Contrazioni estremali di varietà lisce

Nuovi fenomeni in dimensione alta

Gianluca Occhetta

Dipartimento di Matematica
Università di Trento

Giugno 2005

Sommario

1. Contrazioni estremali
   - Definizioni ed esempi
   - Motivazioni
2. Risultati in dimensione bassa
   - Superfici
   - Varietà di dimensione tre
3. Jumping fibers in dimensione quattro
4. Un nuovo problema in dimensione cinque
   - Irriducibilità della fibra generica
   - Idea della dimostrazione (versione light)
   - Esempio

Sommario

1. Contrazioni estremali
   - Definizioni ed esempi
   - Motivazioni
2. Risultati in dimensione bassa
   - Superfici
   - Varietà di dimensione tre
3. Jumping fibers in dimensione quattro
4. Un nuovo problema in dimensione cinque
   - Irriducibilità della fibra generica
   - Idea della dimostrazione (versione light)
   - Esempio

Sommario

1. Contrazioni estremali
   - Definizioni ed esempi
   - Motivazioni
2. Risultati in dimensione bassa
   - Superfici
   - Varietà di dimensione tre
3. Jumping fibers in dimensione quattro
4. Un nuovo problema in dimensione cinque
   - Irriducibilità della fibra generica
   - Idea della dimostrazione (versione light)
   - Esempio

Sommario

1. Contrazioni estremali
   - Definizioni ed esempi
   - Motivazioni
2. Risultati in dimensione bassa
   - Superfici
   - Varietà di dimensione tre
3. Jumping fibers in dimensione quattro
4. Un nuovo problema in dimensione cinque
   - Irriducibilità della fibra generica
   - Idea della dimostrazione (versione light)
   - Esempio

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \backslash E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Contrazioni

X varietà proiettiva complessa liscia

Contrazione: Mappa propria $\varphi : X \to W$ a fibre connesse su una varietà normale

φ è una contrazione estremale o di Fano-Mori se $-K_X$ è φ-ampio

$E(\varphi)$ più piccolo sottoinsieme di X con φ isomorfismo su $X \setminus E(\varphi)$.

- φ è di tipo fibrato se $E(\varphi) = X$;
- φ divisoriale se codim $E(\varphi) = 1$;
- φ è piccola se codim $E(\varphi) \geq 2$;
- φ è elementare se $\rho(X/W) = 1$.

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Esempi

Contrazioni di tipo fibrato

- *W liscia, $\mathscr{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.*
- *X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.*

Contrazione birazionale divisoriale

- *W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.*

Contrazione piccola

- *$\mathscr{E} = \mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{E})$; $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ a un punto.*

Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \qquad \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq \qquad N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \qquad \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq \qquad N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} =$$

Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{\{\text{1-cicli effettivi}\}} \subset N_1(X)$$

Teorema del cono

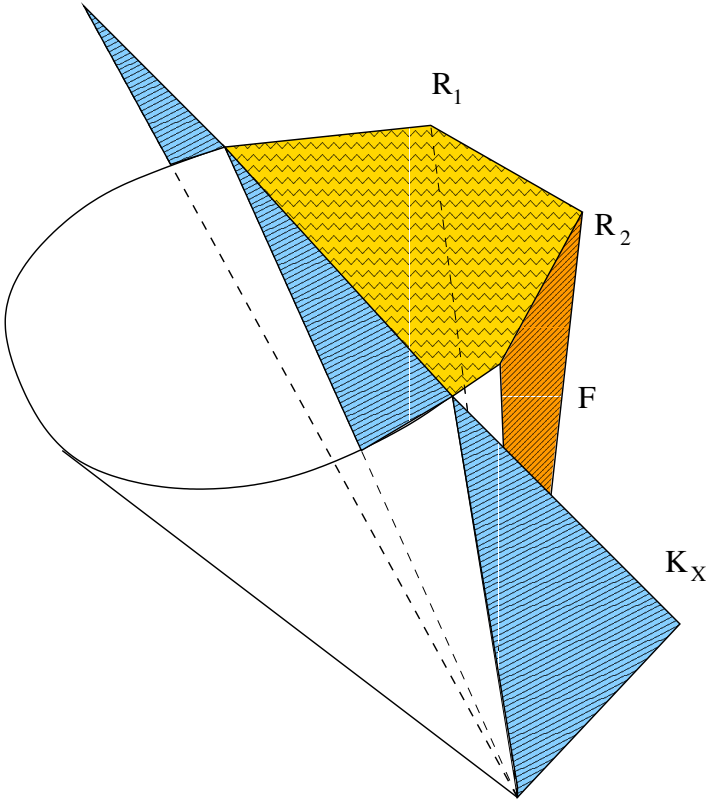
$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_+[C_j]$$

Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_+[C_j]$$

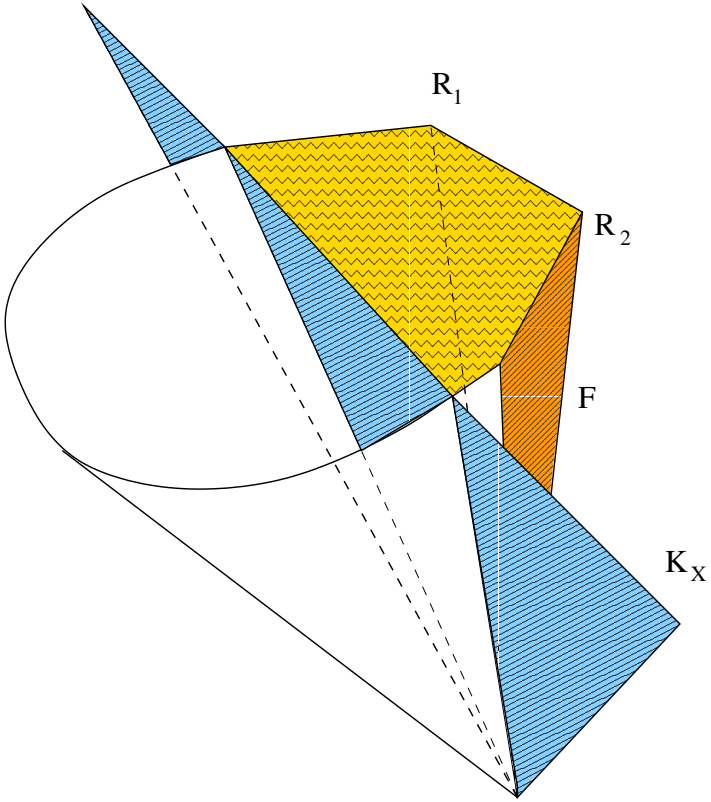


Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_+[C_j]$$

C_j razionale irriducibile ridotta
$0 < -K_X \cdot C_j \leq \dim X + 1.$



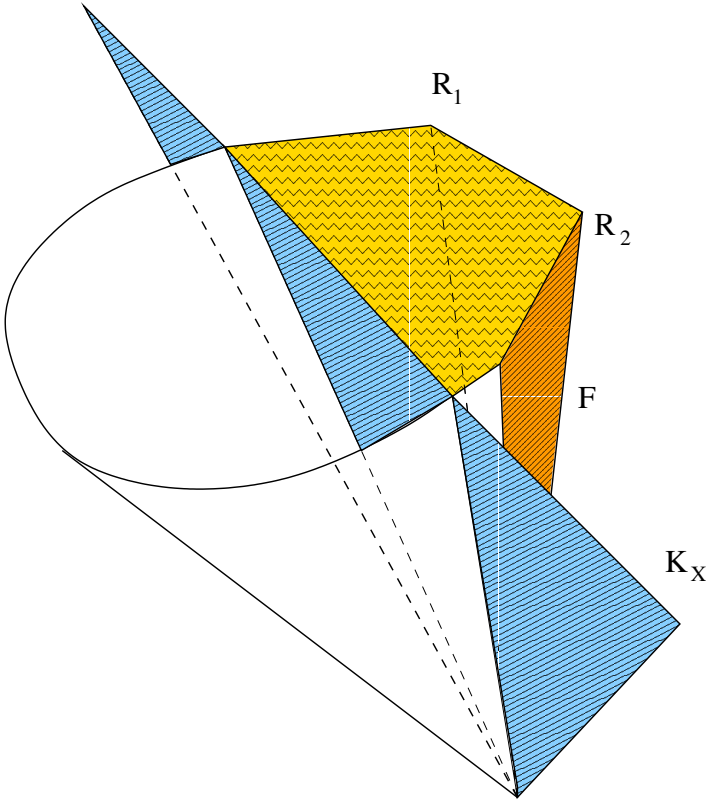
Teorema del cono

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)} \simeq N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_+[C_j]$$

C_j razionale irriducibile ridotta
$0 < -K_X \cdot C_j \leq \dim X + 1.$

$\mathbb{R}_+[C_j]$ discreti in
$\{Z \in N_1(X) \mid K_X \cdot Z < -\varepsilon\}$



Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Dal Teorema di contrazione e dal Teorema di razionalità segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Dal Teorema di contrazione e dal Teorema di razionalità segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

1. $\forall$ C curva irriducibile su X, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F_X$.

Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Dal Teorema di contrazione e dal Teorema di razionalità segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

1. $\forall$ C curva irriducibile su X, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F_X$.
2. φ ha fibre connesse.

Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Dal Teorema di contrazione e dal Teorema di razionalità segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

1. $\forall$ C curva irriducibile su X, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F_X$.
2. φ ha fibre connesse.
3. φ è definita da $|m(K_X + \tau L)|$, con L φ-ampio e $r \geq 1$.

Teorema di contrazione

F_X faccia estremale di X

Dal Teorema di contrazione e dal Teorema di razionalità segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

1. $\forall$ C curva irriducibile su X, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F_X$.
2. φ ha fibre connesse.
3. φ è definita da $|m(K_X + \tau L)|$, con L φ-ampio e $r \geq 1$.

φ è una contrazione estremale e si dice che $K_X + \tau L$ è un divisore che supporta la contrazione φ.

Contrazioni e problemi di classificazione

1. Modelli minimali:
   Trovare in una classe di varietà (algebriche proiettive complesse) birazionali tra loro un oggetto semplice.

2. Varietà di Fano:
   Varietà con anticanonico ampio (e quindi cono delle curve poliedrale)

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \to *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \to *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \longrightarrow *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \longrightarrow *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \longrightarrow *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \longrightarrow *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Contrazioni elementari

Ci sono tre tipi di contrazioni elementari di superfici:

- Fibrate
  1. $\mathbb{P}^1$-bundle su curva liscia;
  2. $\mathbb{P}^2 \longrightarrow *$.
- Birazionali
  1. Contrazione di una (-1) curva.

Modelli minimali

S

Modelli minimali

$$\begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ K_S \text{ nef ?} \end{array}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d] & \\ K_S \text{ nef ?} \arrow[r, "\text{Sì}"] & S \text{ minimale} \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d] \\ \varphi : S \to S' & K_S \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{No}"'] \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[d] \\
\varphi : S \arrow[r] & S' & K_S \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{No}"'] \\
 & \varphi \arrow[ur, "\text{fibrata}"] &
\end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[d] \\
\varphi : S \to S' \arrow[dr] & & K_S \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{No}"'] \\
 & \varphi \arrow[ur, "\text{fibrata}"] & S \simeq \begin{cases} \text{rigata} \\ \mathbb{P}^2 \end{cases}
\end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[d] \\
\varphi : S \to S' \arrow[dr] & & K_S \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{No}"'] \\
 & \varphi \arrow[ur, "\text{fibrata}"] \arrow[dr, "\text{divisoriale}"'] & \\
 & & S = S'
\end{tikzcd}$$

Superfici di del Pezzo

$\varphi : S \to S'$ contrazione di (-1)-curva

Superfici di del Pezzo

$$\varphi : S \to S' \text{ contrazione di } (-1)\text{-curva}$$

$$-K_S \text{ ampio} \Longrightarrow -K_{S'} \text{ ampio}$$

Superfici di del Pezzo

$$\varphi : S \to S' \text{ contrazione di } (-1)\text{-curva}$$

$$-K_S \text{ ampio} \Longrightarrow -K_{S'} \text{ ampio}$$

Quindi una volta esaurite le (-1) curve si arriva a $\mathbb{P}^2$ o a una superficie con due strutture di $\mathbb{P}^1$-bundle (una quadrica).

Superfici di del Pezzo

$$\varphi : S \to S' \text{ contrazione di } (-1)\text{-curva}$$

$$-K_S \text{ ampio} \Longrightarrow -K_{S'} \text{ ampio}$$

Quindi una volta esaurite le (-1) curve si arriva a $\mathbb{P}^2$ o a una superficie con due strutture di $\mathbb{P}^1$-bundle (una quadrica).

Le superfici di del Pezzo si ottengono per scoppiamenti successivi di tali superfici.

Superfici di del Pezzo

$$\varphi : S \to S' \text{ contrazione di } (-1)\text{-curva}$$

$$-K_S \text{ ampio} \Longrightarrow -K_{S'} \text{ ampio}$$

Quindi una volta esaurite le (-1) curve si arriva a $\mathbb{P}^2$ o a una superficie con due strutture di $\mathbb{P}^1$-bundle (una quadrica).

Le superfici di del Pezzo si ottengono per scoppiamenti successivi di tali superfici.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su superfici lisce;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su curve lisce;
  3. $X_3 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Birazionali
  1. Scoppiamenti di punti e curve lisce in varietà lisce;
  2. Divisori ($\mathbb{P}^2$, $\mathbb{Q}^2$,$\mathbb{S}_2$) a punti singolari;

Modelli minimali

X

Modelli minimali

$$X$$
$$\downarrow$$
$$K_X \text{ nef ?}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & \\ K_X \text{ nef ?} \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ \varphi : X \to X' & K_X \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{NO}"'] \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ \varphi : X \to X' & K_X \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{NO}"'] \\ & \varphi \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] \\
\varphi : X \to X' \arrow[dr] & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \\
 & \varphi \arrow[r, "Fibrata"] & X \text{ unirigata}
\end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ \varphi : X \to X' & K_X \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{NO}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \varphi \arrow[dl, "\text{Piccola}"'] \arrow[dr, "\text{Divisoriale}"] & \\ & & X = X' \end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' \arrow[dddr] & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[rr, "\text{SI}"] & & X \text{ minimale} \\
 & & \varphi \arrow[rr, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & & X \text{ unirigata} \\
 & X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d] & \\
\varphi : X \to X' & K_X \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} \\
 & \varphi \arrow[u, ""] \arrow[r, "\text{Fibrata}"] \arrow[dl, "\text{Piccola}"'] \arrow[dr, "\text{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} \\
X \arrow[r, dashed, "\text{Flip}"'] & X^+ & X = X'
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d] & \\
\varphi : X \to X' & K_X \text{ nef ?} \arrow[l, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] \arrow[dl] & X \text{ minimale} \\
 & \varphi \arrow[r, "\text{Fibrata}"] \arrow[dl, "\text{Piccola}"'] \arrow[dr, "\text{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} \\
X \arrow[r, dashed, "\text{Flip}"'] & X^+ & X = X'
\end{tikzcd}$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} & \\
 & & \varphi \arrow[ul] \arrow[r, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} & \\
 & X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} & \\
 & & \varphi \arrow[ul] \arrow[r, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} & \\
 & X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' \arrow[dddrr] & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[rr, "\text{SI}"] & & X \text{ minimale} \\
 & & & & \\
 & & \varphi \arrow[rr, "Fibrata"] \arrow[dl, "Piccola"'] \arrow[dr, "Divisoriale"] & & X \text{ unirigata} \\
 & X \arrow[r, dashed, "Flip"'] & X^+ & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} & \\
 & & \varphi \arrow[ull] \arrow[r, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} & \\
X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} & \\
 & & \varphi \arrow[ull] \arrow[r, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} & \\
 & X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Modelli minimali

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d] & & \\
\varphi : X \to X' & & K_X \text{ nef ?} \arrow[ll, "\text{NO}"'] \arrow[r, "\text{SI}"] & X \text{ minimale} & \\
 & & \varphi \arrow[ull] \arrow[r, "\textit{Fibrata}"] \arrow[dl, "\textit{Piccola}"'] \arrow[dr, "\textit{Divisoriale}"] & X \text{ unirigata} & \\
X \arrow[r, dashed, "\textit{Flip}"'] & X^+ & & X = X' &
\end{tikzcd}
$$

Tre-varietà di Fano

- Se X ha una contrazione divisore a punto, allora ha anche una contrazione elementare di tipo conic bundle.
- $\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio

$$-K_X \text{ ampio} \Longrightarrow \begin{cases} -K_{X'} & \textit{ampio} \\ X & \textit{conic bundle} \end{cases}$$

Le tre-varietà di Fano si ottengono per scoppiamenti successivi di conic bundles, di fibrazioni in superfici di del Pezzo o di tre-varietà di Fano con $\rho = 1$.

Tre-varietà di Fano

- Se X ha una contrazione divisore a punto, allora ha anche una contrazione elementare di tipo conic bundle.
- $\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio

$$-K_X \text{ ampio} \Longrightarrow \begin{cases} -K_{X'} & \textit{ampio} \\ X & \textit{conic bundle} \end{cases}$$

Le tre-varietà di Fano si ottengono per scoppiamenti successivi di conic bundles, di fibrazioni in superfici di del Pezzo o di tre-varietà di Fano con $\rho = 1$.

Tre-varietà di Fano

- Se X ha una contrazione divisore a punto, allora ha anche una contrazione elementare di tipo conic bundle.
- $\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio

$$-K_X \text{ ampio} \Longrightarrow \begin{cases} -K_{X'} & \textit{ampio} \\ X & \textit{conic bundle} \end{cases}$$

Le tre-varietà di Fano si ottengono per scoppiamenti successivi di conic bundles, di fibrazioni in superfici di del Pezzo o di tre-varietà di Fano con $\rho = 1$.

Tre-varietà di Fano

- Se X ha una contrazione divisore a punto, allora ha anche una contrazione elementare di tipo conic bundle.
- $\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio

$$-K_X \text{ ampio} \Longrightarrow \begin{cases} -K_{X'} & \textit{ampio} \\ X & \textit{conic bundle} \end{cases}$$

Le tre-varietà di Fano si ottengono per scoppiamenti successivi di conic bundles, di fibrazioni in superfici di del Pezzo o di tre-varietà di Fano con $\rho = 1$.

Tre-varietà di Fano

- Se X ha una contrazione divisore a punto, allora ha anche una contrazione elementare di tipo conic bundle.
- $\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio

$$-K_X \text{ ampio} \Longrightarrow \begin{cases} -K_{X'} & \textit{ampio} \\ X & \textit{conic bundle} \end{cases}$$

Le tre-varietà di Fano si ottengono per scoppiamenti successivi di conic bundles, di fibrazioni in superfici di del Pezzo o di tre-varietà di Fano con $\rho = 1$.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Contrazioni elementari

- Fibrate
  1. Conic bundles su varietà di dimensione tre;
  2. Fibrazioni in del Pezzo su superfici lisce;
  3. Fibrazioni in tre-varietà di Fano su curve lisce;
  4. $X_4 \to *$ Varietà di Fano con $\rho = 1$
- Divisoriali
  1. Scoppiamenti di punti, curve e superfici lisce in varietà lisce;
  2. Divisori a superfici singolari;
  3. Divisori a curve di punti singolari (fibra generica $\mathbb{P}^2, \mathbb{Q}^2$ o $\mathbb{S}_2$);
  4. Divisori (tre-varietà di del Pezzo) a punti singolari.
- Piccole
  1. $\mathbb{P}^2$ con normale $\oplus^2 \mathscr{O}(-1)$ a punto.

Una contrazione di tipo fibrato

$$\begin{tikzcd} & & \\ \mathbb{Q}^4 \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[rr, dashed, "\sigma"'] & & \mathbb{P}^3 \arrow[ull, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Mappa razionale $\eta : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{P}^3$ definita dal sistema lineare degli iperpiani che contangono una retta l

Una contrazione di tipo fibrato

$$\begin{tikzcd} & Bl_l(\mathbb{Q}^4) \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathbb{Q}^4 \arrow[rr, dashed, "\sigma"'] & & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Mappa razionale $\eta : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{P}^3$ definita dal sistema lineare degli iperpiani che contangono una retta l

$\eta : Bl_l(\mathbb{Q}^4) \to \mathbb{Q}^4$ scoppiamento lungo l

Una contrazione di tipo fibrato

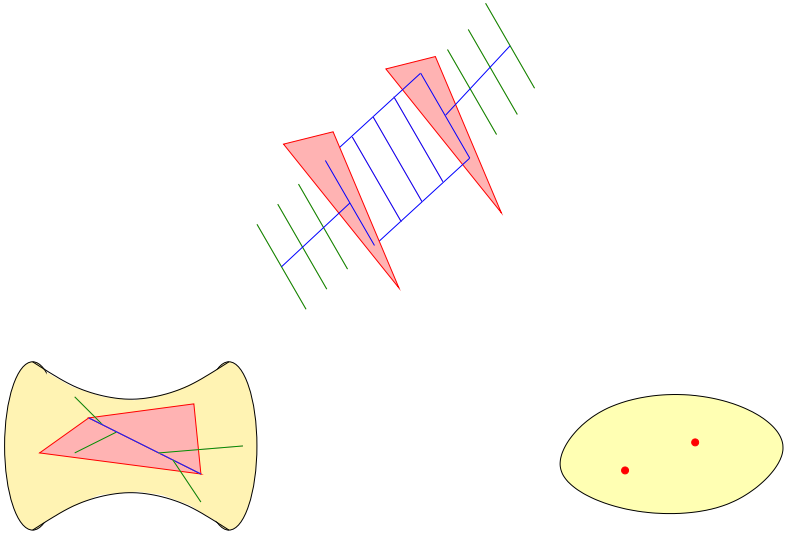
$$\begin{tikzcd} & Bl_l(\mathbb{Q}^4) \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathbb{Q}^4 \arrow[rr, dashed, "\sigma"'] & & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Mappa razionale $\eta : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{P}^3$ definita dal sistema lineare degli iperpiani che contangono una retta l

$\eta : Bl_l(\mathbb{Q}^4) \to \mathbb{Q}^4$ scoppiamento lungo l

φ risoluzione di η

Una contrazione di tipo fibrato

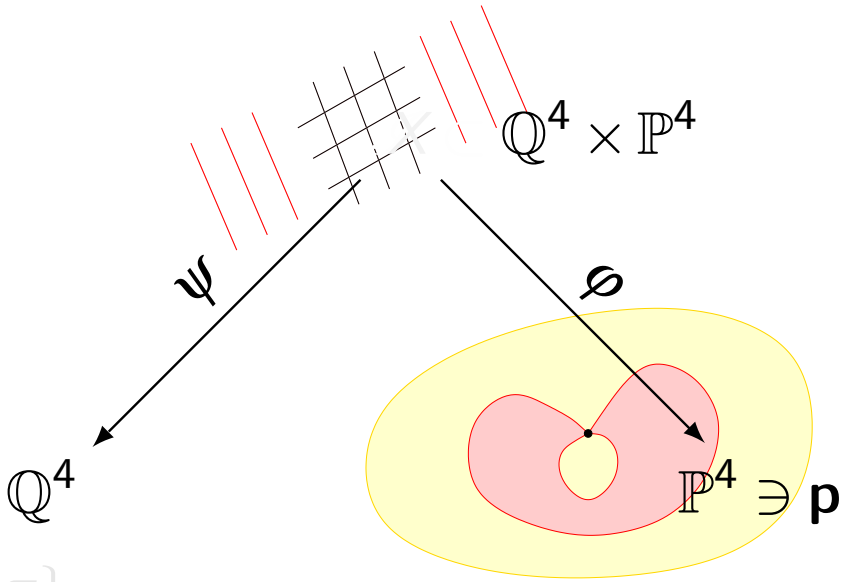


Mappa razionale $\eta : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{P}^3$ definita dal sistema lineare degli iperpiani che contangono una retta l

$\eta : Bl_l(\mathbb{Q}^4) \to \mathbb{Q}^4$ scoppiamento lungo l

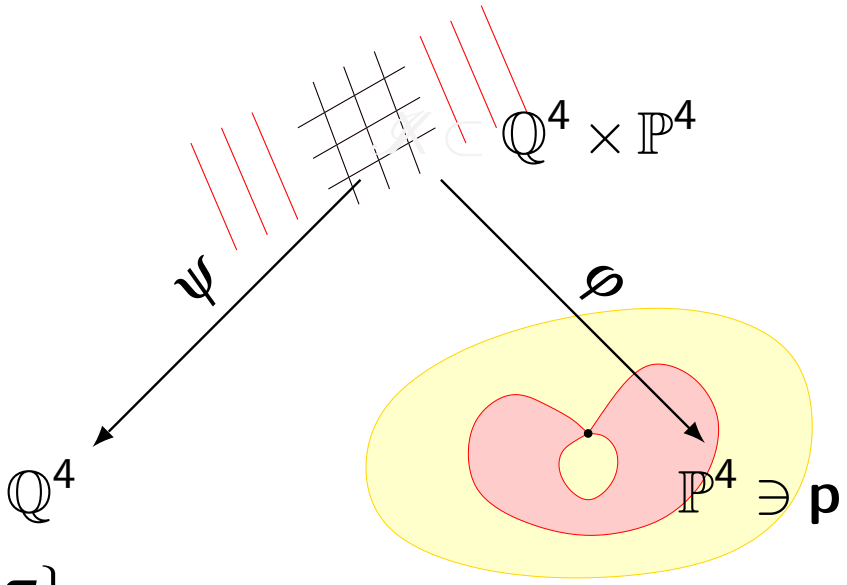
φ risoluzione di η

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$
$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle
$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$
$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

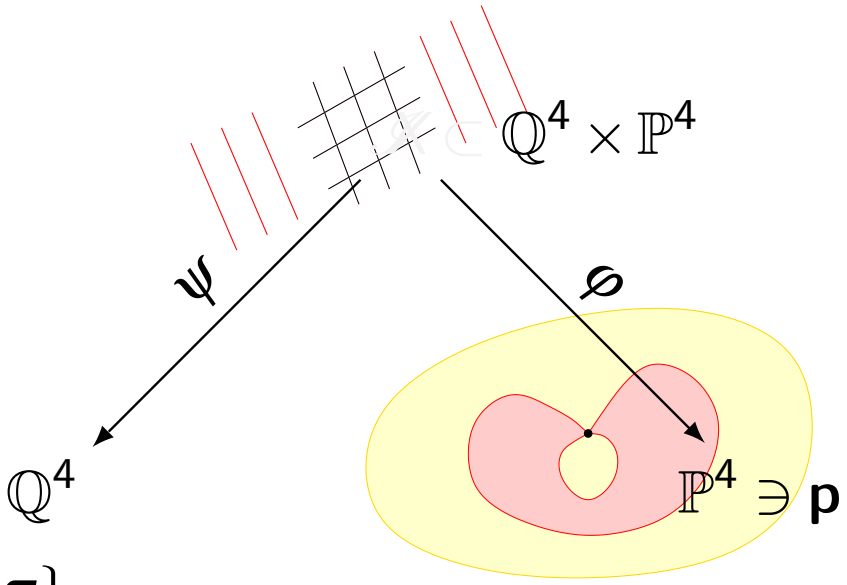
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

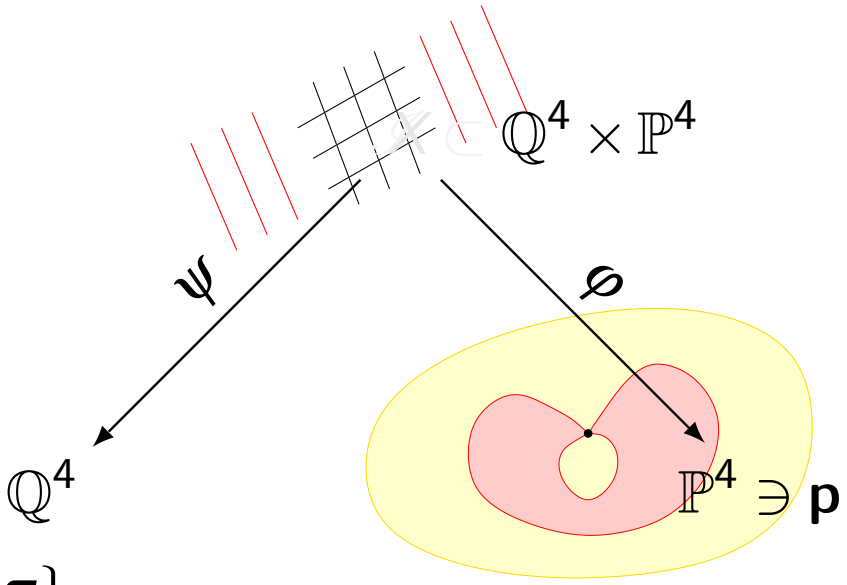
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

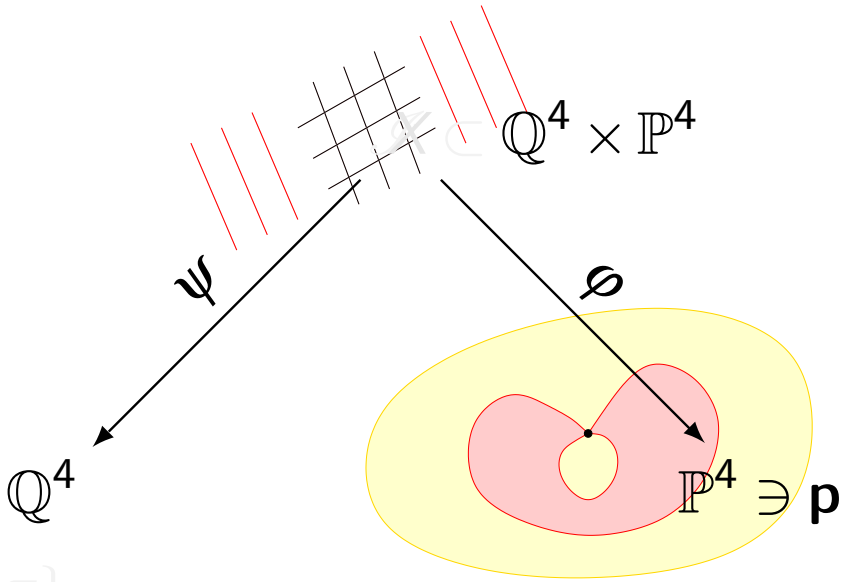
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

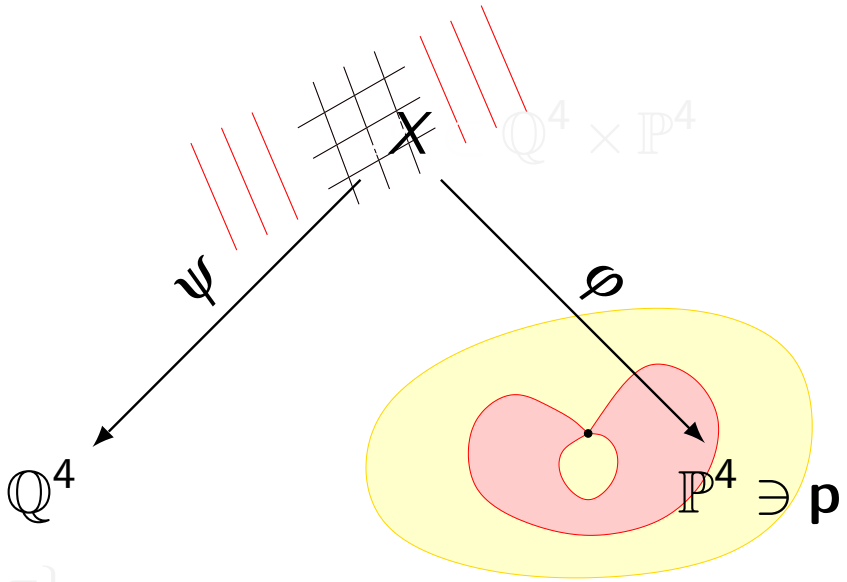
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

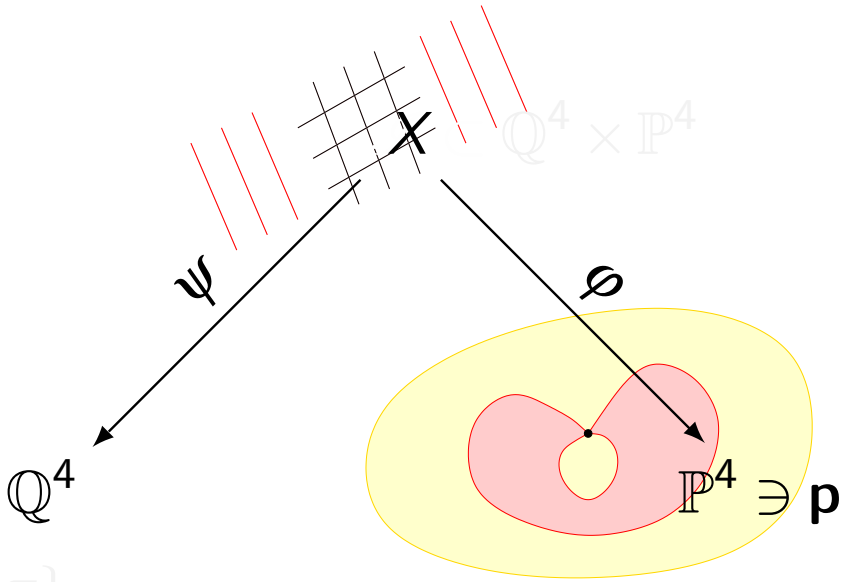
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

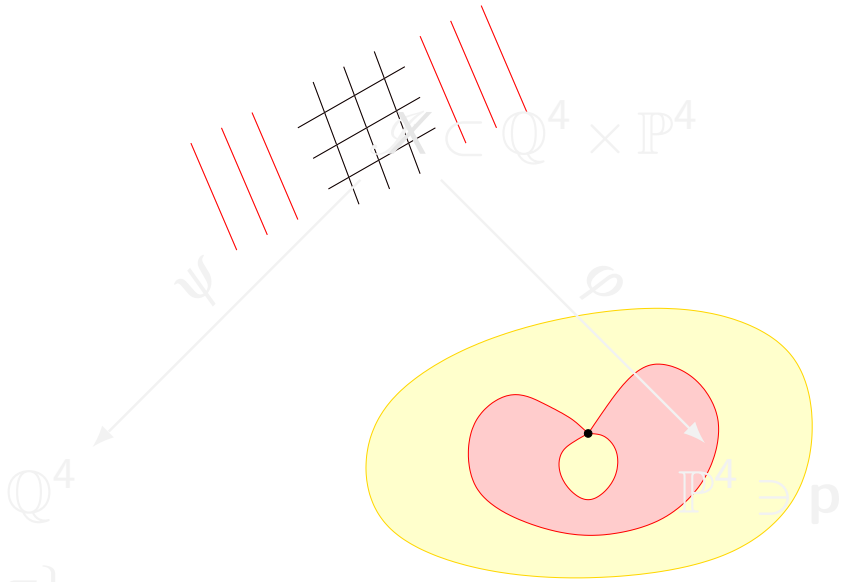
Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Una contrazione divisoriale



$\mathscr{I} = \{(\pi, q) \mid q \in \pi\}$

Λ_1 e Λ_2 sezioni generiche in $\mathscr{O}(1,1)$

$\psi : \mathscr{I} \to \mathbb{Q}^4$ è un $\mathbb{P}^2$ bundle

$X = \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{P}^4 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$\varphi : \mathscr{I} \to \mathbb{P}^4$ ha come fibra generica un $\mathbb{P}^2$ e come fibra speciale una quadrica $\mathbb{Q}^4$

Il risultato

Teorema

$\varphi_X : X \to W$ contrazione elementare divisoriale supportata da $K_X + \tau L$, E divisore eccezionale. Se $\tau \geq \dim X - 4$ allora la fibra generica G è irriducibile, tranne in un caso in cui

1. $\dim X = 5$ *e* $\tau = 1$;
2. $\varphi_X(E)$ *è una curva;*
3. *G è unione di due componenti irriducibili $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}(2))$ che si tagliano in una quadrica liscia.*

Riduzione con sezioni verticali

$\varphi : X \to W$ contrazione elementare divisoriale di una varietà liscia di dimensione cinque supportata da $K_X + \tau L$

Il divisore eccezionale E è irriducibile.

Riduzione con sezioni verticali

$\varphi : X \to W$ contrazione elementare divisoriale di una varietà liscia di dimensione cinque supportata da $K_X + \tau L$

Il divisore eccezionale E è irriducibile.

$r = \dim \varphi(E)$, $Z_1, \ldots, Z_r$ molto ampi su W e $Y^i = \varphi^*(Z_i)$

Riduzione con sezioni verticali

$\varphi : X \to W$ contrazione elementare divisoriale di una varietà liscia di dimensione cinque supportata da $K_X + \tau L$

Il divisore eccezionale E è irriducibile.

$r = \dim \varphi(E)$, $Z_1, \ldots, Z_r$ molto ampi su W e $Y^i = \varphi^*(Z_i)$

$$Y := \bigcap_i Y_i, \qquad Z := \bigcap_i Z_i,$$

Riduzione con sezioni verticali

$\varphi : X \to W$ contrazione elementare divisoriale di una varietà liscia di dimensione cinque supportata da $K_X + \tau L$

Il divisore eccezionale E è irriducibile.

$r = \dim \varphi(E)$, $Z_1, \ldots, Z_r$ molto ampi su W e $Y^i = \varphi^*(Z_i)$

$$Y := \bigcap_i Y_i, \qquad Z := \bigcap_i Z_i,$$

La restrizione $\varphi : Y \to Z$ è una contrazione estremale supportata da $K_Y + \tau L_Y$, che manda il divisore $G \subset Y$ a un punto.

Pro e contro

Pro : la fibra è un divisore

Pro e contro

Pro : la fibra è un divisore

$$G = G_1 + \cdots + G_s;$$

Pro e contro

Pro : la fibra è un divisore

$$G = G_1 + \cdots + G_s;$$

mettendo in evidenza una componente

$$G = G_i + \widetilde{G}_i \qquad\qquad D_i := \widetilde{G}_i|_{G_i}.$$

Pro e contro

Pro : la fibra è un divisore

$$G = G_1 + \cdots + G_s;$$

mettendo in evidenza una componente

$$G = G_i + \widetilde{G}_i \qquad\qquad D_i := \widetilde{G}_i|_{G_i}.$$

abbiamo una buona formula per il canonico:

$$K_{G_i} = -(\tau + q)L_{G_i} - D_i.$$

Pro e contro

Pro : la fibra è un divisore

$$G = G_1 + \cdots + G_s;$$

mettendo in evidenza una componente

$$G = G_i + \widetilde{G}_i \qquad\qquad D_i := \widetilde{G}_i|_{G_i}.$$

abbiamo una buona formula per il canonico:

$$K_{G_i} = -(\tau + q)L_{G_i} - D_i.$$

Contro: la contrazione non è più elementare.

Curve razionali

V famiglia di curve razionali in G_i genericamente non spezzante e tale che esista C in V che taglia il luogo liscio di G_i.

Curve razionali

V famiglia di curve razionali in G_i genericamente non spezzante e tale che esista C in V che taglia il luogo liscio di G_i.

$$\dim Locus(V) + \dim Locus(V_x) + 1 \geq \dim G_i - K_{G_i} \cdot C$$

Curve razionali

V famiglia di curve razionali in G_i genericamente non spezzante e tale che esista C in V che taglia il luogo liscio di G_i.

$$\dim Locus(V) + \dim Locus(V_x) + 1 \geq \dim G_i - K_{G_i} \cdot C$$

$$\dim Locus(V_x) + 1 \geq (\tau + q)L \cdot C + D_i \cdot C$$

Famiglie di curve razionali

1. Ogni G_i of G è coperta da una famiglia non spezzante W^i tale che $L \cdot W^i = 1$. Le famiglie W^j e W^k sono indipendenti;

Famiglie di curve razionali

1. Ogni G_i of G è coperta da una famiglia non spezzante W^i tale che $L \cdot W^i = 1$. Le famiglie W^j e W^k sono indipendenti;
2. $G_{j,k}$ componente irriducibile di $G_j \cap G_k$; allora $\mathrm{NE}(G_{j,k}) = \langle [W^j], [W^k] \rangle$ ed esistono curve in W^j e W^k contenute in $G_{j,k}$;

Famiglie di curve razionali

1. Ogni G_i of G è coperta da una famiglia non spezzante W^i tale che $L \cdot W^i = 1$. Le famiglie W^j e W^k sono indipendenti;
2. $G_{j,k}$ componente irriducibile di $G_j \cap G_k$; allora $\mathrm{NE}(G_{j,k}) = \langle [W^j], [W^k] \rangle$ ed esistono curve in W^j e W^k contenute in $G_{j,k}$;

Corollario

Famiglie di curve razionali

1. Ogni G_i of G è coperta da una famiglia non spezzante W^i tale che $L \cdot W^i = 1$. Le famiglie W^j e W^k sono indipendenti;
2. $G_{j,k}$ componente irriducibile di $G_j \cap G_k$; allora $\mathrm{NE}(G_{j,k}) = \langle [W^j], [W^k] \rangle$ ed esistono curve in W^j e W^k contenute in $G_{j,k}$;

Corollario

1. $Locus(W_i)_x \neq G_i$

Famiglie di curve razionali

1. Ogni G_i of G è coperta da una famiglia non spezzante W^i tale che $L \cdot W^i = 1$. Le famiglie W^j e W^k sono indipendenti;
2. $G_{j,k}$ componente irriducibile di $G_j \cap G_k$; allora $\mathrm{NE}(G_{j,k}) = \langle [W^j], [W^k] \rangle$ ed esistono curve in W^j e W^k contenute in $G_{j,k}$;

Corollario

1. *$Locus(W_i)_x \neq G_i$*
2. *Se $G_k \cdot W_i > 0$ allora G_k è l'unica componente che taglia G_i.*

Famiglie di curve razionali

Infatti da

$$3 \geq \dim G_i \geq \dim Locus(W^i)_x + 1 \geq \tau + q + D_i \cdot W_i \geq 3 + G_t \cdot W^i$$

Famiglie di curve razionali

Infatti da

$$3 \geq \dim G_i \geq \dim Locus(W^i)_x + 1 \geq \tau + q + D_i \cdot W_i \geq 3 + G_t \cdot W^i$$

segue che $G_t \cdot W_i = 0$, quindi $Locus(W^i)_x$ è due dimensionale ed è una componente dell'intersezione con $\rho = 1$.

Famiglie di curve razionali

Infatti da

$$3 \geq \dim G_i \geq \dim Locus(W^i)_x + 1 \geq \tau + q + D_i \cdot W_i \geq 3 + G_t \cdot W^i$$

segue che $G_t \cdot W_i = 0$, quindi $Locus(W^i)_x$ è due dimensionale ed è una componente dell'intersezione con $\rho = 1$. Contraddizione

Famiglie di curve razionali

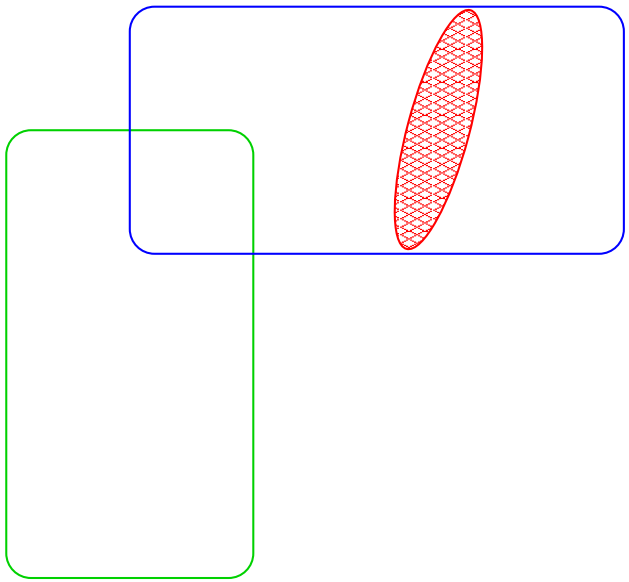
Infatti da

$$3 \geq \dim G_i \geq \dim Locus(W^i)_x + 1 \geq \tau + q + D_i \cdot W_i \geq 3 + G_t \cdot W^i$$

segue che $G_t \cdot W_i = 0$, quindi $Locus(W^i)_x$ è due dimensionale ed è una componente dell'intersezione con $\rho = 1$. Contraddizione

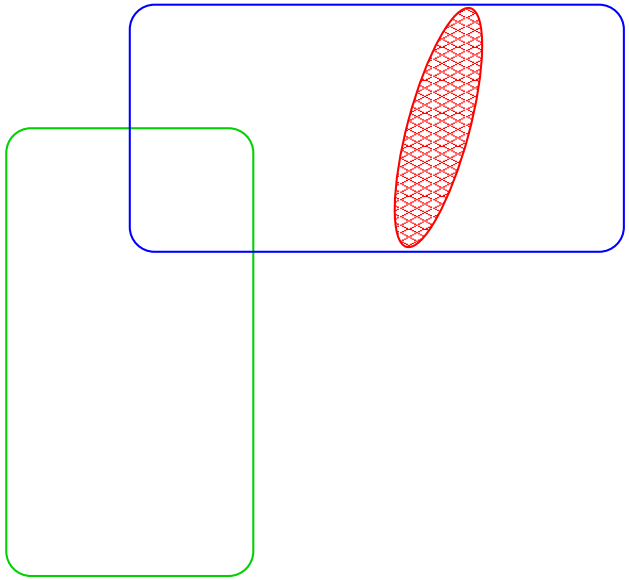
Allo stesso modo si prova che $\tau = q = 1$

Passo 2: Le contrazioni piccole sono isolate



Passo 2: Le contrazioni piccole sono isolate

Altrimenti $G_{j,k}$ conterrebbe una curva del luogo eccezionale della contrazione piccola (per ragioni dimensionali)



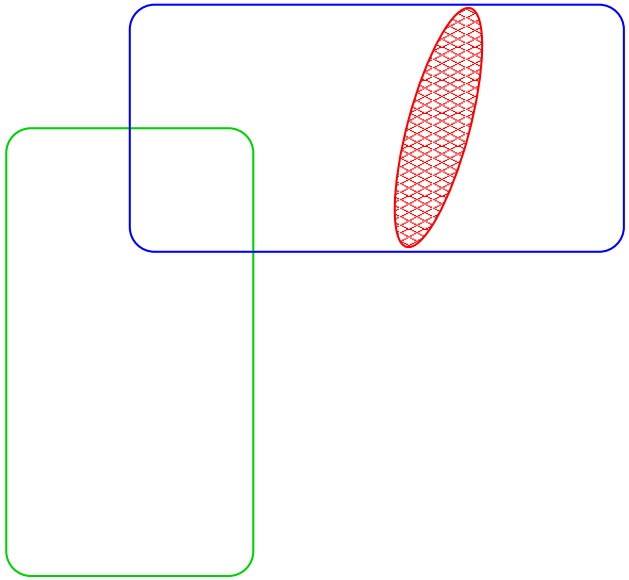
Passo 2: Le contrazioni piccole sono isolate

Altrimenti $G_{j,k}$ conterrebbe una curva del luogo eccezionale della contrazione piccola (per ragioni dimensionali)

Quindi, poichè

$$\mathrm{NE}(G_{j,k}) = \langle [W^j], [W^k] \rangle$$

il raggio coinciderebbe con una delle famiglie, che hanno un luogo divisoriale.



Passo 3: Ci sono al più due componenti

Una componente irriducibile G_1 è positiva su un raggio R_2 il cui luogo (per il passo precedente) è un divisore G_2.

Passo 3: Ci sono al più due componenti

Una componente irriducibile G_1 è positiva su un raggio R_2 il cui luogo (per il passo precedente) è un divisore G_2.

Si mostra quindi che $W^2 = R_2$.

Passo 3: Ci sono al più due componenti

Una componente irriducibile G_1 è positiva su un raggio R_2 il cui luogo (per il passo precedente) è un divisore G_2.

Si mostra quindi che $W^2 = R_2$.

Quindi G_1 è l'unica componente che taglia G_2.

Passo 3: Ci sono al più due componenti

Una componente irriducibile G_1 è positiva su un raggio R_2 il cui luogo (per il passo precedente) è un divisore G_2.

Si mostra quindi che $W^2 = R_2$.

Quindi G_1 è l'unica componente che taglia G_2.

G_2 è positiva un raggio, divisoriale e contenuto in G_1.

Passo 3: Ci sono al più due componenti

Una componente irriducibile G_1 è positiva su un raggio R_2 il cui luogo (per il passo precedente) è un divisore G_2.

Si mostra quindi che $W^2 = R_2$.

Quindi G_1 è l'unica componente che taglia G_2.

G_2 è positiva un raggio, divisoriale e contenuto in G_1.

Quindi G_2 è l'unica componente che taglia G_1.

Passo 4: Descrizione

La contrazione $\varphi : Y \to Z$ contrae due raggi estremali divisoriali di lunghezza uno.

Passo 4: Descrizione

La contrazione $\varphi : Y \to Z$ contrae due raggi estremali divisoriali di lunghezza uno.

Per la classificazione sono due $\mathbb{P}^2$-bundle su $\mathbb{P}^1$.

Passo 4: Descrizione

La contrazione $\varphi : Y \to Z$ contrae due raggi estremali divisoriali di lunghezza uno.

Per la classificazione sono due $\mathbb{P}^2$-bundle su $\mathbb{P}^1$.

E' facile vedere che i luoghi eccezionali sono $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}(2))$ e che si tagliano come previsto.

Passo 4: Descrizione

La contrazione $\varphi : Y \to Z$ contrae due raggi estremali divisoriali di lunghezza uno.

Per la classificazione sono due $\mathbb{P}^2$-bundle su $\mathbb{P}^1$.

E' facile vedere che i luoghi eccezionali sono $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}(2))$ e che si tagliano come previsto.

Costruire la sezione verticale

e_1, e_2, v_1, v_2 base di un reticolo
$w_1 = 2e_1 - e_2 - v_1,\ w_2 = 2e_2 - e_1 - v_2.$

Costruire la sezione verticale

e_1, e_2, v_1, v_2 base di un reticolo
$w_1 = 2e_1 - e_2 - v_1,\ w_2 = 2e_2 - e_1 - v_2.$
Δ il fan generato da questi vettori e che contiene i coni

$$\langle e_1, v_1, w_1, v_2\rangle \quad \langle e_1, v_1, w_1, w_2\rangle \quad \langle e_1, e_2, v_1, w_2\rangle \quad \langle e_1, e_2, v_1, v_2\rangle$$
$$\langle e_2, v_2, w_2, v_1\rangle \quad \langle e_2, v_2, w_2, w_1\rangle \quad \langle e_1, e_2, v_2, w_1\rangle \quad \langle e_1, e_2, w_1, w_2\rangle$$

Costruire la sezione verticale

e_1, e_2, v_1, v_2 base di un reticolo
$w_1 = 2e_1 - e_2 - v_1,\ w_2 = 2e_2 - e_1 - v_2$.
Δ il fan generato da questi vettori e che contiene i coni

$$\begin{array}{cccc} \langle e_1, v_1, w_1, v_2 \rangle & \langle e_1, v_1, w_1, w_2 \rangle & \langle e_1, e_2, v_1, w_2 \rangle & \langle e_1, e_2, v_1, v_2 \rangle \\ \langle e_2, v_2, w_2, v_1 \rangle & \langle e_2, v_2, w_2, w_1 \rangle & \langle e_1, e_2, v_2, w_1 \rangle & \langle e_1, e_2, w_1, w_2 \rangle \end{array}$$

Sia $\Sigma = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$; Δ è una suddivisione di Σ. Il morfismo birazionale corrispondente è la contrazione cercata $\varphi : Y \to Z$.

Costruire la sezione verticale

e_1, e_2, v_1, v_2 base di un reticolo
$w_1 = 2e_1 - e_2 - v_1,\ w_2 = 2e_2 - e_1 - v_2$.
Δ il fan generato da questi vettori e che contiene i coni

$$\begin{array}{cccc} \langle e_1, v_1, w_1, v_2 \rangle & \langle e_1, v_1, w_1, w_2 \rangle & \langle e_1, e_2, v_1, w_2 \rangle & \langle e_1, e_2, v_1, v_2 \rangle \\ \langle e_2, v_2, w_2, v_1 \rangle & \langle e_2, v_2, w_2, w_1 \rangle & \langle e_1, e_2, v_2, w_1 \rangle & \langle e_1, e_2, w_1, w_2 \rangle \end{array}$$

Sia $\Sigma = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$; Δ è una suddivisione di Σ. Il morfismo birazionale corrispondente è la contrazione cercata $\varphi : Y \to Z$.

La cosa importante è l'esistenza di un'azione di $\mathbb{Z}^2$ che scambia e_1 ed e_2, v_1 e v_2, w_1 e w_2.

Costruzione a nastro di Moebius

C' curva liscia con un'azione libera di $\mathbb{Z}_2$, che induce un rivestimento $C' \to C$.

Costruzione a nastro di Moebius

C' curva liscia con un'azione libera di $\mathbb{Z}_2$, che induce un rivestimento $C' \to C$.

Consideriamo le azioni prodotto $\pi : Y \times C' \to X$ e $\pi' : Z \times C' \to W$.

Costruzione a nastro di Moebius

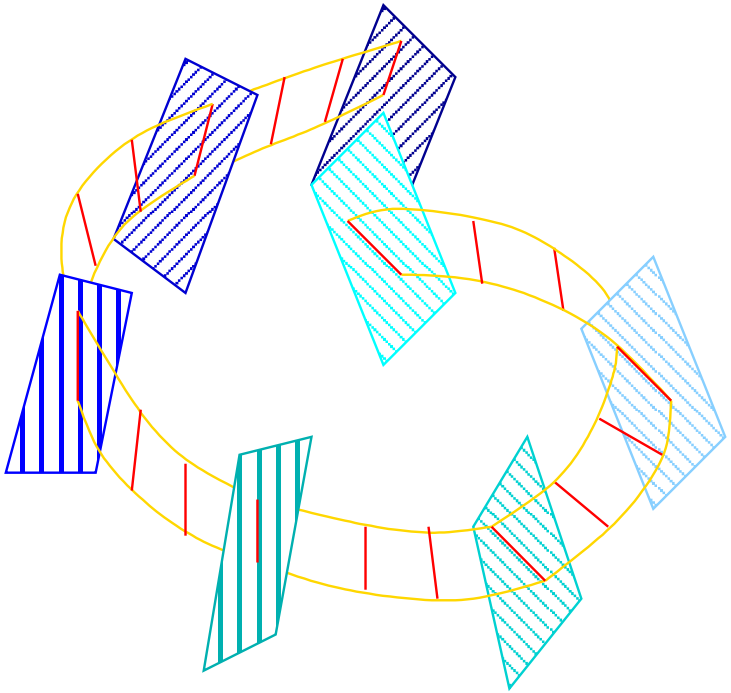
C' curva liscia con un'azione libera di $\mathbb{Z}_2$, che induce un rivestimento $C' \to C$.

Consideriamo le azioni prodotto $\pi : Y \times C' \to X$ e $\pi' : Z \times C' \to W$. Esiste un morfismo $\varphi_X : X \to W$ che fa commutare il diagramma

Costruzione a nastro di Moebius

C' curva liscia con un'azione libera di $\mathbb{Z}_2$, che induce un rivestimento $C' \to C$.

Consideriamo le azioni prodotto $\pi : Y \times C' \to X$ e $\pi' : Z \times C' \to W$. Esiste un morfismo $\varphi_X : X \to W$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y \times C' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi \times 1"'] & X \arrow[d, "\varphi_X"] \\
Z \times C' \arrow[r, "\pi'"] & W
\end{tikzcd}$$

Costruzione a nastro di Moebius