ESISTENZA DI 3-FOLDS DI GRADO 9 IN $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$

Lo studio delle varietà lisce proiettive complesse, linearmente normali, di grado basso ma aventi dimensione arbitraria, ha ottenuto un notevole impulso in seguito ai risultati sulla classica teoria dell'aggiunzione ottenuti da A. Sommese e dai suoi collaboratori (si veda ad es. [B-S]).

L'approccio consiste usualmente in due fasi:

- elencazione di tutte le possibili varietà di dato grado, in base ai loro possibili caratteri numerici e alla loro struttura, dedotta dall'applicazione della teoria dell'aggiunzione (si veda ad es. [B-B-2]);

- studio dell'effettiva esistenza degli elementi che compaiono nelle liste così ottenute e dei corrispondenti schemi di Hilbert.

Mentre per i gradi inferiore od uguali ad 8 la classificazione è completa ed esaustiva grazie ai lavori di Ionescu (si vedano [I-1] e [I-2]) e al contributo di [A-D-S], per i gradi maggiori od uguali a 9 si hanno solo risultati parziali.

In [F-L-1], [F-L-2], [B-B-1], la prima fase dello studio è stata comunque portata a termine per i gradi, rispettivamente, $9, 10, 11$. Negli stessi tre lavori ed in [BE-F] e [B-FA], anche la seconda fase è stata sviluppata, ma con qualche lacuna.

In particolare è stato lasciato come problema aperto lo stabilire l'effettiva esistenza dei membri di una famiglia di 3-folds X, immersi come scroll in rette, del tipo $X = \mathbb{P}(\mathcal{E}_y)$, di grado $[c_1(\mathcal{E}_y)]^2 - c_2(\mathcal{E}_y) = 13 - y$, con $y = 2, 3, 4$, dove $\mathcal{E}_y$ è un fibrato vettoriale di rango 2 sulla superficie rigata razionale $\mathbf{F}_1$, (scoppiamento di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ in un suo punto) avente $c_1(\mathcal{E}_y) \equiv 3C_0 + 5f$ ($\equiv$ indica l'equivalenza numerica) e $c_2(\mathcal{E}_y) = 8 + y$.

In [A-B] il problema dell'esistenza di questi 3-folds è stato affrontato per $-2 \leq y \leq 3$. Resta ancora del tutto aperto il caso $y = 4$, corrispondente ad un eventuale 3-fold, immerso come scroll in rette, di grado 9 e genere sezionale 5 in $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$.

References

[A-D-S] H.Abo-W.Decker-N.Sasakura: An elliptic conic bundle in $\mathbb{P}^4$ arising from a stable rank-3 vector bundle. *Math. Z.* **229** (4), (1998) p.725–741.

[A-B] A.Alzati-G.M.Besana: "Criteria for very ampleness of rank 2 vector bundles over ruled surfaces". Dattiloscritto.

[B-S] M.Beltrametti-A.J.Sommese: "The adjunction theory of complex projective varieties" Expositions in Mathematics, vol 16, De Gruyter, 1995.

[BE-F] M.Bertolini-M.L.Fania: "Low Degree 3-folds in $\mathbb{P}^6$" *Math. Nachr.* **278** (1-2) (2005) p.17-33.

[B-B-1] G.Besana-A.Biancofiore: "Degree 11 Manifolds of Dimension Greater or equal to 3" *Forum Math.* **17** (5) (2005) p.711-733.

[B-B-2] G.Besana-A.Biancofiore: "Numerical Constraints for Embedded Projective Manifolds" *Forum Math.* **17** (4) (2005) p.613-636.

[B-FA] G.Besana-M.L.Fania: "The dimension of the Hilbert Scheme of Special Threefolds" *Comm. Alg.* **33** (10) (2005) p.3811-3829.

[F-L-1] L.Fania-E.L.Livorni: "Degree Nine Manifolds of Dimension Greater than or Equal to 3" *Math. Nachr.* **169** (1994) p.117-134.

[F-L-2] L.Fania-E.L.Livorni: "Degree ten manifolds of dimension n greater than or equal to 3" *Math. Nachr.* **188** (1997) p.79–108.

[I-1] P.Ionescu: "Embedded projective varieties of small invariants". Proceedings of the Week of Algebraic Geometry, Bucharest 1982; Springer L.N.M. **1056** (1984) p.142-186.

[I-2] P.Ionescu: "Embedded projective varieties of small invariants III" Algebraic Geometry, L'Aquila 1988; Springer L.N.M. **1417** (1990) p.138-154.