Il maggior problema aperto legato al mio intervento è la *Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer*. Durante il mio intervento dimostro un caso di rango zero della versione twistata per un carattere anticiclotomico di tale congettura. La congettura (non twistata) può essere enunciata nel caso di una curva ellittica definita sul campo dei numeri razionali in questo modo. Sia E una curva ellittica definita su $\mathbb{Q}$. Grazie al Teorema di Mordell-Weil (vedere ad esempio [5, Chapter VIII]), il gruppo $E(\mathbb{Q})$ dei punti $\mathbb{Q}$-razionali di E è finitamente generato. Grazie ai lavori sulle forme modulari ed alla congettura di Shimura-Taniyama-Weil provata da Wiles [7] e Taylor-Wiles [6], la funzione $L(E/\mathbb{Q}, s)$ di E su $\mathbb{Q}$ può essere prolungata analiticamente a tutto il piano complesso ed ha un punto di simmetria in $s = 1$.

Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer. Il rango di $E(\mathbb{Q})$ è uguale all'ordine di annullamento di $L(E/\mathbb{Q}, s)$ in $s = 1$.

Tale congettura è nota nel caso in cui l'ordine di annullamento di $L(E/\mathbb{Q}, s)$ in $s = 1$ sia zero o uno: si vedano a questo proposito gli articoli [4], [3], [2] e [1]. Analoghe congetture possono essere enunciate per varietà abeliane A definite su campi di numeri F e loro twist per caratteri del gruppo di Galois assoluto di F. Un problema nell'enunciare la congettura in termini generali è il fatto che la funzione $L(A/F, s)$ di A su F in generale non è neppure noto che si possa estendere analiticamente a tutto $\mathbb{C}$. E' nota invece la sua continuazione analitica nel caso in cui E sia una curva ellittica definita su $\mathbb{Q}$ e H sia ring class field di un'estensione quadratica immaginaria K di $\mathbb{Q}$. In questo caso, $E(H)_{\mathbb{C}} := E(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ è uno $\mathbb{Z}[G]$-modulo, dove $G = \mathrm{Gal}(H/K)$. Si fissi un carattere $\chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$ e siano $E(H)^{\chi} \subseteq E(H)_{\mathbb{C}}$ il χ-autospazio corrispondente a χ e $L(E/K, \chi, s)$ il twist della funzione $L(E/K, s)$ di E su K per il carattere χ.

Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer twistata. La dimensione del $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $E(H)^{\chi}$ è uguale all'ordine di annullamento di $L(E/K, \chi, s)$ in $s = 1$.

References

[1] Bertolini, M.; Darmon, H. Iwasawa's main conjecture for elliptic curves over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions. Ann. of Math. (2) 162 (2005), no. 1, 1–64.

[2] Gross, Benedict H. Kolyvagin's work on modular elliptic curves. L-functions and arithmetic (Durham, 1989), 235–256, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[3] Gross, Benedict H.; Zagier, Don B. Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225–320.

[4] Kolyvagin, V. A. Finiteness of $E(Q)$ and $Ш(E, Q)$ for a subclass of Weil curves. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (1988), no. 3, 522–540, 670–671; translation in Math. USSR-Izv. 32 (1989), no. 3, 523–541.

[5] Silverman, Joseph H. The arithmetic of elliptic curves. Corrected reprint of the 1986 original. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer-Verlag, New York, 1992

[6] Taylor, Richard; Wiles, Andrew. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 553–572.

[7] Wiles, Andrew Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.