0^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \frac{1}{n}\, y_0^{\frac{1}{n}-1} \ .$$

3. DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA.

Teorema 7. *Sia* $f(x)$ *una funzione reale definita in un intervallo chiuso* (a, b). *I valori di* $f(x)$ *appartengano ad un intervallo* (c, d). *Sia* $g(y)$ *una funzione reale definita nell'intervallo chiuso* (c, d). *La funzione* $f(x)$ *sia derivabile in un punto* $x_0 \in (a, b)$ *e la funzione* $g(y)$ *sia derivabile nel punto* $y_0 = f(x_0)$. *Allora la funzione composta* $F(x) = g[f(x)]$ *è derivabile nel punto* x_0 *e si ha*

$$17) \qquad (DF)(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0) \ .$$

Dimostrazione. Indichiamo con A e B gli insiemi

$$A = \{x;\ x \in (a, b) - \{x_0\}\ ,\ f(x) = f(x_0)\} \ ,$$

$$B = \{x;\ x \in (a, b)\ ,\ f(x) \neq f(x_0)\} \ .$$

Poichè $(a, b) - x_0 = A \cup B$ per il calcolo del

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A \cup B)$$

distinguiamo i tre casi seguenti

a) $x_0 \notin \bar{A}$ (in questo caso intendiamo compresa anche l'eventualità $A = \emptyset$),

b) $x_0 \notin \bar{B}$ (in questo caso intendiamo compresa anche l'eventualità $B = \emptyset$),

c) $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

Nel caso a) esiste $t > 0$ tale che

$$\{x;\ |x - x_0| < t\} \cap A = \emptyset \ ,$$

cioé si ha

$$[(a, b) - \{x_0\}] \cap \{x;\ |x-x_0| < t\} = B \cap \{x;\ |x-x_0| < t\}.$$

Per i Teoremi 5 e 6 del Cap.II si ha allora che il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A \cup B)$$

esiste se e solo se esiste il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } B)$$

e i due limiti sono eguali.

Ma se $x \in B$ possiamo scrivere

$$18)\quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e poichè, grazie al Teorema 8 del Cap.II, si ha

$$19)\quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \quad (\text{su } B) =$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad (\text{su } (c, d) - \{y_0\}) = Dg(y_0)$$

dalle (18) e (19) si ricava la (17) nel caso (a).

Nel caso (b) ragionando come nel caso precedente si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A \cup B) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A)$$

ma vale ovviamente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \quad (\text{su } A) = 0$$

D'altra parte in questo caso vale anche

$$Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A \cup B) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A) \qquad = 0 \ .$$

E quindi la (17) vale anche nel caso (b).

Finalmente, per il caso (c), tenuto conto del Teorema 7 del Cap.II e di quanto visto nel caso (b), per provare la (17) basta verificare che

$$20)\quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \quad (\text{su } B) = 0 \ .$$

La (20) si verifica allo stesso modo seguito nel caso (a) e ricordando che ora è

$$Df(x_0) = 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{su } A) \ .$$

c.v.d.

Esempio. La funzione $F(x) = x^{\frac{m}{n}}$ con m intero relativo e n intero positivo può considerarsi come la funzione ottenuta componendo le funzioni $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ e $g(y) = y^m$. Quindi se $x_0 > 0$, dal Teorema 7 si ha che esiste la derivata di $x^{\frac{m}{n}}$ nel punto x_0 e vale

$$21)\quad Dx^{\frac{m}{n}}(x_0) = Dy^m(y_0) \cdot Dx^{\frac{1}{n}}(x_0) \ , \quad \text{dove } y_0 = x_0^{\frac{1}{n}} \ .$$

Esplicitando la (21) si ha

$$Dx^{\frac{m}{n}}(x_0) = (m\, y_0^{m-1}) \cdot \left(\frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n} - 1}\right) ,$$

da cui, tenuto conto che $y_0 = x_0^{\frac{1}{n}}$ e delle proprietà delle potenze ad esponente razionale si ha

$$Dx^{\frac{m}{n}}(x_0) = m\, x_0^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m}{n}-1} \ .$$

4. DERIVATA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE.

Il calcolo della derivata della funzione esponenziale a^x in un punto x_o consiste nel calcolo del limite

$$22)\quad \lim_{x\to x_o} \frac{a^x - a^{x_o}}{x - x_o} \ (\text{su } R - \{x_o\}) =$$

$$= a^{x_o} \cdot \lim_{x\to x_o} \frac{a^{x-x_o} - 1}{x - x_o} \ (\text{su } R - \{x_o\}) ,$$

e quindi è ricondotto al limite

$$23)\quad \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} \ (\text{su } R - \{0\}) ,$$

il quale non dipende dal punto x_o considerato.

Per quanto riguarda il limite (23) osserviamo che per la definizione dell'esponenziale nel campo reale e per il Lemma 2 del Cap.II si ha che la funzione $\frac{a^t - 1}{t}$ è crescente se $a > 1$, e quindi si ha che, per $a > 1$, esiste il

$$24)\quad \lim_{t\to 0+} \frac{a^t - 1}{t} = \tau(a) .$$

Per quanto riguarda i $t < 0$ basta osservare che vale

$$\frac{a^t - 1}{t} = a^t \frac{1 - a^{-t}}{t} = a^t \frac{a^{-t} - 1}{-t}$$

e quindi si ha

$$25)\quad \lim_{t\to 0-} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0-} a^t \cdot \lim_{t\to 0-} \frac{a^{-t} - 1}{-t} ,$$

da cui, tenuto conto della continuità della funzione esponenziale, del fatto che $a^0 = 1$ e della (24), si ricava

$$26)\quad \lim_{t\to 0-} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{a^t - 1}{t} = \tau(a) .$$

Possiamo quindi dire che per ogni $a > 1$ esiste il

$$27)\quad \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} \ (\text{su } R - \{0\}) = \tau(a) .$$

Dalle (22) e (27) abbiamo allora che per ogni $x_o \in R$ esiste la derivata della funzione esponenziale a^x (per $a>1$) e vale

$$28)\quad Da^x(x_o) = a^{x_o} \cdot \tau(a) ,$$

dove $\tau(a)$ è una costante che dipende solo dalla base a dell'esponenziale. Dalla relazione (24), che definisce $\tau(a)$, e dal Lemma 2 del Cap.II, si ha che

$$29)\quad \tau(a) > \frac{a^{-1} - 1}{-1} = 1 - a^{-1} = \frac{a - 1}{a} > 0 , \text{ per } a>1.$$

Per quanto riguarda l'esponenziale di base a : $0 < a < 1$, osservato che vale

$$30)\quad \frac{a^t - 1}{t} = - \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-t} - 1}{-t}$$

si ha che esiste anche per $0 < a < 1$ il

31) $$\lim_{t\to 0}\frac{a^t - 1}{t} \quad (\text{su } R - \{0\}) =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-t} - 1}{-t} \quad (\text{su } R - \{0\}) = -\tau(\tfrac{1}{a}) .$$

Quindi anche per le basi $0 < a < 1$ l'esponenziale è derivabile in ogni punto $x_0 \in R$ e per il calcolo della sua derivata vale la formula (28), dove in questo caso la costante $\tau(a)$, grazie alle (29) e (31), verifica

32) $$\tau(a) = -\tau(\tfrac{1}{a}) < -\frac{\frac{1}{a} - 1}{\frac{1}{a}} = a - 1 < 0 \text{ , per } 0<a<1.$$

Per l'esponenziale di base 1, essendo costante si ha $D1^x(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in R$, e questo fatto può essere ancora espresso con la (28) intendendo che $\tau(1) = 0$.

Per quanto riguarda il calcolo del numero $\tau(a)$, da cui dipende il calcolo della derivata della funzione esponenziale, osserviamo che vale

Teorema 8. *Se* $a, b \in R$, *se* $a > 0$ *e* $b > 0, b \neq 1$, *allora si ha*

33) $$\tau(a) = \tau(b) \log_b a .$$

Dimostrazione. Per definizione è

$$\tau(a) = \lim_{t\to 0+}\frac{a^t - 1}{t} .$$

Ricordando che la funzione esponenziale di base

$b > 0$, $b \neq 1$ è invertibile ed ha come funzione inversa il logaritmo di base b, si ha

$$\frac{a^t - 1}{t} = \frac{b^{\log_b a^t} - 1}{t} = \frac{b^{t\cdot\log_b a} - 1}{t} .$$

Abbiamo quindi

34) $$\tau(a) = \lim_{t\to 0+}\frac{b^{t\cdot\log_b a} - 1}{t} = \log_b a \lim_{t\to 0+}\frac{b^{t\cdot\log_b a} - 1}{t \log_b a} .$$

Dalla (34), ricordando il Teorema 8 del Cap.II, si ha la (33).

c.v.d.

Osservazione. Dal Teorema 8 si ha allora che il calcolo della derivata della funzione esponenziale è riconducibile, se si vuole, al calcolo di

$$\tau(10) = \lim_{t\to 0}\frac{10^t - 1}{t} \quad (\text{su } R - \{0\})$$

e al calcolo dei logaritmi decimali.

5. IL NUMERO e .

Dal Teorema 8 segue immediatamente l'esistenza di un numero, che d'ora in poi indicheremo sempre con la lettera e, per il quale si ha

$$\tau(e) = 1 \; .$$

Il numero e può calcolarsi, grazie appunto al Teorema 8, con la formula

$$35) \qquad e = 10^{\frac{1}{\tau(10)}} \; .$$

Dalla (35) e dalla definizione di $\tau(10)$ si ha anche, tenuto conto della continuità della funzione esponenziale

$$36) \qquad e = \lim_{t\to 0} 10^{\frac{t}{10^t - 1}} \quad (\text{su } R - \{0\}) \; .$$

Componendo la funzione $10^{\frac{t}{10^t - 1}}$ con la funzione $t = \log_{10}(1 + \varepsilon)$ definita per $\varepsilon > -1$, si ottiene la funzione

$$F(\varepsilon) = 10^{\frac{1}{\varepsilon}\log_{10}(1+\varepsilon)} = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

La funzione $F(\varepsilon)$ risulta definita per $\varepsilon > -1$ ed è decrescente, in quanto composta mediante la funzione $\log_{10}(1 + \varepsilon)$ che è crescente e la funzione $10^{t/(10^t - 1)}$, che è decrescente (essendo $t/(10^t - 1)$ decrescente). Tenuto conto del Teorema 8 del Cap.II e della (36) si ha poi

$$37) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (\text{su } R - \{0\}) = e$$

Ricordando la definizione di limite per una funzione si ha allora che e risulta essere anche il limite delle successioni

$$(1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n \; , \qquad (1 - \frac{1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^n \; ,$$

le quali per la proprietà di decrescenza della funzione $(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ risultano rispettivamente crescente e decrescente. Abbiamo quindi

$$38) \qquad e = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{n+1} \; ,$$

$$39) \qquad (\frac{n+1}{n})^n < e < (\frac{n+1}{n})^{n+1} \; , \text{ per ogni intero positivo } n \; .$$

Dalla (39) si ha, ponendo $n = 1$

$$40) \qquad 2 < e < 4$$

e con $n = 10$

$$41) \qquad 2{,}5937424601 < e < 2{,}85311670611 \; .$$

Vedremo più avanti un'altra formula che permette di calcolare i valori approssimati del numero e.

Per quello che riguarda la derivata della funzione esponenziale di base e abbiamo allora, per la definizione stessa del numero e

$$42) \qquad \left[D\, e^x\right]_{x=x_0} = e^{x_0} \; , \text{ per ogni } x_0 \in R \; .$$

Dal Teorema 8 si ha poi

43) $$\left[D\, a^x\right]_{x=x_0} = a^{x_0} \log_e a \, .$$

La (43) riconduce il calcolo della derivata della funzione esponenziale al calcolo dei logaritmi in base e ; tali logaritmi sono anche detti comunemente naturali o neperiani (da Nepero) e il numero e è detto anche numero di Nepero. Per i logaritmi in base e di solito l'indicazione della base è omessa, anche noi nel seguito scriveremo $\log a$ per indicare $\log_e a$.

6. DERIVATA DELLA FUNZIONE LOGARITMO.

Dalla (42) e dalla regola di derivazione della funzione inversa si ha

44) $$\left[D \log x\right]_{x=x_0} = \frac{1}{\left[De^y\right]_{y=y_0}} = \frac{1}{e^{y_0}} \, ,$$

dove $y_0 = \log x_0$. Quindi si ha

45) $$\left[D \log x\right]_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \, , \quad \text{per ogni} \quad x_0 > 0 \, .$$

Dalla relazione

46) $$\log_a x = \log_a e \log x$$

si ha

47) $$\left[D \log_a x\right]_{x=x_0} = \log_a e \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x_0} \, ,$$

per ogni $x_0 > 0$.

Se $a \in R$ la funzione

$$f(x) = a^x$$

definita per ogni $x > 0$ può scriversi

$$f(x) = e^{\log x^a} = e^{a \log x} \, ,$$

e quindi, dalla regola di derivazione delle funzioni composte e da quanto detto sulla derivata dell'esponenziale e del logaritmo, si ha

48) $$\left[D\, x^a\right]_{x=x_0} = e^{a \log x_0}\, a \frac{1}{x_0} = x_0^a\, a\, x_0^{-1} = a x_0^{a-1} \, .$$

La formula (48) contiene le formule già trovate per altra via nel caso di a intero positivo, intero relativo e razionale.

TABELLA I.- Derivate delle funzioni più comunemente usate.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
$y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \log a$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -x^{-2}$	$y = \log x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}$	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = x^a$	$y' = a\, x^{a-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

CAPITOLO IV

APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI DERIVATA

1. DERIVATA NEI PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO.

Se $f(x)$ è una funzione reale definita nell'intervallo chiuso (a, b) e se $f(a)$ è il suo valore minimo allora si ha

$$f(a) \leqq f(x) \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b) \ ,$$

e quindi

$$1) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqq 0 \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b) - \{a\} \ .$$

Dalla (1) segue allora che se $f(x)$ ha derivata nel punto a risulta necessariamente

$$2) \qquad D\, f(a) \geqq 0 \ .$$

Analogamente se $f(b)$ è il suo valore minimo si ha

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leqq 0 \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b) - \{b\} \ ,$$

e quindi se f ha derivata nel punto b risulta necessariamente

3) $$Df(b) \leq 0 .$$

Da queste considerazioni si ricava allora il

Teorema 1. *Se* $f(x)$ *è una funzione reale definita su un intervallo chiuso* (a, b) . *Se in un punto* c: $a < c < b$ *la* $f(x)$ *assume il suo valore minimo e se* f *è derivabile nel punto* f *allora si ha necessariamente*

4) $$Df(c) = 0 .$$

Dimostrazione. Il $f(c)$ è anche il minimo fra i valori di $f(x)$ nell'intervallo (a, c) e poichè in tale intervallo il punto c è l'estremo destro si ha

5) $$Df(c) \leq 0 .$$

Il valore $f(c)$ è anche il minimo dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (c, b) , e poichè in tale intervallo c è l'estremo sinistro si ha

6) $$Df(c) \geq 0 .$$

Dalle (5) e (6) segue allora la (4).

c.v.d.

Osservando che se una funzione $f(x)$ ha valore massimo in un punto allora la funzione $-f(x)$ ha valore minimo nello stesso punto, si ha che vale anche il

Teorema 2. *Se* $f(x)$ *è una funzione reale definita su un intervallo chiuso* (a, b) . *Se in un punto* c: $a < c < b$ *la* $f(x)$ *assume il suo valore massimo e se* $f(x)$ *è derivabile nel punto* c *allora si ha necessariamente*

7) $$Df(c) = 0 .$$

Una semplice ed utile conseguenza dei Teoremi 1 e 2 è il

Teorema 3 (di Rolle). *Sia* $f(x)$ *una funzione reale definita in un intervallo chiuso* (a, b) *e derivabile in ogni punto di* (a, b) . *Se vale*

$$f(a) = f(b)$$

allora esiste almeno un punto c: $a < c < b$ *tale che*

$$Df(c) = 0 .$$

Dimostrazione. La funzione $f(x)$ avendo derivata in ogni punto di (a, b) risulta continua su (a, b) e quindi assume un valore massimo M e un valore minimo m .

Possono darsi due casi:

a) $m = M$, allora la funzione $f(x)$ è costante su (a, b) e quindi la sua derivata è nulla in ogni punto di (a,b). In questo caso la tesi del teorema è evidentemente vera.

b) $m < M$. Esistono allora almeno due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ distinti tali che

$$f(x_1) = m , \quad f(x_2) = M .$$

Poichè $f(a) = f(b)$, necessariamente almeno uno dei due punti x_1, x_2 è distinto da a e b. In tale punto allora, grazie ai Teoremi 1 e 2, la derivata della $f(x)$ è nulla.

c.v.d.

Una conseguenza immediata del Teorema di Rolle è il

Teorema 4 (di Cauchy). *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni reali definite in un intervallo chiuso* (a, b), *allora esiste almeno un punto* c: $a < c < b$ *tale che*

$$Df(c)[g(b) - g(a)] = Dg(c)[f(b) - f(a)] .$$

Dimostrazione. La funzione

$$F(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

è definita in (a, b) ed è derivabile in ogni punto di (a, b). Per essa vale inoltre

$$8) \qquad F(a) = f(a)\, g(b) - g(a)\, f(b) = F(b) ,$$

e quindi, per il Teorema di Rolle, esisterà almeno un punto c: $a < c < b$ per cui vale

$$DF(c) = Df(c)[g(b) - g(a)] - Dg(c)[f(b) - f(a)] = 0 ,$$

cioé la tesi.

c.v.d.

Corollario (Teorema del valor medio). *Se* $f(x)$ *è una funzione reale definita su un intervallo chiuso* (a, b), *allora esiste almeno un punto* c: $a < c < b$ *tale che*

$$f(b) - f(a) = D\, f(c)\, (b - a) .$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema di Cauchy alle funzioni $f(x)$ e $g(x) = x$.

c.v.d.

2. APPLICAZIONI DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Esercizio. Si voglia calcolare in maniera approssimata il numero $\sqrt[4]{17}$.

La funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ha derivata in ogni punto $x>0$ e quindi ha derivata in ogni punto dell'intervallo $(16, 17)$. Il teorema del valor medio assicura l'esistenza di un punto c: $16 < c < 17$ tale che

$$9) \qquad \sqrt[4]{17} - \sqrt[4]{16} = (D\sqrt[4]{x})(c) = \frac{1}{4}\, c^{-\frac{3}{4}} .$$

Dalla (9) si ricava allora

$$10) \qquad 2 = \sqrt[4]{16} < \sqrt[4]{17} < \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{32} = 2{,}03125.$$

Teorema 5. *Se una funzione* $f(x)$ *definita in un intervallo chiuso* (a, b) *ha derivata positiva in ogni punto di* (a, b), *allora* $f(x)$ *è crescente in* (a, b).

Dimostrazione. Siano x_1, x_2 due punti qualunque di (a,b)

con $x_1 < x_2$. Il teorema del valor medio assicura l'esistenza di un punto ξ , $x_1 < \xi < x_2$ tale che

$$11) \qquad f(x_2) - f(x_1) = D\, f(\xi)\, (x_2 - x_1)\ .$$

Essendo $Df(\xi) > 0$ e $x_2 > x_1$ dalla (11) si ricava

$$12) \qquad f(x_2) > f(x_1)\ .$$

Poichè la (12) vale per ogni coppia di punti x_1, x_2 di (a, b) con $x_1 < x_2$, si è così provato che la $f(x)$ è crescente in (a, b).

c.v.d.

Allo stesso modo si prova che una funzione che abbia derivata negativa in ogni punto di un intervallo è decrescente nell'intervallo, una funzione che abbia derivata non negativa in ogni punto di un intervallo è non decrescente nell'intervallo e una funzione che abbia derivata non positiva in ogni punto di un intervallo è non crescente nell'intervallo.

E' perciò anche vero che una funzione che abbia derivata nulla in ogni punto di un intervallo è costante nello intervallo.

3. DERIVATE SUCCESSIVE.

Se una funzione $f(x)$, definita in un intervallo chiuso (a, b) , è derivabile in ogni punto di (a, b) allora sull'intervallo (a, b) può essere considerata la funzione che in ogni punto assume il valore della derivata della funzione $f(x)$ calcolata nel punto. Tale funzione verrà detta derivata prima della funzione $f(x)$ e verrà indicata ancora con uno dei simboli

$$D\, f(x)\ ,\quad f'(x)\ ,\quad \frac{df}{dx}\ .$$

Se a sua volta la funzione $D\, f(x)$ è derivabile in un punto $x_\circ$, il valore di tale derivata verrà indicato con uno dei simboli

$$D^2 f(x_\circ)\ ,\quad f''(x_\circ)\ ,\quad \frac{d^2f}{dx^2}(x_\circ)\ ,$$

$$\left[D^2 f(x)\right]_{x=x_\circ}\ ,\quad \left[f''(x)\right]_{x=x_\circ}\ ,\quad \left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=x_\circ}\ ,$$

verrà detta derivata seconda della funzione $f(x)$.

Se la derivata seconda di $f(x)$ esiste in ogni punto x di (a, b) possiamo considerare la funzione che in ogni punto di (a, b) assume il valore della derivata seconda della funzione $f(x)$, e questa funzione verrà indicata con uno dei simboli

$$D^2 f(x)\ ,\quad f''(x)\ ,\quad \frac{d^2f}{dx^2}\ .$$

Si capisce così cosa intenderemo, per n intero positivo qualunque, per derivata n-esima di una funzione $f(x)$

in un punto $x_\circ$ e questa verrà indicata con uno dei simboli seguenti

$$D^n f(x_\circ) \quad , \quad f^{(n)}(x_\circ) \quad , \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_\circ) \quad ,$$

$$\left[D^n f(x)\right]_{x=x_\circ} \quad , \quad \left[f^{(n)}(x)\right]_{x=x_\circ} \quad , \quad \left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]_{x=x_\circ} \quad .$$

Se la derivata n-esima di $f(x)$ si può calcolare in ogni punto di (a, b) possiamo considerare la funzione che in ogni punto di (a, b) ha come valore il valore di tale derivata, e tale funzione verrà indicata con uno dei simboli

$$D^n f(x) \quad , \quad f^{(n)}(x) \quad , \quad \frac{d^n f}{dx^n} \quad .$$

Diremo che una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b) è derivabile n volte se esistono in (a,b) le funzioni

$$Df(x) \quad , \quad D^2 f(x) \quad , \quad \ldots \quad , \quad D^n f(x) \quad .$$

4. FORMULA DI TAYLOR.

Se n è un intero positivo con $n!$ intenderemo indicare l'intero che si ottiene facendo il prodotto degli interi $2, 3, 4, \ldots, n$; si conviene inoltre che

$$1! = 1 \quad , \quad 0! = 1 \quad .$$

Teorema 6. *Se $f(x)$ è una funzione reale definita su un intervallo chiuso (a, b) ed ivi derivabile n volte, allora esiste almeno un punto c: $a < c < b$ tale che*

$$13) \quad f(b) - \left[f(a) + (b-a)\, Df(a) + \frac{(b-a)^2}{2} D^2 f(a) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)\right] = \frac{(b-a)^n}{n!} D^n f(c) \ .$$

Dimostrazione. Per $n = 1$ la tesi è quella del Teorema del valor medio, e quindi è vera. Per verificare che la tesi è vera per ogni intero n positivo basta verificare che supposta vera per $n-1$ essa vale per n.

Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni

$$\left[f(x) - f(a) + (x-a)\, Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)\right]$$

e

$$(x-a)^n \quad ,$$

si ha che esiste x_1: $a < x_1 < b$ tale che

$$14) \left\{f(b) - \left[f(a) + (b-a)\, Df(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(a)\right]\right\}$$
$$\cdot\, n(x_1 - a)^{n-1} = (b-a)^n \left\{Df(x_1) - \left[Df(a) + (x_1 - a) D^2 f(a) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots + \frac{(x_1 - a)^{n-2}}{(n-2)!} D^{n-1} f(a)\right]\right\}$$

cioé

$$15)\quad \frac{f(b) - \left[f(a) + (b-a)Df(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}f(a)\right]}{(b-a)^n} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{Df(x_1) - \left|Df(a) + \dots + \frac{(x_1-a)^{n-2}}{(n-2)!}D^{n-1}f(a)\right|}{(x_1-a)^{n-1}} .$$

Poichè si è supposto che la tesi del teorema valga per n-1 scrivendo tale tesi per la funzione $Df(x)$ nell'intervallo (a, x_1) si ha che esiste c: $a < c < x_1$ tale che

$$16)\quad Df(x_1) - \left[Df(a)+(x_1-a)D^2f(a)+\dots+\frac{(x_1-a)^{n-2}}{(n-2)!}D^{n-1}f(a)\right] =$$

$$= \frac{(x_1-a)^{n-1}}{(n-1)!}D^n f(c) .$$

Dalle (16) e (15) segue allora la (13).

c.v.d.

Osservazione. Vale anche la formula che si ottiene dalla (13) scambiando a con b. Per questo in generale la formula di Taylor viene scritta nel modo seguente

$$f(x_2) - \left[f(x_1) + (x_2-x_1)Df(x_1) + \frac{(x_2-x_1)^2}{2}D^2f(x_1) + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{(x_2-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}f(x_1)\right] = \frac{(x_2-x_1)^n}{n!}D^n f(x_1 + \theta(x_2-x_1)) ,$$

dove θ è un opportuno numero verificante: $0 < \theta < 1$.

Esercizio. Calcolo approssimato di $\sqrt[4]{17}$.

Dalla formula di Taylor si sa che esiste c: $16<c<17$ tale che

$$17)\quad \sqrt[4]{17} - \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{32}(16)^{-\frac{7}{4}} = \frac{21}{64 \cdot 6}c^{-\frac{11}{4}} .$$

Dalla (17) si ricava allora

$$2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{32 \cdot 128} < \sqrt[4]{17} < 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{32 \cdot 128} + \frac{21}{64 \cdot 6 \cdot 128 \cdot 16}$$

e quindi anche

$$2{,}030506 < \sqrt[4]{17} < 2{,}030546 .$$

Applicazione. Calcolo approssimato del numero e .

Dalla formula di Taylor si ha che per ogni intero n esiste un punto x_n: $0 < x_n < 1$ tale che

$$18)\quad e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}) = \frac{e^{x_n}}{n!} .$$

Dalla (18) e dalla (41) del Cap.III si ha allora che vale, per ogni intero n

$$19)\quad 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} < e < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}$$

Dalla (19) ponendo $n = 6$ si ha

$$20)\quad 2{,}7177777 < e < 2{,}72194444 .$$

Sempre dalla (19) si ricava anche

$$21)\quad e = \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}) .$$

CAPITOLO V

LIMITI INFINITI E SERIE NUMERICHE

1. LIMITI INFINITI.

Definizione 1. *Una successione* a_n *tende a* $+\infty$ *(più infinito) se per ogni numero reale* p *si può trovare un numero* ν *tale che*

$$a_n > p \ , \quad \textit{per ogni} \quad n > \nu \ .$$

Questo fatto verrà espresso scrivendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ .$$

Esempio. $\lim_{n\to\infty} (3n + 7) = +\infty$.

Infatti fissato p perchè risulti

$$3n + 7 > p$$

basta che n verifichi la

$$n > \frac{p - 7}{3} \ ,$$

e cioè basta scegliere $\nu = (p - 7) : 3$.

Definizione 2. *Una successione* b_n *tende a* $-\infty$ *(meno infinito) se per ogni numero reale* q *si può trovare un numero* ν *tale che*

$$b_n < q \quad , \quad \textit{per ogni} \quad n > \nu$$

Questo fatto verrà espresso scrivendo

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

Esempio. $\lim_{n\to\infty} (5 - 7n) = -\infty$.

Infatti, fissato q , perchè risulti

$$5 - 7n < q$$

basta che n verifichi la

$$n > \frac{5-q}{7}$$

e cioè basta scegliere $\nu = \dfrac{5-q}{7}$.

Osservazione 1. Se si ha

$$1) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

allora si ha anche

$$2) \qquad \lim_{n\to\infty} -a_n = -\infty \; .$$

Infatti fissato q , poichè vale la (1), esiste ν tale che $a_n > -q$, per ogni $n > \nu$, e quindi anche $-a_n < q$ per ogni $n > \nu$.

Poichè ν può determinarsi per ogni scelta di q , la (2) risulta così provata.

E' vero anche, e si prova allo stesso modo, che la (2) implica la (1).

Dalle Definizioni 1 e 2 e dalla Osservazione 1 si ricavano le seguenti proprietà, la cui verifica lasciamo per esercizio al lettore.

Proposizione 1. *Siano* a_n *e* c_n *due successioni e sia*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \; , \qquad a_n \leqq c_n \quad \textit{per ogni} \quad n \; .$$

Allora è anche

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \; .$$

Proposizione 2. *Siano* b_n *e* d_n *due successioni e sia*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \; , \qquad b_n \geqq d_n \quad \textit{per ogni} \quad n \; .$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty \; .$$

Proposizione 3. *Siano* a_n *e* b_n *due successioni e sia*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \; ,$$

ed esista ν *tale che*

$$a_n = b_n \quad \textit{per} \quad n > \nu \; .$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \; .$$

Proposizione 4. *Siano* c_n *e* d_n *due successioni e sia*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty ,$$

ed esista ν *tale che*

$$c_n = d_n \quad \textit{per ogni} \quad n > \nu .$$

Allora è anche

$$\lim_{n\to\infty} d_n = -\infty .$$

Le Proposizioni 3 e 4 mostrano come anche per i limiti infiniti sia vero che il valore del limite non è modificato dal modificare un numero finito di termini della successione.

Così come abbiamo chiamato convergente una successione avente limite finito, intenderemo per *divergente* una successione che abbia limite $+\infty$ o $-\infty$.

2. SUCCESSIONI ESTRATTE.

Nello stesso modo usato per le successioni convergenti si prova la

Proposizione 5. *Se* a_n *è una successione divergente e se* b_n *è una qualunque successione estratta dalla* a_n *allora anche la* b_n *è divergente verso lo stesso limite.*

Vale anche il teorema seguente, che non dimostriamo.

Teorema 1. *Da ogni successione* a_n *si possono estrarre successioni aventi limite (finito o infinito). Se la successione* a_n *non ha limite, da essa si possono estrarre successioni aventi limiti differenti.*

Osservazione 2. Il Teorema 1 è una generalizzazione del Teorema 16 del Cap. I. Per questo basta osservare che se una successione limitata ha limite allora essa è necessariamente convergente, cioé ha limite finito.

3. OPERAZIONI ALGEBRICHE SUI LIMITI INFINITI.

Teorema 2. *Siano* a_n *e* b_n *due successioni tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty , \quad b_n \geqslant s \quad \textit{per ogni} \quad n .$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty .$$

Dimostrazione. Per ogni numero p esiste ν tale che

3) $\quad a_n > p - s , \quad$ per ogni $\quad n > \nu .$

Dalla (3) e dall'ipotesi fatta sulla b_n si ha

4) $\quad a_n + b_n > p - s + s = p , \quad$ per ogni $\quad n > \nu .$

Poichè ν può essere determinato per ogni scelta di p , si è così provata la tesi.

c.v.d.

Osservazione 3. Per l'Osservazione 1 si ha che vale anche

se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $b_n \leqq s$ per ogni n ,

allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty .$$

Osservazione 4. La tesi del Teorema 2 vale in particolare se le successioni a_n e b_n verificano le ipotesi

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = r \in R$,

oppure

ii) $\lim_{a\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Nulla può dirsi invece nel caso in cui la successione a_n diverga a $+\infty$ e la successione b_n diverga a $-\infty$.

Si ha infatti

$a_n = n + 1$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = 1 \to 1$

$a_n = n$, $b_n = -n^2$, $a_n + b_n = n - n^2 \to -\infty$

$a_n = n^2$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = n^2 - n \to +\infty$

$a_n = n$, $b_n = (-1)^n - n$, $a_n + b_n = (-1)^n$ indeterm.

Il fatto che nulla possa dirsi per quanto riguarda il limite della successione $a_n + b_n$ nel caso in cui sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

si esprime anche dicendo che la forma

$$+\infty + (-\infty)$$

è indeterminata.

Teorema 3. *Se le successioni* a_n *e* b_n *verificano le ipotesi*

5) $a_n \geqq p > 0$, per ogni n ,

6) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

allora si ha

7) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Dimostrazione. Fissato $q \in R$ possiamo determinare, grazie alla (6), un ν tale che valga

8) $b_n > |q|/p$, per ogni $n > \nu$.

Dalle (8) e (5) si ha allora

9) $a_n\, b_n > \frac{|q|}{p} \cdot p \geqq q$, per ogni $n > \nu$.

Poichè ν può trovarsi per ogni scelta di q la (7) risulta così dimostrata.

c.v.d.

Osservazione 5. La (7) vale anche nel caso in cui l'ipotesi (5) venga sostituita con

10) $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.

Infatti se vale la (10) esiste certamente un numero positivo p e un numero ν tali che

$$11) \qquad a_n > p \,, \quad \text{per ogni} \quad n > \nu \,.$$

La (11) è sufficiente a sostituire la (5) nelle ipotesi del Teorema 3 quando si ricordi che vale la Proposizione 3.

Tenuto conto della Proposizione 3 e dell'Osservazione 1 possiamo riassumere i risultati riguardanti il prodotto di due successioni nel seguente quadro:

Ipotesi		Tesi
$\lim_{n\to\infty} a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$
< 0	$+\infty$	$-\infty$
> 0	$-\infty$	$-\infty$
< 0	$-\infty$	$+\infty$

Resta fuori dal quadro il caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \quad (-\infty) \,.$$

In tale caso infatti nulla può dirsi circa il limite della successione $a_n b_n$, potendosi facilmente costruire esempi in cui tale limite ha valori diversi o addirittura non esiste. Questo fatto si esprime dicendo che le forme

$$0 \cdot (+\infty) \,, \qquad 0 \cdot (-\infty)$$

sono indeterminate.

Per il quoziente basta al solito considerare il comportamento della successione $\frac{1}{b_n}$. Abbiamo visto che se $b_n \neq 0$ per ogni n e se $\lim_{n\to\infty} b_n = r \neq 0$, allora è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{r} \,,$$

mentre non si poteva dire nulla nel caso in cui $r = 0$. Effettivamente questo caso può rappresentare varie soluzioni, ad esempio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \,, \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0 \,, \qquad \lim_{n\to\infty} -n = -\infty \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \,, \qquad (-1)^n\, n \ \text{non ha limite}$$

Vale però il seguente

Teorema 4. *Se* $b_n \neq 0$ *per ogni* n *e se è*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \,,$$

allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n}\right| = +\infty \,.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi si ha che per ogni $p \in R$ esiste ν tale che

$$|b_n| < \frac{1}{|p| + 1} \,, \quad \text{per ogni} \quad n > \nu \,,$$

e quindi si ha anche

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| > |p| + 1 > p \ , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu \ .$$

Poichè ν può essere determinato per ogni scelta di p, la tesi risulta provata.

c.v.d.

Il fatto che per una successione a_n si abbia

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

si suole esprimere anche scrivendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Dal Teorema 4 e dal suo inverso, che è anche vero, e si dimostra allo stesso modo, si ricava il seguente enunciato

Teorema 5. *Se* $b_n \neq 0$ *per ogni* n, *allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty \ .$$

Dal Teorema 5 si ricava allora facilmente il comportamento della successione a_n/b_n anche in alcuni casi in cui i limiti delle successioni a_n e b_n siano infiniti o zero. Restano indeterminate le forme del tipo

$$\frac{0}{0} \ , \quad \frac{\infty}{\infty} \ .$$

4. SUCCESSIONI MONOTONE.

Teorema 6. *Se la successione* a_n *è non decrescente e non è superiormente limitata allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ .$$

Dimostrazione. Poichè a_n non è superiormente limitata, per ogni $p \in R$ esiste $m \in N$ tale che

12) $\qquad a_m > p \ .$

Essendo poi la a_n non decrescente si ha

13) $\qquad a_n \geqq a_m \ , \quad \text{per ogni} \quad n > m \ .$

Dalle (12) e (13) segue allora

14) $\qquad a_n > p \ , \quad \text{per ogni} \quad n > m \ .$

Poichè m può essere determinato per ogni scelta di p, la tesi risulta provata.

c.v.d.

Allo stesso modo si dimostra che vale il

Teorema 7. *Se la successione* a_n *è non crescente e non è inferiormente limitata allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ .$$

5. LIMITI PER LE FUNZIONI.

Definizione 3 . *Diremo che una funzione* $f(x)$ *reale e definita su un insieme* $E \subset R$ *tende a* $+\infty$ *per* x *tendente a* x_o *su* E *, e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \quad (\text{su } E) = +\infty$$

se per ogni successione x_n *di punti di* E *che converga a* x_o *si ha*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty .$$

Analogamente per il caso di limite $-\infty$. Dalla Definizione 3 e dalle proprietà dei limiti delle successioni si ricavano le analoghe proprietà per i limiti delle funzioni.

Definizione 4. *Diremo che una funzione reale* $f(x)$ *definita su un insieme* $E \subset R$ *, il quale non sia superiormente limitato, ha limite* ℓ *per* x *tendente a* $+\infty$ *su* E *, e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad (\text{su } E) = \ell,$$

se per ogni successione x_n *di punti di* E *divergente a* $+\infty$ *si ha*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

Analogamente si dà la definizione di limite per x tendente a $-\infty$.

Anche per quest'ultimo tipo di limite si provano le proprietà dei limiti riconducendo le dimostrazioni alla verifica delle stesse proprietà per il limite di successioni.

6. SERIE NUMERICHE.

Accanto ad una successioni di numeri reali

$$a_1 \; , \; a_2 \; , \; \ldots\ldots \; , \; a_n \; , \; \ldots$$

possiamo considerare la successione, detta delle *somme parziali*,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1+a_2, \quad \ldots , \; s_n = a_1+a_2+ \ldots +a_n \; , \ldots$$

cioé, usando una notazione più compatta,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Si possono dare le quattro eventualità

i) La successione s_n è convergente verso un numero $r \in R$

ii) La successione s_n è divergente verso $+\infty$.

iii) La successione s_n è divergente verso $-\infty$.

iv) La successione s_n non ha limite.

Nel primo caso diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è convergente e scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = r \ .$$

Quando si verifica uno dei due casi ii), iii) diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{, nel caso ii),}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty \text{, nel caso iii).}$$

Infine nel caso iv) diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è indeterminata, e ad essa in questo caso non associamo nessun valore.

L'interesse sarà centrato sui casi i), ii), iii) e poi in particolare sul caso i). Stabiliremo perciò dei criteri che permettano di decidere il verificarsi per una serie di una delle eventualità i), ii) , iii).

Cominciamo col dare alcuni esempi.

Esempi. 1) Serie geometrica.

Fissato $a \in R$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$$

che viene detta serie geometrica di ragione a .

Il carattere della serie geometrica, cioè la sua appartenenza ad una delle classi i), ii), iii), iv) dipende dal valore della sua ragione e si ha precisamente

$a = 1$: si ha allora $a^{n-1} = 1$ per ogni n e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = n, \text{ per ogni } n \ ,$$

e quindi in tale caso la serie geometrica diverge verso $+\infty$.

$a \neq 1$: in questo caso si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = \frac{1-a^n}{1-a}, \text{ per ogni } n \ ,$$

e quindi risulta che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ appartiene alla classe ii) se $a > 1$, appartiene alla classe i) e il valore ad essa associato è $\frac{1}{1-a}$ se $-1 < a < 1$, infine appartiene alla classe iv) se $a \leq -1$.

Osservazione 6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} pa_n$ che si ottiene moltiplicando per uno stesso numero gli elementi di una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di questa (è ovviamente da escludere il caso $p = 0$) e si ha, per quanto riguarda i valori associati alle due serie, la eguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} pa_n = p \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Osservazione 7. Date due serie non indeterminate

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

escludendo il caso in cui una valga $+\infty$ e l'altra $-\infty$, si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ risulta anche essa determinata e vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Osservazione 8. Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie e sia ν tale che

$$a_n = b_n \quad \text{per ogni} \quad n > \nu .$$

Allora se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente tale risulta anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente a $+\infty$ $(-\infty)$, lo stesso può dirsi per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ed infine se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è indeterminata tale è anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

7. SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI.

Poichè la successione delle somme parziali di una serie a termini di segno costante è monotona, abbiamo che per questo tipo di serie può verificarsi solo la convergenza o la divergenza (a $+\infty$ se si tratta di serie a termini positivi, a $-\infty$ se si tratta di serie a termini negativi).

Ha interesse perciò associare ad una serie a termini di segno variabile una serie a termini di segno costante, il cui comportamento sia legato a quello della prima serie.

Alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ associamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, i cui termini sono i valori assoluti della prima serie. Vale allora il seguente

Terorema 8. *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *è convergente, allora anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente e si ha*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Dimostrazione. Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = r .$$

Per ogni h poniamo

$$b_h = \max(a_h, 0) = \frac{a_h + |a_h|}{2}$$

$$c_h = \min(a_h, 0) = \frac{a_h - |a_h|}{2} \quad .$$

Avremo allora, per ogni h ,

15) $\qquad a_h = b_h + c_n \quad ,$

16) $\qquad |a_h| = b_h - c_h \quad .$

Poichè vale

$$0 \leqq b_h \leqq |a_h| \;, \text{ per ogni } h \;,$$

avremo che la successione

$$\sum_{h=1}^{n} b_n$$

che è non decrescente verifica

$$\sum_{h=1}^{n} b_h \leqq \sum_{h=1}^{n} |a_h| \leqq r \;, \text{ per ogni } n \;,$$

e quindi risulta convergente e si ha

17) $\qquad 0 \leqq \sum_{h=1}^{\infty} b_h = r' \leqq r \;.$

Poichè vale poi

$$0 \geqq c_h \geqq -|a_h| \;, \text{ per ogni } h \;,$$

avremo che la successione

$$\sum_{h=1}^{n} c_h$$

che non è crescente, verifica

$$0 \geqq \sum_{h=1}^{n} c_h \geqq -\sum_{h=1}^{n} |a_h| \geqq -r \;, \text{ per ogni } n \;,$$

e quindi risulta convergente e si ha

18) $\qquad 0 \geqq \sum_{h=1}^{\infty} c_h = r'' \geqq -r \;.$

Dalla (15) e dall'Osservazione 7 si ha allora che la serie

$\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ è convergente e vale

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h = \sum_{h=1}^{\infty} b_h + \sum_{h=1}^{\infty} c_h = r' + r'' \;, \quad -r \leqq r'+r'' \leqq r \;.$$

c.v.d.

Se si pone allora la seguente

Definizione 5. *Una serie* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *dicesi assolutamente convergente se é convergente la serie*

$$\sum_{h=1}^{\infty} |a_h| \;;$$

il Teorema 8 stabilisce che: *ogni serie assolutamente convergente è anche convergente*. Non vale però la proprietà inversa, come faremo vedere più avanti con un esempio.

Teorema 9 (Criterio del confronto). *Se le serie*

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h \text{ e } \sum_{h=1}^{\infty} b_h$$

verificano la

19) $\qquad |a_h| \leqq |b_h| \;, \text{ per ogni } h \;,$

allora si ha

$$\sum_{h=1}^{\infty} |a_h| \leqq \sum_{h=1}^{\infty} |b_h| \quad ,$$

e quindi se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *è assolutamente convergente e ri-sulterà tale anche la serie* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$.

Dimostrazione. Basta osservare che la (19) implica

$$20) \qquad \sum_{h=1}^{n} |a_h| \leqq \sum_{h=1}^{n} |b_h| \ , \text{ per ogni } n \ ,$$

e nella (20) passare al limite.

c.v.d.

Teorema 10 (Criterio del rapporto). *Se per una serie asse-gnata* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *esiste un numero reale positivo* $k < 1$ *e un intero* n *tali che*

$$21) \qquad \left|\frac{a_{h+1}}{a_h}\right| \leqq k \ , \text{ per ogni } h > n \ ,$$

allora la serie $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *è assolutamente convergente.*

Dimostrazione. Poniamo $p = \dfrac{|a_{n+1}|}{k^{n+1}}$.

Avremo allora dalla (21)

$$|a_h| \leqq p\, k^h \ , \text{ per ogni } h > n \ .$$

Quindi i termini della serie $\sum_{h=1}^{\infty} p\, k^h$ maggiorano i corri-spondenti termini della serie $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ a partire dallo

$(n+1)$-esimo.

Tenuto conto dell'osservazione 8, del criterio del con-fronto e del fatto che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} p\, k^h$ è convergente, essendo $0 < k < 1$, si ricava la tesi.

c.v.d.

Teorema 11 (Criterio della radice). *Se per una assegnata serie* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *esiste un numero reale positivo* $k < 1$ *e un* n *tali che*

$$22) \qquad \sqrt[h]{|a_h|} \leqq k \ , \text{ per ogni } h > n \ ,$$

allora la serie $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *è assolutamente convergente.*

Dimostrazione. Dalla (22) si ricava

$$|a_h| \leqq k^h \ , \text{ per ogni } h > n \ ,$$

e quindi si possono ripetere le considerazioni fatte per dimostrare il Teorema 10.

c.v.d.

Osservazione 9. L'ipotesi del Teorema 10 è verificata se esiste il

$$\lim_{h\to\infty} \left|\frac{a_{h+1}}{a_h}\right| = \alpha < 1 \ .$$

Analogamente la tesi del Teorema 11 è verificata se esiste il

$$\lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{|a_h|} = \alpha < 1 .$$

8. SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO.

Teorema 12. *Se la serie* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *verifica*

23) $$a_h\, a_{h+1} \leq 0 , \quad \text{per ogni} \quad h ,$$

e se la successione $|a_h|$ *è non crescente ed ha limite* 0 *allora la serie* $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ *è convergente.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che sia

$$a_1 \geqq 0$$

e quindi non siano negativi i termini di indice dispari e non positivi i termini di indice pari. Distinguiamo allora le somme parziali di indice pari

$$s_{2n} = \sum_{h=1}^{2n} a_h$$

da quelle di indice dispari

$$s_{2n+1} = \sum_{h=1}^{2n+1} a_h \quad .$$

Per le prime si ha

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} + a_{2n+1} = -|a_{2n+2}| + |a_{2n+1}| ,$$

e quindi per l'ipotesi di non crescenza fatta sulla successione $|a_h|$ si ha che la successione a_{2n} é non decrescente.

Per le somme parziali di indice dispari si ha

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+3} + a_{2n+2} = |a_{2n+3}| - |a_{2n+2}|$$

e quindi la successione a_{2n+1} risulta non crescente. D'altra parte vale

24) $$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geqq 0 , \quad \text{per ogni} \quad n ,$$

da cui tenuto conto del carattere monotono delle due successioni s_{2n} e s_{2n+1} si ricava

25) $$s_{2m} \leqq s_{2h+1} , \quad \text{per ogni} \quad m \quad e \quad h .$$

Esisteranno perciò finiti i limiti

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = r , \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = r' \quad ,$$

e dalla (24) si ricava

26) $$r' - r = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 .$$

Quindi le due successioni s_{2n} e s_{2n+1} hanno lo stesso limite, e questo implica allora che la successione s_n ha come limite il valore comune ai due limiti.

c.v.d.

Esempio. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ verifica le ipotesi del Teorema 12 e quindi risulta convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che si ottiene prendendo i valori assoluti dei termini della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ verifica

$$\sum_{h=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{h} \geqq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$s_{2^n} = \sum_{h=1}^{2^n} \frac{1}{h} \geqslant 1 + \frac{n}{2} ,$$

per cui la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h}$ diverge verso $+\infty$.

La serie $\sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{h}$ fornisce pertanto un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente.

9. SERIE DI TAYLOR.

Dalla formula di Taylor provata nel Cap.IV si ricavano alcune identità che possono essere viste come valore di alcune serie particolari:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x , \qquad \text{per ogni } x \in R ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sen } x , \qquad \text{per ogni } x \in R ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x , \qquad \text{per ogni } x \in R ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sen h}x , \qquad \text{per ogni } x \in R ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos hx , \qquad \text{per ogni } x \in R ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x) , \qquad \text{per ogni } |x| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arctg } x , \qquad \text{per ogni } |x| < 1 .$$

Esempio. Dalla prima delle eguaglianze ora scritte, ponendo $x = -1$ si ricava

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} ,$$

e quindi per ogni n si ha

$$27) \qquad \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{i!} < e^{-1} < \sum_{i=0}^{2n} \frac{(-1)^i}{i!} .$$

Dalla (27), facendo $n = 3$, si ricava

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

cioé

$$2,716 < \frac{720}{265} < e < \frac{120}{44} = 2,7\overline{27}$$

CAPITOLO VI

L'INTEGRALE DI RIEMANN

1. MISURA DEGLI INTEGRALI.

Se con T si indica l'insieme di numeri reali $\{x\ ;\ a \leqq x \leqq b\}$, cioé l'intervallo chiuso $[a\ ,\ b]$, diremo misura di T il numero $b-a$ e lo indicheremo con

$$\text{mis } T\ .$$

La stessa misura viene attribuita agli insiemi che si ottengono da T togliendo uno dei due punti estremi a, b o entrambi.

Una proprietà immediata della misura degli intervalli ora definita è espressa dalla seguente

Proposizione 1. *Se l'intervallo* T *è unione di un numero finito di intervalli* $T_1, T_2, \ldots, T_n$, *i quali abbiano a due a due a comune al più un punto, allora si ha la relazione*

$$\text{mis } T = \text{mis } T_1 + \text{mis } T_2 + \ldots + \text{mis } T_n$$

La dimostrazione di questa proposizione è lasciata per esercizio al lettore.

2. FUNZIONI COSTANTI A TRATTI.

Una famiglia di funzioni per le quali l'integrale si può definire in maniera molto semplice è costituita dalle funzioni costanti a tratti, la cui definizione precisa è la seguente.

Definizione 1. *Diremo costante a tratti una funzione reale definita su un intervallo la quale assuma un numero finito di valori e abbia al più un numero finito di punti di discontinuità.*

Dalla Definizione 1 e dalle proprietà delle funzioni continue si ricava che la somma e il prodotto di funzioni costanti a tratti sono ancora funzioni costanti a tratti e lo stesso può dirsi per il quoziente se la funzione al denominatore assume valori tutti diversi da zero.

La proprietà delle funzioni costanti a tratti che permette di definire per esse immediatamente l'integrale è data dal seguente

Teorema 1. *Se* $f(x)$ *è una funzione costante a tratti definita su un intervallo* $[a, b]$ *allora si possono trovare*

un numero finito di punti $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ *tali che*

$$f(x) = \text{cost.} = c_i \text{ , per ogni } x\text{: } a_{i-1} < x < a_i \text{ .}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ gli eventuali punti di discontinuità di $f(x)$ interni all'intervallo $[a, b]$.

Si tratta di verificare che se x, x' sono una coppia di punti interni ad uno degli intervalli $[a_{i-1}, a_i]$, allora la funzione $f(x)$ assume lo stesso valore in essi. Per questo si osservi che la funzione $f(x)$ deve risultare continua nell'intervallo di estremi x, x' ed allora se assumesse valori diversi nei due punti x, x' dovrebbe assumere anche tutti i valori compresi fra i valori $f(x)$ e $f(x')$ e quindi infiniti valori. Ma questo é contro l'ipotesi che la funzione assuma solo un numero finito di valori, e quindi deve essere

$$f(x) = f(x')$$

c.v.d.

Poniamo allora la seguente

Definizione 2. *Se* $f(x)$ *è una funzione costante a tratti definita nell'intervallo* $T = [a, b]$. *Se* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ *sono i punti di discontinuità di* $f(x)$ *interni all'intervallo* $[a, b]$ *e se indichiamo con* $T_1, T_2, \dots, T_n$ *gli in* *tervalli* $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{n-1}, b]$ *e con* c_i *lo unico valore assunto dalla* $f(x)$ *all'interno dell'intervallo* T_i (*per* $i = 1, 2, \ldots, n$), *allora diremo integrale della* $f(x)$ *esteso all'intervallo* T *il numero*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \operatorname{mis} T_i$$

e lo indicheremo con uno dei simboli

$$\int_b^a f(x)\,dx \ , \quad \int_T f(x)\,dx \ .$$

Osservazione 1. Se $c_i > 0$ allora $c_i \operatorname{mis} T_i$ rappresenta l'area del rettangolo

$$\{(x, y) \ ; \ x \in T_i \ , \ 0 \leqq y \leqq c_i\} \ ,$$

e quindi se la funzione $f(x)$ assume solo valori positivi l'integrale

$$\int_T f(x)\,dx$$

rappresenta l'area della regione del piano che si ottiene facendo l'unione dei rettangoli

$$\{(x, y \ ; \ x \in T_i \ , \ 0 \leqq y \leqq c_i\} \ , \quad \text{per } i = 1, 2, \ldots, n.$$

In generale l'integrale

$$\int_T f(x)\,dx$$

rappresenta la differenza delle aree delle due regioni, la

prima delle quali è l'unione dei rettangoli

$$\{(x, y) \ ; \ x \in T_i \ , \ 0 \leqq y \leqq c_i\} \ , \quad \text{con } c_i > 0$$

e la seconda è l'unione dei rettangoli

$$\{(x, y) \ ; \ x \in T_i \ , \ c_i \leqq y \leqq 0\} \ , \quad \text{con } c_i < 0 \ .$$

Osservazione 2. Nel caso particolare in cui la funzione $f(x)$ sia costante, cioé assuma un solo valore c nell'intervallo T , si ha

$$\int_T f(x)\,dx = c \operatorname{mis} T \ .$$

Altre proprietà dell'integrale delle funzioni costanti a tratti si ricavano dalla seguente

Proposizione 2. *Se* $f(x)$ *è una funzione costante a tratti definita nell'intervallo* $[a, b]$, *allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s \to 0+} s \sum_i^{a \leq is < b} f(is) \qquad (*) \ .$$

La verifica di questa proposizione è lasciata per esercizio al lettore, così come le conseguenze che da essa si ricavano e che sono le seguenti:

Proposizione 3. *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni costanti a tratti definite nello stesso intervallo* T *e se*

(*) Il simbolo $\sum_i^{a \leq is < b}$ sta ad indicare che la somma è estesa a tutti gli interi i tali che $is \geqq a$ e $is < b$, cioé agli interi $i \geqq \frac{a}{s}$ e $i < \frac{b}{s}$.

si ha

$$f(x) \leq g(x) \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in T \ ,$$

allora risulta

$$\int_T f(x)\,dx \leq \int_T g(x)\,dx \ .$$

Teorema 2 (Teorema della media). *Se* $f(x)$ *é una funzione costante a tratti definita nell'intervallo* T *e se si ha, per* c_1 *e* $c_2 \in R$

$$c_1 \leq f(x) \leq c_2 \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in T$$

allora risulta

$$c_1 \text{ mis } T \leq \int_T f(x)\,dx \leq c_2 \text{ mis } T \ .$$

Proposizione 4 (Proprietà distributiva). *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono due funzioni costanti a tratti e definite nello stesso intervallo* T *, e se* λ *e* μ *sono numeri reali allora si ha l'eguaglianza*

$$\int_T \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_T f(x)\,dx + \mu \int_T g(x)\,dx \ .$$

Proposizione 5 (Proprietà additiva). *Se* $f(x)$ *è una funzione costante a tratti definita nell'intervallo* $[a, b]$ *e se* c *è un punto interno all'intervallo* $[a, b]$ *allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

3. INTEGRALE SUPERIORE E INFERIORE. FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN.

Per ogni funzione limitata $f(x)$ definita in un intervallo $T = [a, b]$ possiamo porre le seguenti definizioni

Definizione 3. *Diremo integrale superiore di* $f(x)$ *esteso all'intervallo* T *il numero, che indicheremo con*

$$''\!\!\int_T f(x)\,dx \quad \text{oppure con} \quad ''\!\!\int_a^b f(x)\,dx$$

e che è definito da

$$''\!\!\int_T f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_T h(x)\,dx \ ; \ h(x) \text{ costante a tratti,} \quad h(x) \geq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in T\Big\} .$$

Definizione 4. *Diremo integrale inferiore di* $f(x)$ *esteso all'intervallo* T *il numero, che indicheremo con*

$$'\!\!\int_T f(x)\,dx \qquad \text{o con} \qquad '\!\!\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$

e che è definito da

$$'\!\!\int_T f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_T k(x)\,dx \ ; \ k(x) \text{ costante a tratti ,} \quad k(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in T\Big\} .$$

Dalle definizioni 3 e 4 si ricava immediatamente che l'integrale superiore di una qualunque funzione limitata risulta maggiore o eguale dell'integrale inferiore della stessa funzione. Interessante sarà considerare quelle funzioni per le quali i due integrali coincidono. Per questo poniamo la seguente

Definizione 5. *Diremo integrabile secondo Riemann su un intervallo* $T = [a, b]$ *una funzione* $f(x)$ *che sia definita e limitata su* T *e per la quale si abbia*

$$\overline{\int_T} f(x)\, dx = \underline{\int_T} f(x)\, dx .$$

In tale caso diremo integrale della funzione $f(x)$ *il valore comune agli integrali superiore e inferiore e lo indicheremo con*

$$\int_T f(x)\, dx \quad \textit{oppure con} \quad \int_a^b f(x)\, dx .$$

Prima di parlare delle proprietà delle funzioni integrabili secondo Riemann vogliamo indicare qualche tipo di funzione che risulta integrabile secondo Riemann. Una classe di funzioni che risultano integrabili secondo Riemann e che contiene la classe delle funzioni costanti a tratti, è costituita dalle funzioni limitate che hanno al più un numero finito di punti di discontinuità. Noi ci limiteremo

però a verificare la integrabilità secondo Riemann delle funzioni continue. Per fare questo abbiamo bisogni di una proprietà delle funzioni continue definite su un intervallo, detta *uniforme continuità*, e che verificheremo nell'appendice a questi appunti.

Uniforme continuità. *Se* $f(x)$ *è una funzione reale definita e continua in un intervallo* $T = [a, b]$, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *si può trovare* $\delta > 0$ *tale che per ogni coppia di punti* $x, x' \in T$ *la quale verifichi*

$$|x - x'| < \delta$$

si ha

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon .$$

Possiamo allora provare il

Teorema 3. *Ogni funzione* $f(x)$ *definita e continua in un intervallo* $T = [a, b]$ *è integrabile secondo Riemann sull'intervallo* T .

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato si può, per la uniforme continuità, determinare $\delta > 0$ in modo che valga

1) $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, se $|x - x'| < \delta$.

Dividiamo allora l'intervallo T in un numero finito di intervalli $T_1, T_2, \dots, T_n$ tali che

2) $\text{mis}\, T_i < \delta$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Indichiamo con m_i e M_i l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo T_i. Dalle (1) e (2) si ha

$$3) \qquad M_i - m_i < \varepsilon , \quad \text{per ogni} \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Indichiamo allora con $h(x)$ la funzione costante a tratti definita su T la quale assume il valore M_i in ogni punto dell'intervallo T_i, e con $k(x)$ la funzione costante a tratti definita su T la quale assume il valore m_i in ogni punto dell'intervallo T_i. Avremo allora evidentemente

$$4) \qquad k(x) \leqq f(x) \leqq h(x) , \quad \text{per ogni} \quad x \in T ,$$

e avendosi

$$\int_T h(x)\,dx - \int_T k(x)\,dx = \int_T [h(x)-k(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \operatorname{mis} T_i$$

dalla (3) e dalla Proposizione 1 si ricava

$$5) \qquad \int_T h(x)\,dx - \int_T k(x)\,dx < \varepsilon \operatorname{mis} T .$$

Dalle (4) e (5) segue allora

$${}''\!\int_T f(x)\,dx - {}'\!\int_T f(x)\,dx < \varepsilon \operatorname{mis} T ,$$

per cui, essendo ε arbitrario ed essendo

$${}''\!\int_T f(x)\,dx - {}'\!\int_T f(x)\,dx \geqq 0 ,$$

si ha necessariamente

$${}''\!\int_T f(x)\,dx = {}'\!\int_T f(x)\,dx .$$

c.v.d.

4. PROPRIETA' DELLE FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN.

Proposizione 6. *Se* $f(x)$ *è una funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo* $[a, b]$ *allora si ha*

$$6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s \to 0+} s \sum_{i}^{a \leq is < b} f(is) .$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $g_1(x)$ una funzione costante a tratti definita su $[a, b]$ e tale che

$$7) \qquad g_1(x) \geqq f(x) , \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, b] ,$$

$$8) \qquad \int_a^b g_1(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon .$$

Sia $g_2(x)$ una funzione costante a tratti definita su $[a, b]$ e tale che

$$9) \qquad g_2(x) \leqq f(x) , \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, b] ,$$

$$\int_a^b g_2(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon .$$

Essendo $g_1(x)$ e $g_2(x)$ funzioni costanti a tratti allora per esse vale la (6) e quindi si può determinare $\delta > 0$ tale che

11) $\left|\int_a^b g_1(x)dx - s\sum_i^{a\leq is<b} g_1(is)\right| < \varepsilon$,

per ogni s: $0 < s < \delta$,

12) $\left|\int_a^b g_2(x)dx - s\sum_i^{a\leq is<b} g_2(is)\right| < \varepsilon$,

per ogni s: $0 < s < \delta$.

Dalle (7) e (11) si ricava allora

13) $s\sum_i^{a\leq is<b} f(is) \leqq s\sum_i^{a\leq is<b} g_1(is) < \varepsilon+ \int_a^b g_1(x)\, dx$,

per s: $0 < s < \delta$,

mentre dalle (9) e (12) si ha

14) $s\sum_i^{a\leq is<b} f(is) \geqq s\sum_i^{a\leq is<b} g_2(is) > -\varepsilon+\int_a^b g_2(x)\, dx$,

per s: $0 < s < \delta$.

Dalle (8) e (13) segue allora

15) $s\sum_i^{a\leq is<b} f(is) < 2\varepsilon + \int_a^b f(x)\, dx$,

per ogni s: $0 < s < \delta$,

mentre dalle (10) e (14) si ha

16) $s\sum_i^{a\leq is<b} f(is) > -2\varepsilon + \int_a^b f(x)\, dx$,

per ogni s: $0 < s < \delta$.

Dalla (15) e (16) si ricava finalmente

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx - s\sum_i^{a\leq is<b} f(is)\right| < 2\varepsilon ,$$

per ogni s: $0 < s < \delta$.

Poichè δ può essere determinato per ogni $\varepsilon > 0$ si

è così verificata la (6).

c.v.d.

Dalla Proposizione (6) si ricavano per le funzioni integrabili secondo Riemann le stesse proprietà che avevamo dimostrato per le funzioni costanti a tratti, e cioè, le proprietà distributiva e additiva dell'integrale (cfr. le Proposizioni 4 e 5) e il Teorema della media (cfr. il Teorema 2).

5. IL TEOREMA DI TORRICELLI-BARROW E L'INTEGRAZIONE INDEFINITA.

Dalle proprietà generali dell'integrale di Riemann ricaveremo un importante risultato (il Teorema di Torricelli Barrow) che stabilisce un collegamento fra il concetto di integrale e quello di derivata. Prima di passare ad enunciare e dimostrare il Teorema di Torricelli-Barrow facciamo alcune convenzioni sulle notazioni del calcolo integrale.

Se $T = \{x \,;\, a \leqq x \leqq b\}$ abbiamo convenuto di indicare indifferentemente con

$$\int_T f(x)\, dx \quad \text{oppure con} \quad \int_a^b f(x)\, dx$$

l'integrale esteso all'intervallo $T = [a, b]$ di una funzione $f(x)$ integrabile secondo Riemann su tale intervallo.

Useremo d'ora in poi la notazione

$$\int_b^a f(x)\, dx$$

per indicare

$$-\int_a^b f(x)\, dx = -\int_T f(x)\, dx\ .$$

Inoltre intenderemo che per ogni numero reale a valga

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0\ .$$

Con queste convenzioni la proprietà additiva dell'integrale di Riemann può essere enunciata nella forma più comoda che è la seguente:

Proprietà additiva dell'integrale: *Se* a, b, c *sono tre numeri reali qualunque e* $f(x)$ *è una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo che ha come estremo il più piccolo dei tre numeri* a, b, c *e come secondo estremo il più grande di essi, allora vale l'eguaglianza*

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx\ .$$

Analogamente il Teorema della media può enunciarsi nel modo seguente:

Teorema della media: *Se* a, b *sono due numeri reali e* $f(x)$ *è una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo che ha per estremi* a, b *e se in tale intervallo si*

ha

$$c_1 \leqq f(x) \leqq c_2$$

allora si ha

$$c_1 \leqq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leqq c_2\ .$$

In questa nuova formulazione del Teorema della media non si richiede che b sia maggiore di a.

Osserviamo inoltre che sono simboli equivalenti

$$\int_a^b f(x)\, dx\ ,\quad \int_a^b f(t)\, dt\ ,\quad \int_a^b f(u)\, du\ ,\quad \text{ecc.}$$

Teorema di Torricelli-Barrow. *Se* $f(x)$ *è una funzione continua nell'intervallo* $T = [a, b]$ *e se fissato un punto* $c \in T$ *si considera la funzione*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

che è definita per ogni $x \in T$, *si ha*

i) *la funzione* $F(x)$ *è derivabile in ogni punto* $x \in T$,

ii) *per ogni* $x \in T$ *si ha:* $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Si tratta di verificare che per ogni $x \in T$ vale l'eguaglianza

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\ .$$

Cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare $\delta > 0$ in modo che valga

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon \ , \quad \text{per ogni} \quad |h| < \delta \ .$$

Dalla definizione di $F(x)$ e dalla proprietà additiva del l'integrale di Riemann si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \ ,$$

da cui si ricava

$$17) \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

Per la continuità della funzione $f(x)$ nel punto x si ha che fissato $\varepsilon > 0$ può determinarsi $\delta > 0$ in modo che valga

$$18) \qquad |f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad |t - x| < \delta \quad .$$

Dalle (17) e (18) si ricava allora, tenuto conto del Teorema della media

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon \ , \quad \text{per} \quad |h| < \delta \ .$$

Il Teorema risulta così provato.

c.v.d.

Osservazione 3. Il Teorema di Torricelli-Barrow mostra come il problema di trovare funzioni che abbiano come derivata una funzione assegnata abbia soluzione ogni volta che si consideri una funzione continua in un intervallo o in una semiretta o in tutto l'asse reale. Le soluzioni di tale problema sono ovviamente infinite, in quanto ogni funzione che si ottiene aggiungendo una costante ad una soluzione del problema è ancora una soluzione del problema. E' anche vero però, e basta ricordare il Teorema del valor medio del calcolo differenziale, che due funzioni che hanno per derivata una stessa funzione differiscono fra loro per una costante.

Poniamo la seguente

Definizione 6. *Diremo primitiva di una funzione* $f(x)$ *definita su un insieme* E *(*E *può essere un intervallo, una semiretta o tutto l'asse reale) ogni funzione* $g(x)$ *definita e derivabile in ogni punto di* E *la quale abbia derivata uguale a* $f(x)$ *per ogni* $x \in E$.

Allora quanto detto nel Teorema di Torricelli-Barrow e nelle Osservazioni 3 e 4 può essere riassunto nel seguente enunciato

Teorema fondamentale del calcolo integrale: *Se* $f(x)$ *è una funzione continua definita in un insieme* E *(*E *è un intervallo o una semiretta o tutto l'asse reale) allora esistono infinite primitive di* $f(x)$ *le quali possono ottenersi da una di esse aggiungendo una qualunque costante. Fra le primitive di* $f(x)$ *vi sono le funzioni integrali*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad ,$$

dove c *è un punto fissato di* E.

Una conseguenza pratica molto importante del Teorema fondamentale del calcolo integrale è la seguente

Regola per il calcolo degli integrali: *Se* $f(x)$ *è una funzione continua definita su un insieme* E (E *è un intervallo o una semiretta o tutto l'asse reale) e se* a, b *sono due punti qualunque di* E *e* $g(x)$ *è una qualunque primitiva di* $f(x)$ *allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a) \; .$$

Dimostrazione. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$. Poichè anche $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di $f(x)$ deve esistere una costante k tale che

$$g(x) = F(x) + k \; ,$$

e quindi si ha

$$g(b) - g(a) = F(b) + k - [F(a) + k] = F(b) - F(a) \; .$$

D'altra parte valendo

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt \; , \quad F(a) = 0$$

si ha la tesi.

c.v.d.

Esempi.

1) Si voglia calcolare

$$\int_2^4 x^3\,dx \; .$$

Siccome evidentemente $\frac{1}{4}x^4$ è una primitiva di x^3 si ha

$$\int_2^4 x^3\,dx = \frac{1}{4}[256 - 16] = \frac{240}{4} = 60 \; .$$

2) Si voglia calcolare

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx \; .$$

Siccome log x è una primitiva di $\frac{1}{x}$ si ha

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

3) Si voglia calcolare

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \; .$$

Siccome $-\cos x$ è una primitiva di sen x si ha

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1=2.$$

Si vede così come per calcolare gli integrali basta conoscere le primitive delle funzioni da integrare. Per avere le primitive di alcune delle funzioni più comuni basta leggere al contrario una tabella di derivate; per al largare poi la classe delle funzioni di cui si conoscono le primitive possono servire le regole di integrazione che daremo nel prossimo paragrafo.

TABELLA 2 : Alcune primitive immediate.

Funzione	Primitiva
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
e^x	e^x
a^x	$a^x/\log a$
sen x	- cos x
cos x	sen x
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg x
$\frac{-1}{\text{sen}^2 x}$	cotg x

6. REGOLE DI INTEGRAZIONE INDEFINITA.

L'operazione che consiste nel calcolo delle primitive di una funzione assegnata viene comunemente detta *integrazione indefinita*. Abbiamo visto nel paragrafo precedente quale sia l'importanza pratica di tale operazione, perciò ora daremo delle regole che permettono di trovare il risultato di tale operazione anche per funzioni diverse da quelle per le quali l'integrazione indefinita è immediata.

L'insieme delle primitive di una funzione f(x) viene anche indicato col simbolo

$$\int f(x)\, dx$$

Integrazione per decomposizione. Dalla regola di derivazione della somma di due funzioni si ricava, per quello che riguarda l'integrazione indefinita, la seguente regola:

Se la funzione $f(x)$ *può scriversi come somma di due funzioni* $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$, *e se* $g_1(x)$ *è una primitiva di* $f_1(x)$ *e* $g_2(x)$ *è una primitiva di* $f_2(x)$, *allora la funzione* $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ *è una primitiva della funzione* $f(x)$. *In simboli la regola si esprime*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx ,$$

dove il secondo membro sta ad indicare l'insieme delle funzioni che si ottiene sommando una qualunque primitiva di $f_1(x)$ *ad una qualunque primitiva di* $f_2(x)$.

Esempi.

1) Si voglia calcolare

$$\int \frac{1}{\text{sen } x \ \cos x} dx$$

Si può fare la decomposizione

$$\frac{1}{\text{sen } x \ \cos x} = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x \ \cos x} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

e si ha ovviamente

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + \text{cost.}$$

$$\int \frac{\cos x}{\text{sen } x} dx = \log|\text{sen } x| + \text{cost.}$$

e quindi si ha

$$\int \frac{1}{\text{sen } x \ \cos x} dx = \log|\text{sen } x| - \log|\cos x| + \text{cost.} =$$

$$= \log|\text{tg } x| + \text{cost.}$$

2) Si voglia calcolare

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx .$$

Poichè vale ovviamente

$$\frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

si ha

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + \text{cost}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \text{cost} ,$$

avremo

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx = \log|x| - \frac{1}{x} + \text{cost.}$$

Integrazione per parti. Dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni si ricava, per quello che riguarda la integrazione indefinita, la seguente regola, che prende il nome di *regola di integrazione per parti:*

Siano $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni e sia* $F(x)$ *una primitiva di* $f(x)$ *e* $G(x)$ *una primitiva di* $g(x)$ *. Allora sottraendo dalla funzione* $F(x)\,G(x)$ *una qualunque primitiva della funzione* $F(x)\,g(x)$ *si ottiene una primitiva della funzione* $f(x)\,G(x)$ *, e in questo modo si ottengono tutte le primitive della funzione* $f(x)\,G(x)$ *. In simboli la regola si esprime*

$$\int f(x)\,G(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int F(x)\,g(x)\,dx ,$$

dove il secondo membro sta ad indicare l'insieme delle funzioni che si ottengono sottraendo dalla funzione $F(x)G(x)$ *una qualunque delle primitive della funzione* $F(x)\,g(x)$ *.*

Verifica. Sia $\phi(x)$ una primitiva qualunque di $F(x)g(x)$, cioé sia

$$D\phi(x) = F(x)\,g(x) .$$

Avremo allora, ricordando la regola di derivazione della differenza e del prodotto di due funzioni

$$D\left[F(x)G(x) - \phi(x)\right] = f(x)G(x) + F(x)\,g(x) - F(x)\,g(x) =$$

$$= f(x)\,G(x) .$$

Esempi.

1) Si voglia calcolare

$$\int \log x \, dx .$$

Se indichiamo con $f(x)$ la funzione costante eguale ad 1 e con $G(x)$ la funzione $\log x$, la funzione da integrare viene ad essere scritta nella forma $f(x)\, G(x)$. Una primitiva di $f(x) = 1$ è ovviamente la funzione $F(x) = x$, mentre la derivata $g(x)$ della funzione $G(x) = \log x$ è la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$, per cui si ha

$$F(x)\, g(x) = 1 .$$

Applicando la regola di integrazione per parti si ha

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + \text{cost} = x(\log x - 1) + \text{cost}$$

2) Si voglia calcolare l'integrale

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx .$$

Ponendo $G(x) = x$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, si può prendere

$$F(x) = - \cos x$$

e quindi dalla regola di integrazione per parti si ricava

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + \text{cost} .$$

Integrazione per sostituzione. Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ricava, per quanti riguarda la

integrazione indefinita, la seguente regola, detta *regola di integrazione per sostituzione:*

Se una funzione $f(x)$ *può scriversi nella forma*

$$f(x) = h\big(u(x)\big)\, u'(x)$$

e se $H(u)$ *è una primitiva della funzione* $h(u)$, *allora la funzione* $H\big(u(x)\big)$ *risulta essere una primitiva della funzione* $f(x)$. *Tale regola si suole esprimere in simboli nel modo seguente*

$$\int h\big(u(x)\big)\, u'(x) \, dx = \Big[\int h(u) \, du\Big]_{u=u(x)}$$

dove il secondo membro sta ad indicare l'insieme delle funzioni che si ottengono componendo le funzioni primitive dalla $h(u)$ *con la funzione* $u(x)$.

Esempi.

1) Si voglia calcolare

$$\int (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx .$$

La funzione da integrare può essere scritta nella forma

$$(\cos x)^2 \operatorname{sen} x = -(\cos x)^2 \, D \cos x ,$$

e quindi dalla regola di integrazione per sostituzione si ricava

$$\int (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx = \Big[-\int u^2 \, du\Big]_{u=\cos x} = -\frac{1}{3}(\cos x)^3 + \text{cost}.$$

2) Si voglia calcolare

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx .$$

Dalla regola di integrazione per sostituzione si ha

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \left[\int \frac{du}{u}\right]_{u=u(x)} = \log|u(x)| + \text{cost} .$$

Dalle tre regole di integrazione indefinita si ricavano, se si tiene conto del Teorema fondamentale del calcolo integrale, le seguenti tre formule per il calcolo degli integrali definiti.

1) $\int_a^b f_1(x) + f_2(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$,

2) $\int_a^b f(x)G(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\, dx$

dove sono sottointese le relazioni

$$F'(x) = f(x) \ , \quad G'(x) = g(x)$$

Comunemente si suole indicare la differenza dei valori che una funzione $\phi(x)$ assume agli estremi di un intervallo $[a, b]$ con il simbolo $|\phi(x)|_a^b$, cioé si pone

$$[\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a) .$$

Con questa convenzione la seconda regola per il calcolo degli integrali definiti si può scrivere anche nel modo seguente

$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\, dx .$$

3) $\int_a^b h[u(x)]u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} h(u)\, du$,