Note per il corso di Geometria III - Modulo di Analisi complessa 2015-16

Applicazione del Teorema integrale di Cauchy: la trasformata di Fourier della distribuzione normale

Definizione 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale. La sua *trasformata di Fourier* è la funzione $\hat{f}$ definita dall'integrale

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx.$$

Esempio. Applichiamo il Teorema integrale di Cauchy per calcolare la trasformata di Fourier della *distribuzione normale (gaussiana)*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Essendo $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1$ (è una distribuzione di probabilità) l'integrale che definisce $\hat{\phi}(t)$ esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+2itx)/2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2/2} e^{-t^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2/2} dx$$

Per calcolare l'ultimo integrale, poniamo $z = x + it$ e consideriamo la funzione $g(z) = e^{-z^2/2}$, olomorfa su tutto il piano complesso. Siano $a, b > 0$ e $t \geq 0$. Si consideri il rettangolo R di vertici b, $b + it$, $-a + it$, $-a$. Per il Teorema integrale di Cauchy applicato a $g(z)$ sulla curva $\gamma = \partial R$, si ha

$$0 = \int_\gamma e^{-z^2/2} dz = \int_{-a}^{b} e^{-x^2/2} dx + \int_0^t e^{-(b+iy)^2/2} i dy - \int_{-a}^{b} e^{-(x+it)^2/2} dx - \int_0^t e^{-(-a+iy)^2/2} i dy.$$

Il secondo e il quarto integrale hanno limite nullo per $a, b \to \infty$ e t fissato. Vediamo il secondo:

$$\left| \int_0^t e^{-(b+iy)^2/2} i dy \right| \leq |t| e^{(t^2-b^2)/2} \to 0 \quad \text{per } b \to \infty.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2/2} dx$$

per ogni $t \geq 0$: l'integrale sulla destra è indipendente da t. Lo stesso argomento può essere ripetuto per $t < 0$. Dunque

$$\hat{\phi}(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \phi(t).$$

La trasformata di Fourier della distribuzione normale $\phi(x)$ è ancora la distribuzione normale $\phi(t)$: $\hat{\phi} = \phi$.