CLASSIFICAZIONE DEI $\mathbb{P}^1$-BUNDLES SU CURVE IN $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$

Sia S una superficie proiettiva liscia, non degenere, in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Sia d il suo grado. Supponiamo che $S = \mathbb{P}(E)$, dove E è un fibrato vettoriale di rango 2, su una curva liscia di genere g, normalizzato secondo Hartshorne (si veda [H]), di invariante $e := -\deg[c_1(E)]$. Sia L il divisore molto ampio $\mathcal{O}_S(1)$. $L \equiv aC_0 + bf$, dove $\equiv$ indica l'equivalenza numerica, $Num(S) = < C_0, f >$, f indica la classe numerica di una qualunque fibra di S e C_0 quella della sezione fondamentale di E.

<u>Per quali valori di a, b, e, g, d una tale S esiste</u> ?

Se $a = 1$, S può essere solamente:

- uno scroll cubico razionale ($a = 1, b = 2, e = 1, g = 0, d = 3$)
- uno scroll quintico ellittico ($a = 1, b = 2, e = -1, g = 1, d = 5$)

(si vedano [A], [L] e [L-P]).

Se $a = 2$, tali S non esistono (si vedano [E-S], [B-R] e [A-D-S]).

Se $a \geq 3$, usando i risultati di [H-R], combinati con quelli di [D-S] che limitano a 52 il grado di una superficie come S, non di tipo generale, si può dimostrare (si veda [A-T]) che ci sono solo 3 possibili superfici candidate, aventi i seguenti caratteri numerici:

I caso: $a = 7, b = -6, e = -2, g = 2, d = 14$;

II caso: $a = 3, 2b - 3e = 10, g = 26, d = 30$;

III caso: $a = 3, 2b - 3e = 13, g = 47, d = 39$.

Si congettura che la prima esista e le altre due no, ma il problema è ancora aperto.

References

[A-D-S] H.Abo-W.Decker-N.Sasakura: An elliptic conic bundle in $\mathbb{P}^4$ arising from a stable rank-3 vector bundle. Math. Z. **229** (4), 725-741 (1998).

[A-T] A.Alzati-A.Tortora: Surfaces in $\mathbb{P}^4$ fibered in cubics. Dattiloscritto.

[A] A.Aure: On surfaces in projective 4-space. Thesis, Oslo (1987).

[B-R] R.Braun-K.Ranestad: Conic bundle in projective fourspace. Algebraic Geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **200**, 331-339, Dekker, New York, 1998.

[D-S] W.Decker-F.O.Schreyer: Non-general type surfaces in $\mathbb{P}^4$: some remarks on bounds and constructions. J. Symbolic computation **29**, 545-583 (2000).

[E-S] P.Ellia-G.Sacchiero: Smooth surfaces of $\mathbb{P}^4$ ruled in conics. Algebraic Geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **200**, 49-62, Dekker, New York, 1998.

[H] R.Hartshorne: Algebraic Geometry. Springer Verlag, 1977.

[H-R] A.Holme-J.Roberts On the embeddings of Projective Varieties. Algebraic Geometry (Sundance, UT, 1986), 118–146, Lecture Notes in Math. **1311**, Springer, Berlin, 1988.

[L] A.Lanteri: On the existence of scrolls in $\mathbb{P}^4$. Rend. Accad. Lincei **69**, 223-227 (1980).

[L-P] A.Lanteri-M.Palleschi: Osservazioni sulla rigata geometrica ellittica di $\mathbb{P}^4$. Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **112** (2), 223-233 (1978).