Geometria III

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
7 giugno 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano $\mathbb{S}^2$, D, E e X i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{S}^2$ è la sfera unitaria standard $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ di $\mathbb{R}^3$,
- D è il diametro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ y = z = 0\}$ di $\mathbb{S}^2$,
- E è l'equatore $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ di $\mathbb{S}^2$,
- $X := \mathbb{S}^2 \cup D$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ e i gruppi di omologia relativa $H_q(X, D \cup E)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica se $D \cup E$ è un retratto di X e/o un retratto di deformazione di X.

Esercizio 2. Sia T il toro di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la circonferenza

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

attorno all'asse z. Siano L e L' i due dischi chiusi

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0, (x-2)^2+z^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad L' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ (x+2)^2+z^2 \leq 1\}$$

e sia $Y = T \cup L \cup L'$. Supponiamo Y sia dotato della topologia euclidea. Si calcoli il gruppo fondamentale di Y.

Esercizio 3. Si calcoli il seguente integrale improprio mediante il teorema dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 1}{x^3 - 1} dx.$$

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $p(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$. Sia A l'intersezione del disco chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ con il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(4a) Mostrare che p ha due radici nel disco chiuso D e nessuna di esse è reale.

(4b) Mostrare che p ha una sola radice in A.