Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

# Una caratterizzazione dei prodotti di spazi proiettivi

Gianluca Occhetta

Dipartimento di Matematica - Università di Trento

Workshop - Higher dimensional varieties
Milano 27 ottobre 2006

# Varietà di Fano



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà proiettiva complessa liscia

$$X \text{ varietà di Fano} \iff -K_X \text{ ampio}$$

# Varietà di Fano



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà proiettiva complessa liscia

$$X \text{ varietà di Fano} \iff -K_X \text{ ampio}$$

- $\rho_X = \dim N_1(X)$ numero di Picard di $X$

# Varietà di Fano


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ varietà proiettiva complessa liscia

$$X \text{ varietà di Fano} \iff -K_X \text{ ampio}$$

- $\rho_X = \dim N_1(X)$ numero di Picard di $X$
- $r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL\}$ indice di $X$

# Varietà di Fano



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà proiettiva complessa liscia

$$X \text{ varietà di Fano} \iff -K_X \text{ ampio}$$

- $\rho_X = \dim N_1(X)$ numero di Picard di $X$
- $r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL\}$ indice di $X$
- $i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m \quad C \text{ razionale } \}$, pseudoindice di $X$

# Varietà di Fano


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ varietà proiettiva complessa liscia

$$X \text{ varietà di Fano} \iff -K_X \text{ ampio}$$

- $\rho_X = \dim N_1(X)$ numero di Picard di $X$
- $r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL\}$ indice di $X$
- $i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m \quad C \text{ razionale } \}$, pseudoindice di $X$

$r_X$ e $i_X$ interi positivi $\leq \dim X + 1$

# Congettura di Mukai



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà di Fano liscia

# Congettura di Mukai



$X$ varietà di Fano liscia

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

**Congettura di Mukai**

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$$

# Congettura di Mukai



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà di Fano liscia

**Congettura di Mukai**

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$$

1990 Wiśniewski

- $i_X > \frac{\dim X + 2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$

# Congettura di Mukai



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$X$ varietà di Fano liscia

**Congettura di Mukai**

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$$

1990 Wiśniewski

- $i_X > \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$
- $r_X \geq \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$ tranne che se $X \simeq \mathbb{P}^{rx-1} \times \mathbb{P}^{rx-1}$

# Congettura di Mukai



$X$ varietà di Fano liscia

**Congettura di Mukai**

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$$

1990 Wiśniewski

- $i_X > \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$
- $r_X \geq \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$ tranne che se $X \simeq \mathbb{P}^{r_X-1} \times \mathbb{P}^{r_X-1}$

Congettura GM - Bonavero, Casagrande, Debarre, Druel 2002

**Congettura di Mukai generalizzata**

$\rho_X(i_X - 1) \leq \dim X$, e uguale sse $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X-1})^{\rho_X}$

# Congettura di Mukai



$X$ varietà di Fano liscia

**Congettura di Mukai**

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$$

1990 Wiśniewski

- $i_X > \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$
- $r_X \geq \frac{\dim X+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$ tranne che se $X \simeq \mathbb{P}^{r_X-1} \times \mathbb{P}^{r_X-1}$

Congettura GM - Bonavero, Casagrande, Debarre, Druel 2002

**Congettura di Mukai generalizzata**

$\rho_X(i_X - 1) \leq \dim X$, e uguale sse $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X-1})^{\rho_X}$

# La dimostrazione di Wiśniewski



## Famiglie di curve razionali

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

# La dimostrazione di Wiśniewski


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

Famiglia di curve razionali: $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ irriducibile

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

Famiglia di curve razionali: $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ irriducibile

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \pi \downarrow & & \\ V & & \end{array}$$

$$\mathrm{Locus}(V) = i(U),\ V_x = \pi(i^{-1}(x))$$

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

Famiglia di curve razionali: $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ irriducibile

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \pi \downarrow & & \\ V & & \end{array}$$

$$\mathrm{Locus}(V) = i(U),\ V_x = \pi(i^{-1}(x))$$

- $V$ non spezzante se $V$ è propria.

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

$V$ famiglia non spezzante, $C$ curva in $\mathrm{Locus}(V)_x$. Allora $[C] = a[V]$

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

$V$ famiglia non spezzante, $C$ curva in $\mathrm{Locus}(V)_x$. Allora $[C] = a[V]$

## Esistenza di curve razionali

# La dimostrazione di Wiśniewski


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

$V$ famiglia non spezzante, $C$ curva in $\mathrm{Locus}(V)_x$. Allora $[C] = a[V]$

## Esistenza di curve razionali

$\forall x \in X$ Fano $\exists$ curva razionale $C \ni x$ con $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.

# La dimostrazione di Wiśniewski


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

$V$ famiglia non spezzante, $C$ curva in $\mathrm{Locus}(V)_x$. Allora $[C] = a[V]$

## Esistenza di curve razionali

$\forall x \in X$ Fano $\exists$ curva razionale $C \ni x$ con $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.

$V^i \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ di grado anticanonico $\leq \dim X + 1$ sono un numero finito $\Rightarrow$ esiste $i$ t.c. $\mathrm{Locus}(V^i)$ domina $X$.

# La dimostrazione di Wiśniewski


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Stime dimensionali - I

$X$ liscia $V$ famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

## Equivalenza numerica - I

$V$ famiglia non spezzante, $C$ curva in $\mathrm{Locus}(V)_x$. Allora $[C] = a[V]$

## Esistenza di curve razionali

$\forall x \in X$ Fano $\exists$ curva razionale $C \ni x$ con $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.

$V^i \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ di grado anticanonico $\leq \dim X + 1$ sono un numero finito $\Rightarrow$ esiste $i$ t.c. $\mathrm{Locus}(V^i)$ domina $X$.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.
4. Si supponga $\rho \geq 2$ e sia $V'$ famiglia non spezzante indipendente da $V$ (e.g. curve di grado minimo in un raggio estremale).

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.
4. Si supponga $\rho \geq 2$ e sia $V'$ famiglia non spezzante indipendente da $V$ (e.g. curve di grado minimo in un raggio estremale).
5. $\dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V'_x)) = \langle [V'] \rangle$.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.
4. Si supponga $\rho \geq 2$ e sia $V'$ famiglia non spezzante indipendente da $V$ (e.g. curve di grado minimo in un raggio estremale).
5. $\dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V'_x)) = \langle [V'] \rangle$.
6. $x \in \mathrm{Locus}(V') \Longrightarrow \mathrm{Locus}(V_x) \cap \mathrm{Locus}(V'_x) \neq \emptyset$.

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.
4. Si supponga $\rho \geq 2$ e sia $V'$ famiglia non spezzante indipendente da $V$ (e.g. curve di grado minimo in un raggio estremale).
5. $\dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V'_x)) = \langle [V'] \rangle$.
6. $x \in \mathrm{Locus}(V') \Longrightarrow \mathrm{Locus}(V_x) \cap \mathrm{Locus}(V'_x) \neq \emptyset$.
7. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \cap \mathrm{Locus}(V'_x) \geq 2i_X - 2 - \dim X$

# La dimostrazione di Wiśniewski



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Dimostrazione

1. $V$ famiglia dominante di grado minimo per $X$.
2. Per le ipotesi su $i_X$ la famiglia $V$ è non spezzante.
3. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V_x)) = \langle [V] \rangle$.
4. Si supponga $\rho \geq 2$ e sia $V'$ famiglia non spezzante indipendente da $V$ (e.g. curve di grado minimo in un raggio estremale).
5. $\dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq i_X - 1$ e $N_1(\mathrm{Locus}(V'_x)) = \langle [V'] \rangle$.
6. $x \in \mathrm{Locus}(V') \Longrightarrow \mathrm{Locus}(V_x) \cap \mathrm{Locus}(V'_x) \neq \emptyset$.
7. $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \cap \mathrm{Locus}(V'_x) \geq 2i_X - 2 - \dim X$
8. Se $i_X > \frac{\dim X + 2}{2}$ contraddizione.

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Osservazione

# Il caso al bordo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Osservazione

Nel caso al bordo ($i_X = \frac{\dim X+2}{2}$)

# Il caso al bordo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Osservazione

Nel caso al bordo ($i_X = \frac{\dim X+2}{2}$)

- $V, V'$ famiglie non spezzanti.

# Il caso al bordo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Osservazione

Nel caso al bordo ($i_X = \frac{\dim X+2}{2}$)

- $V, V'$ famiglie non spezzanti.
- $V, V'$ dominanti.

# Il caso al bordo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Osservazione

Nel caso al bordo ($i_X = \frac{\dim X+2}{2}$)

- $V, V'$ famiglie non spezzanti.
- $V, V'$ dominanti.
- $(-K_X \cdot V - 1) + (-K_X \cdot V' - 1) = \dim X$

# Caratterizzazione di prodotti


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Teorema

Una varietà complessa proiettiva liscia $X$ di dimensione $n$ è isomorfa a $\mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$

se e solo se

$\exists V^1, \ldots, V^k$ non spezzanti e dominanti con $\sum -K_X \cdot V^k = n + k$ tali che $\dim\langle [V^1], \ldots, [V^k] \rangle = k$ in $N_1(X)$.

# Caratterizzazione di prodotti


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


**Teorema**

Una varietà complessa proiettiva liscia $X$ di dimensione $n$ è isomorfa a $\mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$

se e solo se

$\exists V^1, \ldots, V^k$ non spezzanti e dominanti con $\sum -K_X \cdot V^k = n+k$ tali che $\dim\langle [V^1], \ldots, [V^k] \rangle = k$ in $N_1(X)$.

Basato su

**Teorema (C-M-SB, K)**

Una varietà complessa proiettiva liscia $X$ di dimensione $n$ è isomorfa a $\mathbb{P}^n$ se e solo se $\exists V$ non spezzante e dominante tale che $-K_X \cdot V = n+1$.

# Ingredienti

Prodotti


Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

# Ingredienti



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

## Definition

Locus$(V^1, \ldots, V^k)_Y$ è l'insieme degli $x \in X$ t.c. esiste $C_1, \ldots, C_k$ con le proprietà seguenti:

- $C_i$ appartiene alla famiglia $V^i$.
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ and $x \in C_k$.

# Ingredienti



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

## Definition

Locus$(V^1, \ldots, V^k)_Y$ è l'insieme degli $x \in X$ t.c. esiste $C_1, \ldots, C_k$ con le proprietà seguenti:

- $C_i$ appartiene alla famiglia $V^i$.
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ and $x \in C_k$.

## Stime dimensionali - II

# Ingredienti



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

## Definition

Locus$(V^1, \ldots, V^k)_Y$ è l'insieme degli $x \in X$ t.c. esiste $C_1, \ldots, C_k$ con le proprietà seguenti:

- $C_i$ appartiene alla famiglia $V^i$.
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ and $x \in C_k$.

## Stime dimensionali - II

$X$ liscia, $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti le cui classi sono linearmente independenti in $N_1(X)$.

# Ingredienti



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

## Definition

$\mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y$ è l'insieme degli $x \in X$ t.c. esiste $C_1, \ldots, C_k$ con le proprietà seguenti:

- $C_i$ appartiene alla famiglia $V^i$.
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ and $x \in C_k$.

## Stime dimensionali - II

$X$ liscia, $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti le cui classi sono linearmente independenti in $N_1(X)$.

- $\dim \mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \geq \sum_1^k (-K_X \cdot V^i) + \dim Y - k$ (se $\neq \emptyset$).

# Ingredienti



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti di curve razionali, $Y \subset X$ chiuso.

## Definition

$\mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y$ è l'insieme degli $x \in X$ t.c. esiste $C_1, \ldots, C_k$ con le proprietà seguenti:

- $C_i$ appartiene alla famiglia $V^i$.
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ and $x \in C_k$.

## Stime dimensionali - II

$X$ liscia, $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti le cui classi sono linearmente independenti in $N_1(X)$.

- $\dim \mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \geq \sum_1^k (-K_X \cdot V^i) + \dim Y - k$ (se $\neq \emptyset$).

## Equivalenza numerica - II


Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Equivalenza numerica - II

$Y \subset X$ chiuso, $V$ famiglia non spezzante, $C \subset \mathrm{Locus}(V)_Y$ curva.


Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Equivalenza numerica - II

$Y \subset X$ chiuso, $V$ famiglia non spezzante, $C \subset \mathrm{Locus}(V)_Y$ curva.

$$C \equiv aC_Y + bC_V \qquad a \geq 0$$


Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Equivalenza numerica - II


Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

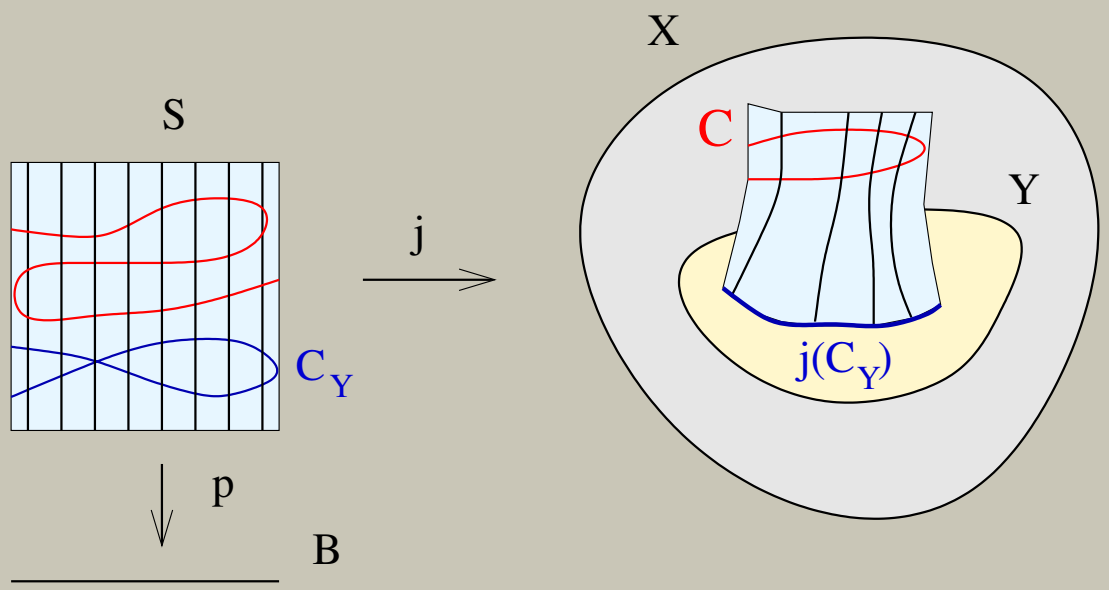
Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$Y \subset X$ chiuso, $V$ famiglia non spezzante, $C \subset \mathrm{Locus}(V)_Y$ curva.

$$C \equiv aC_Y + bC_V \qquad a \geq 0$$



# Cono delle curve



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

# Cono delle curve


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

# Cono delle curve


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

# Cono delle curve



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

quindi $X = \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x$.

# Cono delle curve



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

quindi $X = \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x$.

$C$ curva effettiva in $X$; per Equivalenza numerica II per ogni permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ $\exists \lambda_{i(1)}, \ldots, \lambda_{i(k)}$, con $\lambda_{i(1)} \geq 0$ t.c.

$$[C] = \lambda_{i(1)}[V^{i(1)}] + \cdots + \lambda_{i(k)}[V^{i(k)}]$$

# Cono delle curve



## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

quindi $X = \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x$.

$C$ curva effettiva in $X$; per Equivalenza numerica II per ogni permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ $\exists \lambda_{i(1)}, \ldots, \lambda_{i(k)}$, con $\lambda_{i(1)} \geq 0$ t.c.

$$[C] = \lambda_{i(1)}[V^{i(1)}] + \cdots + \lambda_{i(k)}[V^{i(k)}]$$

$[V^1], \ldots, [V^k]$ indipendenti in $N_1(X) \Rightarrow$ decomposizione unica.

# Cono delle curve


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Passo 1

$NE(X) = \langle [V^1], \ldots, [V_k] \rangle$.

$\forall x \in X$ e $\forall$ permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ di $1, \ldots, k$

$$\dim \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x \geq -\sum K_X \cdot V^i - k = n.$$

quindi $X = \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \ldots, V^{i(k)})_x$.

$C$ curva effettiva in $X$; per Equivalenza numerica II per ogni permutazione $i(1), \ldots, i(k)$ $\exists \lambda_{i(1)}, \ldots, \lambda_{i(k)}$, con $\lambda_{i(1)} \geq 0$ t.c.

$$[C] = \lambda_{i(1)}[V^{i(1)}] + \cdots + \lambda_{i(k)}[V^{i(k)}]$$

$[V^1], \ldots, [V^k]$ indipendenti in $N_1(X) \Rightarrow$ decomposizione unica.

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbb{R}_+[V^1] + \cdots + \mathbb{R}_+[V^k]$$

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

## Passo 2

Contrazioni di $X$

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

# Contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

$$\sigma =< R_{i_1} \ldots R_{i_l} > \text{ faccia estremale}$$

# Contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

$\sigma =< R_{i_1} \ldots R_{i_l} >$ faccia estremale

$\sigma^{\perp}$ faccia generata dai raggi non in $\sigma$

## Passo 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

$\sigma =< R_{i_1} \ldots R_{i_l} >$ faccia estremale

$\sigma^{\perp}$ faccia generata dai raggi non in $\sigma$

$\varphi_\sigma$ contrazione di $\sigma$, $G_\sigma$ fibra di $\varphi_\sigma$, $x \in G_\sigma$

PRODOTTI

MOTIVAZIONI
CONGETTURA DI MUKAI
IL TEOREMA DI WIŚNIEWSKI
RISULTATO

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE
TECNICAGLIA
1 - CONO
2 - CONTRAZIONI
3 - P-BUNDLES
4 - SPAZIO D'ARRIVO
5 - CONCLUSIONE

APPLICAZIONI
VARIETÀ DI FANO SENZA CONTRAZIONI BIRAZIONALI
UN TEOREMA DI ARAUJO

## PASSO 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

$\sigma =< R_{i_1} \ldots R_{i_l} >$ faccia estremale
$\sigma^{\perp}$ faccia generata dai raggi non in $\sigma$
$\varphi_\sigma$ contrazione di $\sigma$, $G_\sigma$ fibra di $\varphi_\sigma$, $x \in G_\sigma$

$G_\sigma \supseteq \mathrm{Locus}(V^{i_1}, \ldots, V^{i_l})_x$,

$$\dim G_\sigma \geq -\sum_{j=1,\ldots,l} K_X \cdot V^{i_j} - l = \sum_{j=1,\ldots,l} n(i_j)$$

PRODOTTI

MOTIVAZIONI
CONGETTURA DI MUKAI
IL TEOREMA DI WIŚNIEWSKI
RISULTATO

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE
TECNICAGLIA
1 - CONO
2 - CONTRAZIONI
3 - P-BUNDLES
4 - SPAZIO D'ARRIVO
5 - CONCLUSIONE

APPLICAZIONI
VARIETÀ DI FANO SENZA CONTRAZIONI BIRAZIONALI
UN TEOREMA DI ARAUJO

## PASSO 2

### Contrazioni di $X$

$\mathrm{NE}(X)$ è $k-$dimensionale e $\mathrm{NE}(X) = \langle R_1, \ldots, R_k \rangle$.

$\sigma =< R_{i_1} \ldots R_{i_l} >$ faccia estremale
$\sigma^{\perp}$ faccia generata dai raggi non in $\sigma$
$\varphi_\sigma$ contrazione di $\sigma$, $G_\sigma$ fibra di $\varphi_\sigma$, $x \in G_\sigma$

$G_\sigma \supseteq \mathrm{Locus}(V^{i_1}, \ldots, V^{i_l})_x$,

$$\dim G_\sigma \geq -\sum_{j=1,\ldots,l} K_X \cdot V^{i_j} - l = \sum_{j=1,\ldots,l} n(i_j)$$

$G_{\sigma^\perp}$ fibra di $\varphi_{\sigma^\perp}$ che passa per $x$;

$$\dim G_{\sigma^\perp} \geq -\sum_{j=l+1,\ldots,k} K_X \cdot V^{i_j} - (k-l) = \sum_{j=l+1,\ldots,k} n(i_j).$$

# Contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset$$

# Contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_{\sigma} \cap G_{\sigma^{\perp}}) = 0$$

# Contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_{\sigma} \cap G_{\sigma^{\perp}}) = 0 \Rightarrow \dim G_{\sigma} + \dim G_{\sigma^{\perp}} \leq n,$$

# Contrazioni


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_{\sigma} \cap G_{\sigma^{\perp}}) = 0 \Rightarrow \dim G_{\sigma} + \dim G_{\sigma^{\perp}} \leq n,$$

$$n = \sum_{j=1,\ldots,k} n(i_j) \leq \dim G_{\sigma} + \dim G_{\sigma^{\perp}} \leq n,$$

# Contrazioni


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_{\sigma} \cap G_{\sigma^{\perp}}) = 0 \Rightarrow \dim G_{\sigma} + \dim G_{\sigma^{\perp}} \leq n,$$

$$n = \sum_{j=1,\dots,k} n(i_j) \leq \dim G_{\sigma} + \dim G_{\sigma^{\perp}} \leq n,$$

$$\dim G_{\sigma} = \sum_{j=1,\dots,l} n(i_j).$$

# Contrazioni


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_\sigma \cap G_{\sigma^\perp}) = 0 \Rightarrow \dim G_\sigma + \dim G_{\sigma^\perp} \leq n,$$

$$n = \sum_{j=1,\dots,k} n(i_j) \leq \dim G_\sigma + \dim G_{\sigma^\perp} \leq n,$$

$$\dim G_\sigma = \sum_{j=1,\dots,l} n(i_j).$$

Se $G_\sigma$ generale, allora $G_\sigma$ è liscia e soddisfa le ipotesi del teorema $\Rightarrow$ per induzione $G_\sigma \simeq \mathbb{P}^{n(i_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(i_l)}$.

# Contrazioni

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo

$$\sigma \cap \sigma^{\perp} = \emptyset \Rightarrow \dim(G_\sigma \cap G_{\sigma^\perp}) = 0 \Rightarrow \dim G_\sigma + \dim G_{\sigma^\perp} \leq n,$$

$$n = \sum_{j=1,\dots,k} n(i_j) \leq \dim G_\sigma + \dim G_{\sigma^\perp} \leq n,$$

$$\dim G_\sigma = \sum_{j=1,\dots,l} n(i_j).$$

Se $G_\sigma$ generale, allora $G_\sigma$ è liscia e soddisfa le ipotesi del teorema $\Rightarrow$ per induzione $G_\sigma \simeq \mathbb{P}^{n(i_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(i_l)}$.

Ogni contrazione estremale di $X$ è equidimensionale e la sua fibra generale è un prodotto di spazi proiettivi.

# Fattorizzare le contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 3

Fattorizzare le contrazioni

# Fattorizzare le contrazioni



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 3

Fattorizzare le contrazioni

$\Sigma$ faccia propria di $\mathrm{NE}(X)$, $\sigma$ sottofaccia di codimensione uno.

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

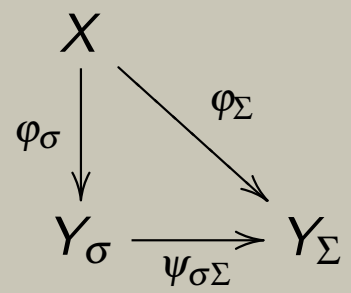
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Passo 3

### Fattorizzare le contrazioni

$\Sigma$ faccia propria di $\mathrm{NE}(X)$, $\sigma$ sottofaccia di codimensione uno.



Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

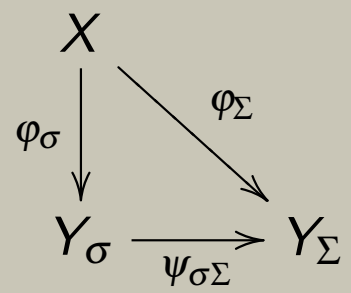
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


## Passo 3

### Fattorizzare le contrazioni

$\Sigma$ faccia propria di $\mathrm{NE}(X)$, $\sigma$ sottofaccia di codimensione uno.




Allora $\psi_{\sigma\Sigma} : Y_\sigma \to Y_\Sigma$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codimensione due in $Y_\Sigma$.

Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 4

Identificare lo spazio d'arrivo

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 4

### Identificare lo spazio d'arrivo

$\Sigma$ faccia di $\mathrm{NE}(X)$ di dimensione $\rho_X - 1$. Allora $Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}$.

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 4

### Identificare lo spazio d'arrivo

$\Sigma$ faccia di $\mathrm{NE}(X)$ di dimensione $\rho_X - 1$. Allora $Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}$.
$\sigma$ sottofaccia di $\Sigma$ di codimensione uno, $\tau = \langle \sigma, \Sigma^\perp \rangle$.

Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

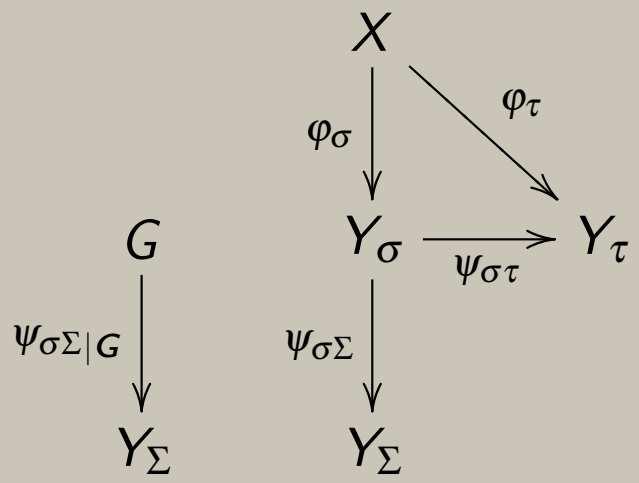
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 4

### Identificare lo spazio d'arrivo

$\Sigma$ faccia di $\mathrm{NE}(X)$ di dimensione $\rho_X - 1$. Allora $Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}$.
$\sigma$ sottofaccia di $\Sigma$ di codimensione uno, $\tau = \langle \sigma, \Sigma^\perp \rangle$.



Prodotti

Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato

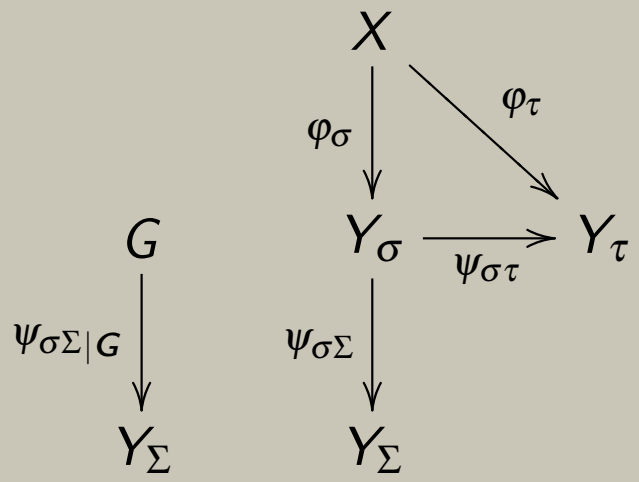
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione

Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

## Passo 4

### Identificare lo spazio d'arrivo

$\Sigma$ faccia di $\mathrm{NE}(X)$ di dimensione $\rho_X - 1$. Allora $Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}$.
$\sigma$ sottofaccia di $\Sigma$ di codimensione uno, $\tau = \langle \sigma, \Sigma^\perp \rangle$.




dove $G$ è la fibra generica di $\psi_{\sigma\tau}$

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma}$ non è ramificata fuori da un sottoinsieme di codim 2.

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma}$ non è ramificata fuori da un sottoinsieme di codim 2.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ ha singolarità quoziente.

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma}$ non è ramificata fuori da un sottoinsieme di codim 2.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ ha singolarità quoziente.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ è liscia.

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma}$ non è ramificata fuori da un sottoinsieme di codim 2.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ ha singolarità quoziente.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ è liscia.

$$\Downarrow$$

$$Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}.$$

# Spazio d'arrivo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

- $\psi_{\sigma\Sigma}$ è un fibrato proiettivo fuori da un sottoinsieme di codim 2
- $G$ è estremale in $\mathrm{NE}(Y_\sigma)$

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma}$ non è ramificata fuori da un sottoinsieme di codim 2.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ ha singolarità quoziente.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma$ è liscia.

$$\Downarrow$$

$Y_\Sigma \simeq \mathbb{P}^{\dim Y_\Sigma}$.

$$\Downarrow$$

$\psi_{\sigma\Sigma} : G \to Y_\Sigma$ è un isomorfismo.

# Conclusione


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \varphi_\sigma \downarrow & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

# Conclusione


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

$\varphi_{\Sigma^\perp}$ è un fibrato proiettivo.

# Conclusione



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

$\varphi_{\Sigma^\perp}$ è un fibrato proiettivo.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è liscia.

# Conclusione


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

$\varphi_{\Sigma^\perp}$ è un fibrato proiettivo.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è liscia.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è un prodotto di spazi proiettivi.

# Conclusione


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

$\varphi_{\Sigma^\perp}$ è un fibrato proiettivo.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è liscia.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è un prodotto di spazi proiettivi.

$\Downarrow$

$X$ è un prodotto di spazi proiettivi.

# Conclusione


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma^\perp}} & Y_{\Sigma^\perp} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \\ Y_\Sigma & & \end{array}$$

$\varphi_{\Sigma^\perp}$ è un fibrato proiettivo.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è liscia.

$\Downarrow$

$Y_{\Sigma^\perp}$ è un prodotto di spazi proiettivi.

$\Downarrow$

$X$ è un prodotto di spazi proiettivi.

# Varietà di Fano senza contrazioni birazionali


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ Fano con sole contrazioni fibrate vale GM.

# Varietà di Fano senza contrazioni birazionali


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ Fano con sole contrazioni fibrate vale GM.

La descrizione del caso al bordo viene dal teorema.

# Varietà di Fano senza contrazioni birazionali


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ Fano con sole contrazioni fibrate vale GM.

La descrizione del caso al bordo viene dal teorema.

Caso Particolare: $X$ varietà di Fano di pseudoindice $i_X \geq 2$ che ha solo fibrazioni e tale che $\rho_X \geq \dim X$.

# Varietà di Fano senza contrazioni birazionali


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$X$ Fano con sole contrazioni fibrate vale GM.

La descrizione del caso al bordo viene dal teorema.

Caso Particolare: $X$ varietà di Fano di pseudoindice $i_X \geq 2$ che ha solo fibrazioni e tale che $\rho_X \geq \dim X$.

$$\Downarrow$$

$$X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1.$$

# Un teorema di Araujo



Motivazioni
Congettura di Mukai
Il teorema di Wiśniewski
Risultato
Idea della dimostrazione
Tecnicaglia
1 - Cono
2 - Contrazioni
3 - P-bundles
4 - Spazio d'arrivo
5 - Conclusione
Applicazioni
Varietà di Fano senza contrazioni birazionali
Un teorema di Araujo

$V$ famiglia non spezzante e dominante per $X$, $x \in X$, $\mathscr{C}_x$ sottovarietà di $\mathbb{P}(T_x X)$ delle direzioni tangenti alle curve di $V$ che passano per $x$.

# Un teorema di Araujo


Prodotti

Motivazioni

Congettura di Mukai

Il teorema di Wiśniewski

Risultato

Idea della dimostrazione

Tecnicaglia

1 - Cono

2 - Contrazioni

3 - P-bundles

4 - Spazio d'arrivo

5 - Conclusione

Applicazioni

Varietà di Fano senza contrazioni birazionali

Un teorema di Araujo


$V$ famiglia non spezzante e dominante per $X$, $x \in X$, $\mathscr{C}_x$ sottovarietà di $\mathbb{P}(T_x X)$ delle direzioni tangenti alle curve di $V$ che passano per $x$.

**Teorema (Araujo)**

Se per un generico $x \in X$ $\mathscr{C}_x$ è un sottospazio lineare, allora esiste un aperto $X^0 \subset X$ e un fibrato proiettivo $\varphi : X^0 \to T$

# Un teorema di Araujo



$V$ famiglia non spezzante e dominante per $X$, $x \in X$, $\mathscr{C}_x$ sottovarietà di $\mathbb{P}(T_x X)$ delle direzioni tangenti alle curve di $V$ che passano per $x$.

**Teorema (Araujo)**

Se per un generico $x \in X$ $\mathscr{C}_x$ è un sottospazio lineare, allora esiste un aperto $X^0 \subset X$ e un fibrato proiettivo $\varphi : X^0 \to T$

**Teorema (Araujo)**

Sia $X$ una varietà complessa proiettiva liscia di dimensione $n$ con $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti e dominanti t.c. per un punto generico le sottovarietà delle direzioni tangenti in $x$ alle curve di $V^k$ sono sottospazi lineari di dimensione $n(i) - 1$ con $\sum n(i) = n$. Allora $X \simeq \mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$

# Un teorema di Araujo



$V$ famiglia non spezzante e dominante per $X$, $x \in X$, $\mathscr{C}_x$ sottovarietà di $\mathbb{P}(T_x X)$ delle direzioni tangenti alle curve di $V$ che passano per $x$.

**Teorema (Araujo)**

Se per un generico $x \in X$ $\mathscr{C}_x$ è un sottospazio lineare, allora esiste un aperto $X^0 \subset X$ e un fibrato proiettivo $\varphi : X^0 \to T$

**Teorema (Araujo)**

Sia $X$ una varietà complessa proiettiva liscia di dimensione $n$ con $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti e dominanti t.c. per un punto generico le sottovarietà delle direzioni tangenti in $x$ alle curve di $V^k$ sono sottospazi lineari di dimensione $n(i) - 1$ con $\sum n(i) = n$. Allora $X \simeq \mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$