Note per il corso di Geometria elementare
SSIS 2008 – Alessandro Perotti

(liberamente tratte da: J.Stillwell, The four pillars of geometry, Springer 2005
figure disegnate con GeoGebra (cfr. `http://www.geogebra.org`), un software libero di geometria dinamica)

1 Riga e compasso

Per più di 2000 anni, la matematica si è quasi identificata con la geometria degli *Elementi* di Euclide, un trattato in 13 libri scritto circa 300 anni a.C. e usato nell'istruzione scolastica fino al 20° secolo. La *geometria euclidea* era ritenuta il fondamento di tutte le scienze esatte. (Cfr. `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html` (in inglese))

Oggi il suo ruolo è cambiato. Le "geometrie non-euclidee" scoperte nel primo Ottocento si sono rivelate più utili della geometria euclidea in certe situazioni.

Detto semplicemente, la geometria euclidea riguarda le figure geometriche che possono essere disegnate (o *costruite*, come si dice di solito) mediante riga e compasso. Tutte le proposizioni che Euclide dimostra riguardano figure costruite a partire da rette e cerchi.

Dunque, per comprendere la geometria euclidea, bisogna avere un'idea di cosa si può ottenere mediante costruzioni con riga e compasso. In particolare, il ruolo particolare svolto dagli *angoli retti* e dalle *rette parallele* nella geometria euclidea.

Le costruzioni con riga e compasso servono anche ad introdurre il ruolo della lunghezza, dell'area, dell'angolo, e il loro significato più profondo, legato al ruolo dei *numeri* nella geometria.

1.1 Gli assiomi di costruzione di Euclide

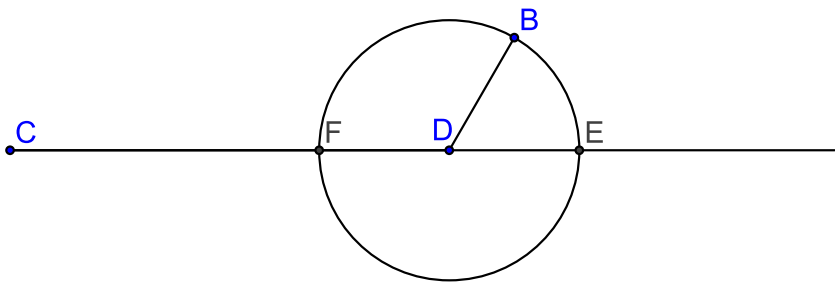
Euclide assume che si possano fare certe costruzioni e afferma queste assunzioni in una lista di *assiomi* (chiamati anche *postulati*). Egli assume che sia possibile:

1. Tracciare un (unico) segmento di retta tra due punti qualsiasi.
2. Estendere indefinitamente un segmento di retta.
3. Disegnare un cerchio con centro e raggio assegnati.

I primi due assiomi dicono che possiamo usare una *riga non graduata*: serve solo per tracciare rette e non per fare misure. Euclide distingue la funzione della misurazione da quella del tracciamento di rette. Solo il *compasso* viene usato per trasferire una misura, il raggio del cerchio, in un'altra posizione (assioma 3).

Il compasso consente anche di *sommare* e *sottrarre* la lunghezza $|AB|$ del segmento AB dalla lunghezza $|CD|$ di un altro segmento CD: basta descrivere col compasso il cerchio di centro D e raggio $|AB|$.

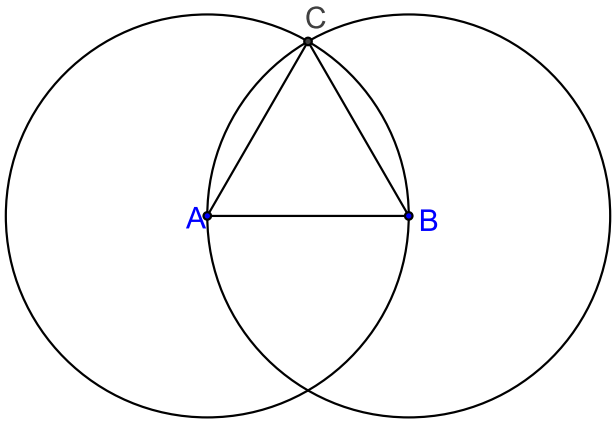
In questo modo si può anche costruire una riga graduata: sommando in successione una lunghezza fissata, si ottiene una "scala" su una retta data.



1.2 La costruzione di Euclide del triangolo equilatero

La prima proposizione degli *Elementi* è la costruzione di un triangolo equilatero con lato assegnato AB. Ci sono tre passi:

1. Si disegna il cerchio con centro A e raggio AB.
2. Si traccia il cerchio con centro B e raggio AB.
3. Si tracciano i segmenti da A e da B con punto finale nel punto C di intersezione delle due circonferenze costruite.



Questo esempio mostra chiaramente le relazioni tra:

- gli *assiomi di costruzione*, che garantiscono l'esistenza delle rette e dei cerchi della costruzione,
- gli *assiomi geometrici*, che assicurano l'esistenza di punti necessari in passi successivi della costruzione (il punto di intersezione C),
- e la *logica*, che garantisce che certe conclusioni sono valide. In questo caso, si usa il principio logico che afferma che cose uguali a una stessa cosa ($|BC|$ e $|CA|$ sono uguali ad $|AB|$) sono uguali tra di loro.

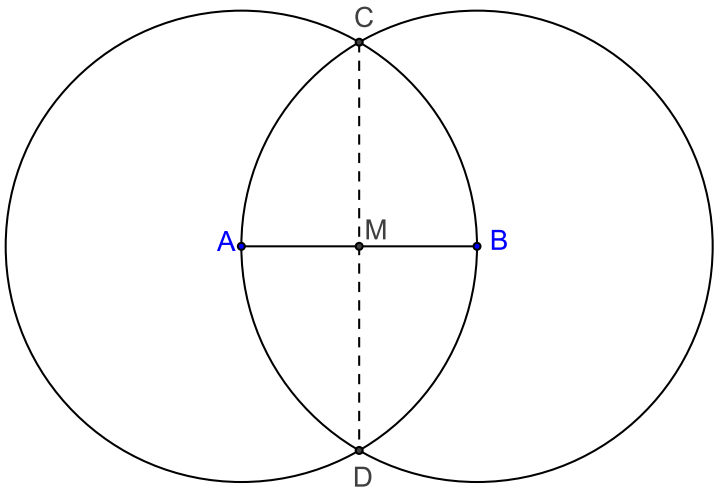
Euclide non affermò esplicitamente tutti gli assiomi geometrici che utilizzò, a parte quello che poi si è rivelato il più significativo: l'*assioma delle parallele*. La sua importanza particolare sta nel fatto che esistono "geometrie" interessanti per le quali l'assioma delle parallele è falso.

Osservazione. Il triangolo equilatero è un *poligono regolare*. I poligoni regolari con 3 e 6 (esagono) lati sono costruibili (con riga e compasso), come anche quelli con 4 e 5 lati (quadrato e pentagono). Stabilire per quali n il poligono regolare con n lati è costruibile è un problema ancora insoluto, legato al seguente problema algebrico: per quali interi m il numero $2^{2^m}+1$ è primo (un *primo di Fermat*)? Se ne conoscono solo cinque (per $m = 0, 1, 2, 3, 4$): 3, 5, 17, 257, 65537. Si può dimostrare che sono costruibili solo i poligoni regolari con $n = 2^k p_1 \cdots p_s$ lati (con $k, s \geq 0$ e $p_1, \ldots, p_s$ primi di Fermat).

1.3 Alcune costruzioni di base

Bisecare un segmento

Per bisecare un segmento dato AB, si tracciano, come nella costruzione precedente, le due circonferenze con raggio AB, e si considerano entrambi i punti di intersezione C e D. La retta CD taglia a metà il segmento AB.
L'uguaglianza di $|AM|$ e $|MB|$ segue dalla congruenza dei triangoli AMC e CMB, che a sua volta segue, ad esempio, dalla congruenza dei triangoli CAD e CBD.

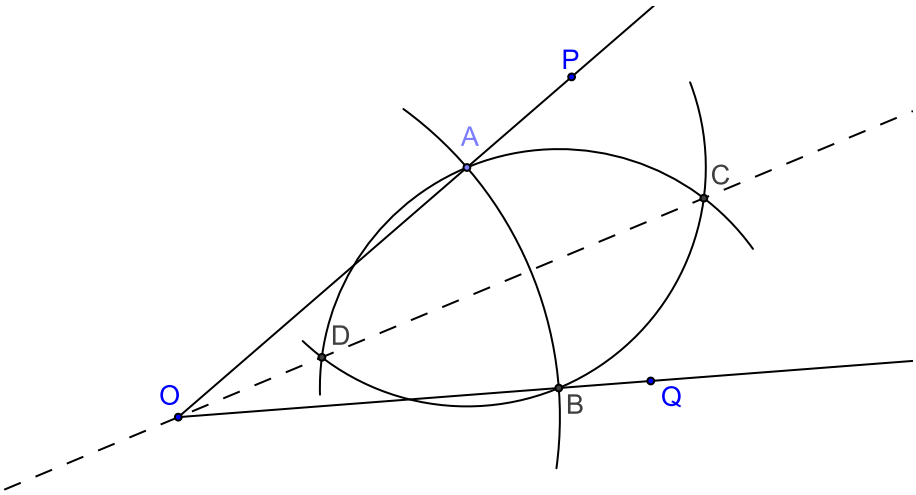


Il segmento DC è perpendicolare ad AB, e quindi questa costruzione può essere applicata per costruire rette perpendicolari.

- Per costruire la perpendicolare ad una retta l passante per un punto E su l, basta disegnare una circonferenza con centro E, che taglia l in A e B. La retta CD è la perpendicolare per E.
- Per costruire la perpendicolare ad una retta l passante per un punto E che non appartiene a l, basta disegnare una circonferenza con centro E e raggio sufficientemente grande da tagliare l in A e B. La retta CD è la perpendicolare per E.

Bisecare un angolo

Per bisecare un angolo POQ, si disegna una circonferenza con centro O che taglia OP in A e OQ in B. La perpendicolare CD che biseca AB è anche la bisettrice dell'angolo POQ.



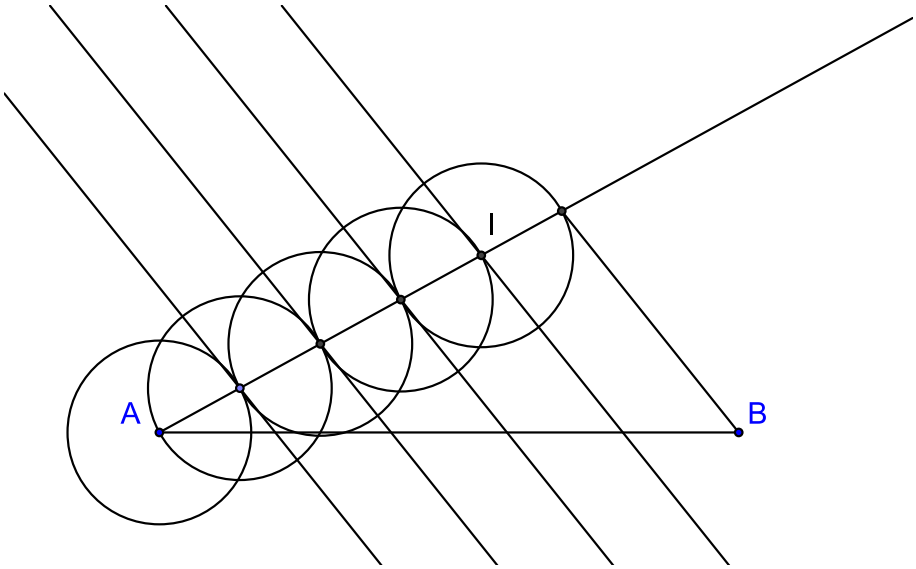
Nonostante la somiglianza tra le due costruzioni, la divisione in parti uguali di un segmento e quella di un angolo sono problemi differenti. Lo si vede quando si cerca di dividere in tre o più parti un segmento o un angolo. Le *rette parallele* danno una semplice soluzione al problema della divisione dei segmenti, ma non a quello riguardante gli angoli.

Costruire la retta parallela a una retta data e passante per un punto assegnato

Data la retta l e il punto P non appartenente a l, si costruisce la retta r per P perpendicolare a l. La retta per P perpendicolare a r è la parallela a l.

Dividere un segmento in n parti uguali

Dato un segmento AB, si traccia una qualsiasi retta l per A distinta da AB e mediante il compasso si segnano n punti, ugualmente spaziati su l. Si traccia la retta che congiunge l'ultimo punto con B e le rette ad essa parallele passanti per i punti segnati su l. Le parallele dividono AB in n parti uguali.
L'uguaglianza dei segmenti ottenuti tagliando AB con le parallele deriva dal Teorema di Talete (600 a.C.): *un fascio di rette parallele taglia ogni retta che interseca in segmenti proporzionali*. Questo teorema consente di usare l'algebra in questioni geometriche, in particolare di moltiplicare e dividere segmenti di retta.

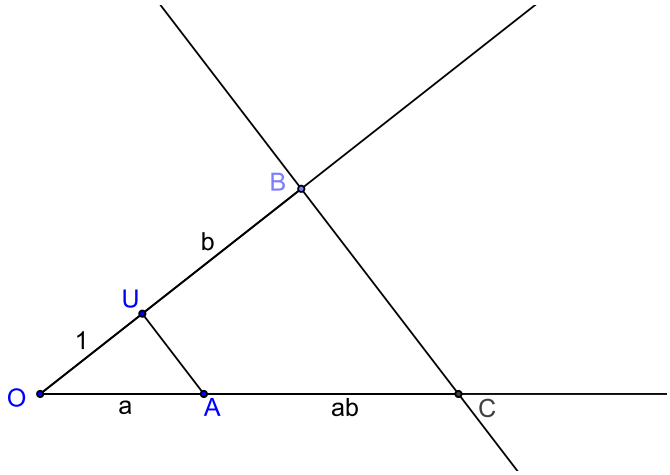


1.4 Moltiplicazione e divisione

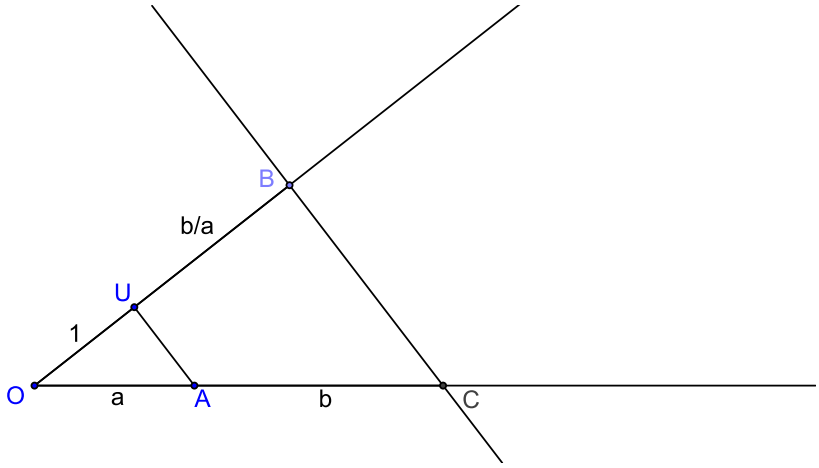
Oltre a sommare e sottrarre (lunghezze di) segmenti, si possono anche moltiplicare e dividere (lunghezze di) segmenti con riga e compasso. Si inizia scegliendo un segmento come *unità di misura*. Sia OU con $|OU| = 1$. Dati due segmenti di lunghezza a e b, definiamo il *prodotto* ab e il *quoziente* a/b.

Prodotto di segmenti

A partire dal triangolo OUA, con $|OA| = a$, si estende la retta OU in modo che $|UB| = b$, con B sulla retta OU. La retta per B parallela a UA interseca la retta OA in un punto C. Per il Teorema di Talete, $|AC| = ab$.



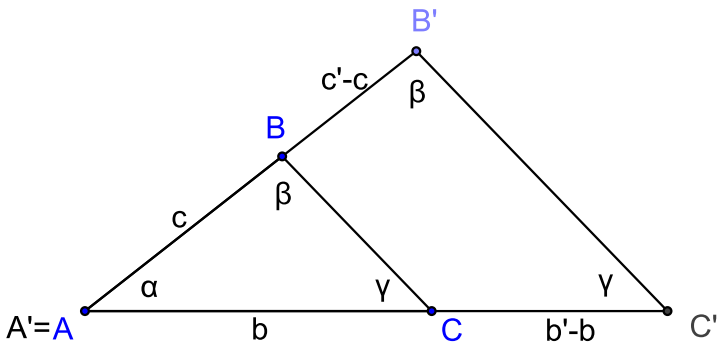
Per dividere il segmento b per il segmento a, si segna sulla retta OA il punto C in modo che $|AC| = b$. Per il Teorema di Talete, $|UB| = b/a$.



Mediante la somma e il quoziente di segmenti, si possono costruire segmenti di lunghezza *razionale* m/n, per ogni numero naturale m, n, $n \neq 0$.

1.5 Triangoli simili

I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono detti *simili* se hanno angoli corrispondenti uguali. Dal teorema di Talete segue che i lati sono *proporzionali*: un triangolo è un ingrandimento dell'altro.



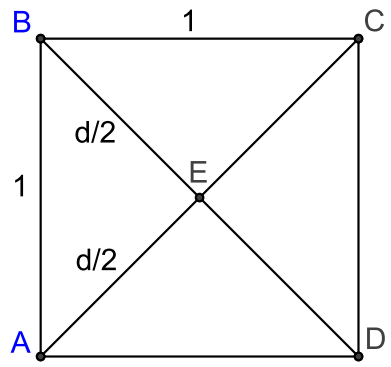
BC e $B'C$ sono paralleli. Per il Teorema di Talete, $b/c = (b' - b)/(c' - c)$, da cui, moltiplicando per $c(c' - c)$, $b(c' - c) = c(b' - b)$. Sommando bc si ottiene $bc' = cb'$ e quindi $b/c = b'/c'$. Scambiando il ruolo dei tre angoli, si ottiene la proporzionalità di tutti i lati corrispondenti dei triangoli.

La diagonale del quadrato

Le diagonali del quadrato di lato 1 dividono il quadrato in quattro triangoli, ognuno simile al mezzo quadrato tagliato da una diagonale. Dal Teorema di Talete, applicato ad esempio ai triangoli ABC e ABE, si ottiene

$$\frac{1}{d} = \frac{d/2}{1}.$$

Moltiplicando per $2d$ si ottiene $2 = d^2$, e quindi $d = \sqrt{2}$.



Dunque esistono segmenti di lunghezza *irrazionale*, costruibili con riga e compasso.

Lunghezze, aree e volumi

La scoperta di lunghezze irrazionali fu un problema per gli antichi Greci: essi non credevano che le lunghezze irrazionali potessero essere trattate come dei numeri. Nella geometria greca classica i *numeri* erano solo 2,3,4,. . . e l'unità 1. Non c'erano numeri negativi e il numero zero. Le quantità geometriche come segmenti, angoli, aree e volumi erano chiamate *grandezze*. Grandezze dello stesso tipo potevano essere confrontate (minore, maggiore, uguale), sommate e sottratte (la minore dalla maggiore). Il prodotto di due segmenti a e b era interpretato come il *rettangolo* di lati a, b (cioè un'area), mentre il prodotto di un segmento e di un'area (o di tre segmenti) era interpretato come un volume. Solo nel 1600, con Cartesio, compare l'idea di interpretare il prodotto di due segmenti come un segmento. È l'inizio dell'uso sistematico dell'algebra nello sviluppo della geometria.

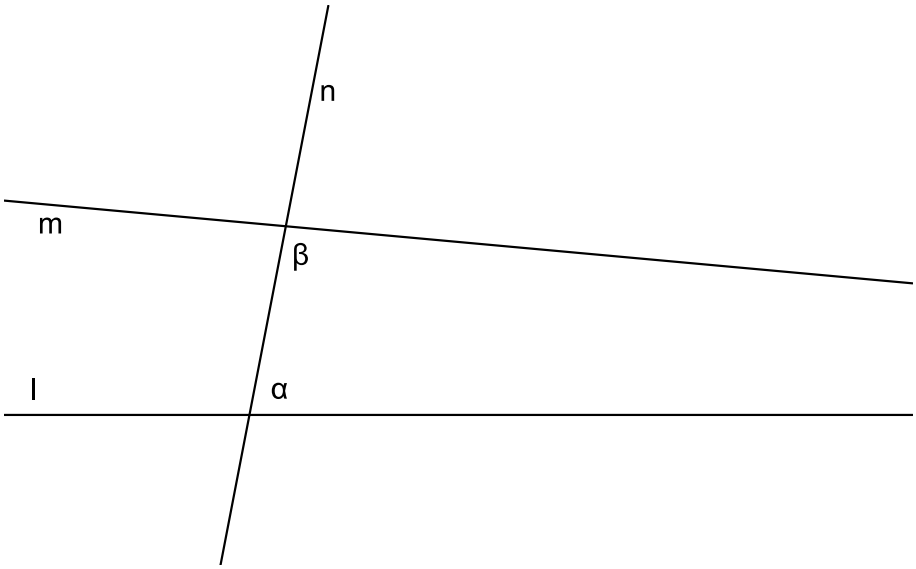
2 La geometria di Euclide

Nel seguito ripercorriamo alcuni passi della teoria di Euclide riguardante gli angoli e le aree. A partire dall'*assioma delle parallele*, mostreremo come questi passi conducono al Teorema di Pitagora e al Teorema di Talete. Gli angoli sono legati alle lunghezze tramite gli *assiomi di congruenza* (LAL="lato–angolo–lato", ALA="angolo–lato–angolo" e LLL="lato–lato–lato").

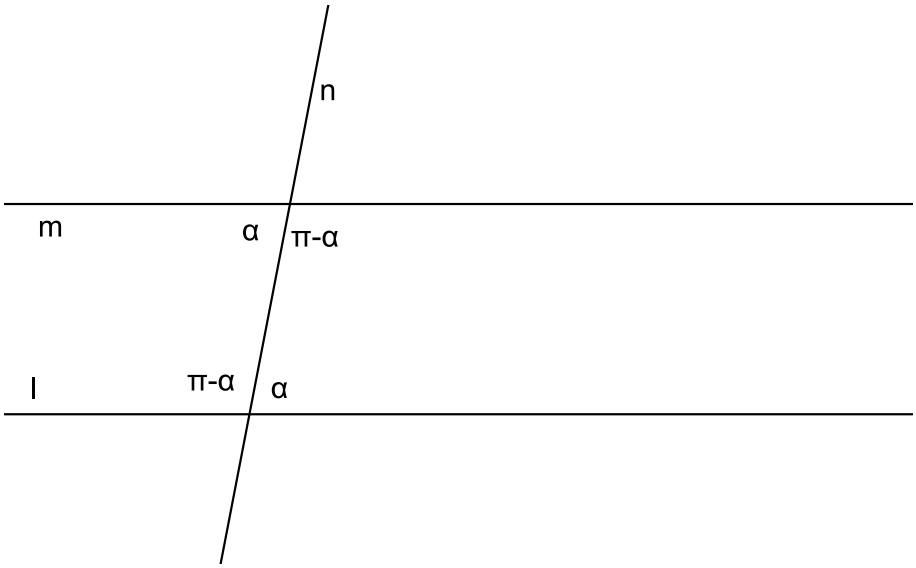
2.1 L'assioma delle parallele

Euclide formulò l'assioma delle parallele nella forma seguente:

Assioma delle parallele di Euclide. *Se una retta che intereseca due rette forma da un lato angoli interni con somma minore di due angoli retti, allora le due rette si incontrano da quel lato.*



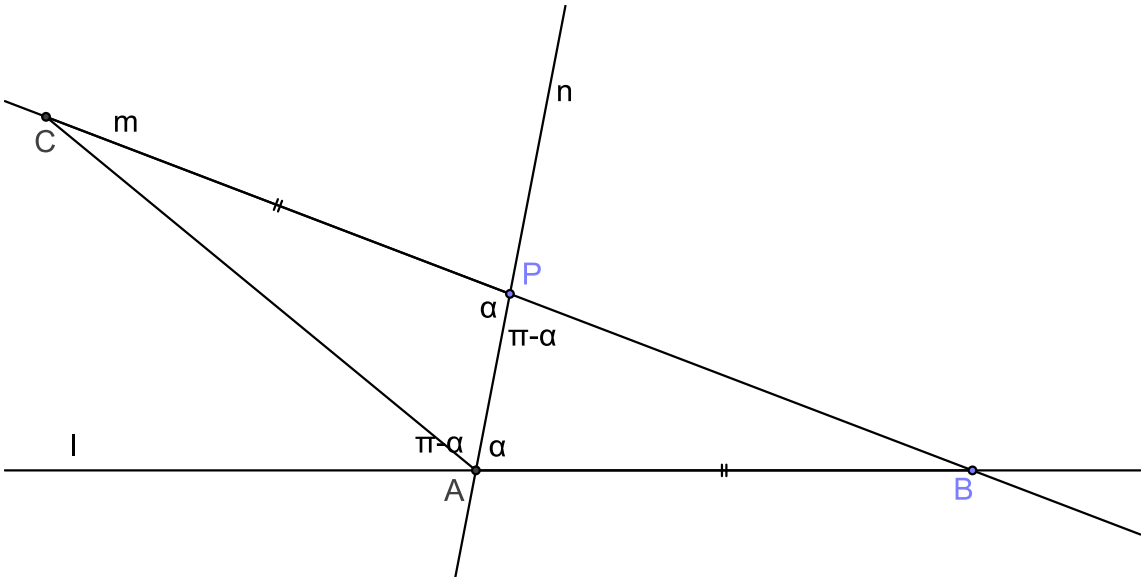
Se $\alpha + \beta$ è minore di due angoli retti, le rette m e l si intersecano. Quindi, se m e l non si intersecano (sono *parallele*), la somma degli angoli è $\alpha + \beta = \pi$.



Inoltre, ogni altra retta r passante per il punto di intersezione di m e n, parallela a l, forma un'angolo di $\pi - \alpha$ con n, e quindi coincide con m: *esiste al più una retta parallela a l passante per un punto assegnato*.

Il problema dell'*esistenza* di una parallela a l passante per un punto P, può essere risolto ricorrendo a uno dei principi di congruenza, per esempio il principio LAL (lato–angolo–lato): due triangoli sono congruenti se hanno due lati congruenti e l'angolo compreso uguale.

Siano m e n passanti per il punto assegnato P e supponiamo che le rette m, n e l formino angoli α e $\pi - \alpha$. Mostriamo che m è parallela a l.



Se m e l non fossero parallele, dovrebbero intersecarsi (almeno) nel punto B. Sia ora C su m, dalla parte opposta di B rispetto a n, tale che $|PC| = |AB|$. Per il principio LAL, i due triangoli PAB e APC sono congruenti, e quindi gli angoli APB e CAP sono entrambi uguali a $\pi - \alpha$. Ma questo implica che il segmento AC sta sulla retta l e dunque le rette m e l si intersecano in due punti distinti B e C, contraddicendo il primo assioma di costruzione.

Possiamo dunque formulare l'assioma delle parallele in una forma equivalente (Playfair – 1795):

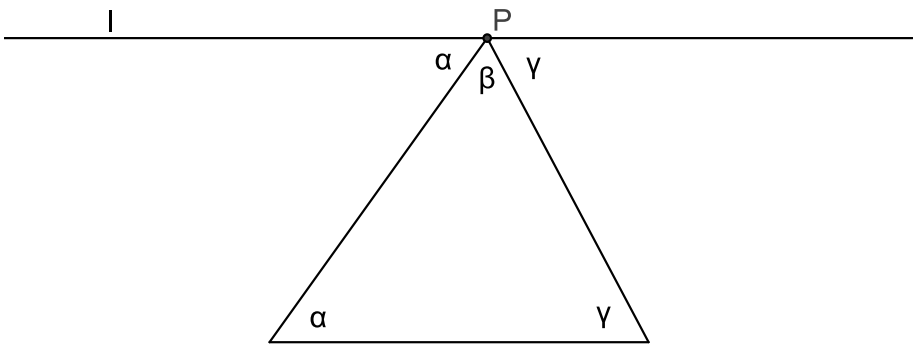
Assioma delle parallele. *Per ogni retta l e ogni punto P non appartenente a l, esiste esattamente una retta per P che non interseca l.*

Angoli in un triangolo

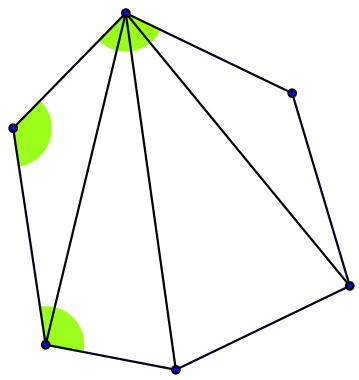
L'assioma delle parallele implica una bella proprietà dei triangoli.

Somma degli angoli di un triangolo. *Se α, β e γ sono gli angoli di un triangolo, allora $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.*

La forma di Euclide dell'assioma delle parallele implica l'uguaglianza degli angoli alterni formati da due parallele tagliate da una retta. Quindi $\alpha + \beta + \gamma$ forma un angolo piatto.



Il risultato può essere generalizzato a un qualsiasi poligono *convesso* con n lati: la somma degli angoli è uguale a $(n-2)\pi$.



Ne segue che un poligono *regolare* con n lati ha angoli uguali a $(n-2)/n$ angoli piatti. Inoltre si può ricoprire il piano con copie di un poligono regolare con n lati solo per i valori $n = 3, 4, 6$ (triangoli, quadrati, esagoni). Infatti, ogni angolo del poligono regolare è almeno $\pi/3$ (angolo del triangolo equilatero) e dunque la somma di k angoli risulta maggiore o uguale a $k\pi/3$, che supera l'angolo giro 2π quando $k > 6$.

Dunque deve essere

$$k\frac{n-2}{n} = 2\pi \quad \text{con} \quad 3 \le k \le 6.$$

Le uniche possibilità sono $k = 3$, $n = 6$, $k = 4, n = 4$ e $k = 6, n = 3$.

2.2 Gli assiomi di congruenza

Per Euclide due figure geometriche *coincidono*, sono *uguali*, se una di esse può essere sovrapposta all'altra mediante un movimento. In questo modo, egli dimostra i criteri di uguaglianza dei triangoli. Oggi diciamo che due triangoli sono *congruenti* quando gli angoli e le lunghezze dei lati corrispondenti sono uguali. Invece di dimostrare un criterio di congruenza introducendo il movimento nella geometria, lo prendiamo come *assioma*.

Assioma LAL (lato–angolo–lato). *Se nei triangoli ABC e $A'B'C'$ si ha*

$$|AB| = |A'B'|, \quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \quad |BC| = |B'C'|$$

allora si ha anche

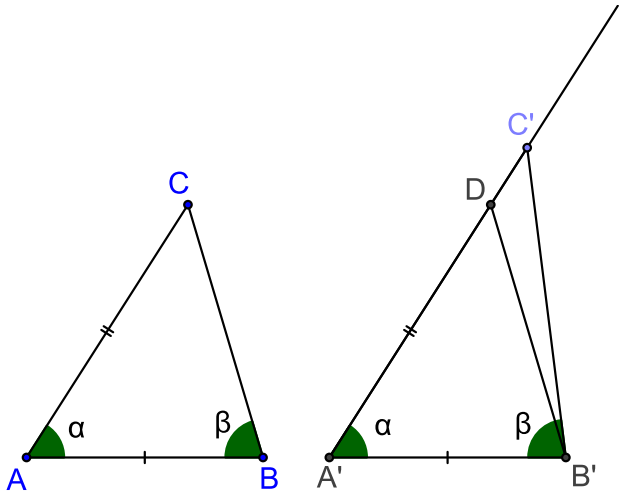
$$|AC| = |A'C'|, \quad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}, \quad \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}.$$

Ci sono due simili criteri di congruenza, che possono essere dedotti da LAL, il criterio ALA (angolo–lato–angolo) e il criterio LLL (lato–lato–lato).

Ad esempio, per ottenere ALA, si considerino i triangoli ABC e $A'B'C'$ con

$$\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = \alpha, \quad |AB| = |A'B'|, \quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = \beta.$$

Si scelga sulla retta $A'C'$ un punto D tale che $|A'D| = |AC|$. Per il criterio LAL, i triangoli ABC e $A'B'D$ sono congruenti, per cui $\widehat{A'B'D} = \beta$. Ma allora $\widehat{A'B'D} = \widehat{A'B'C'}$ e quindi $D = C'$ e ABC e $A'B'C'$ sono triangoli congruenti.

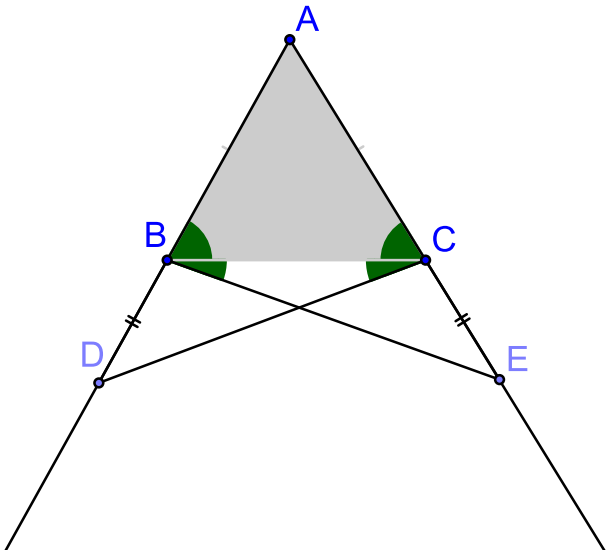


Una delle applicazioni più importanti di LAL è una semplice ed elegante dimostrazione (Pappo – 300 d.C.) della Proposizione I.5 degli *Elementi* riguardante i triangoli *isosceli*.

Teorema del triangolo iscoscele ("Pons asinorum"). *Se un triangolo ha due lati uguali, allora gli angoli opposti a questi lati sono uguali.*

Sia $|AB| = |AC|$. L'assioma LAL non richiede che i triangoli siano distinti. Può essere applicato alla corrispondenza tra il triangolo ABC e il triangolo ACB, nella quale i lati AB e AC sono congruenti, i lati AC e AB sono congruenti, e l'angolo compreso è uguale. Da LAL segue che l'angolo $\widehat{ABC}$ è uguale all'angolo $\widehat{ACB}$.

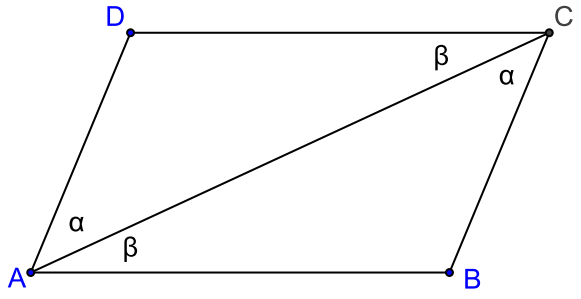
La dimostrazione di Euclide è più lunga, ma ancora basata sul criterio di congruenza LAL: ACD e ABE sono congruenti, da cui anche BCD e BCE sono congruenti. Sottraendo angoli uguali, si ottiene $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



Un'altra conseguenza dell'assioma LAL, via il criterio ALA, è un teorema riguardante i *parallelogrammi*, che permette di determinare l'area dei triangoli.

Teorema dei lati del parallelogrammo. *I lati opposti di un parallelogrammo sono uguali.*

Per il criterio di congruenza ALA, i triangoli ABC e CDA sono congruenti.



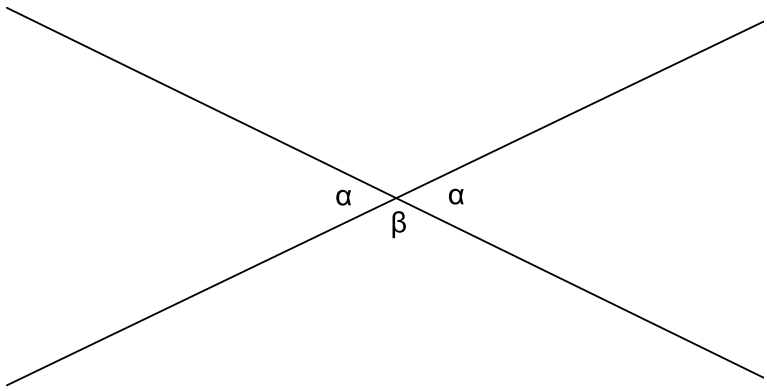
2.3 Area ed uguaglianza

All'inizio degli *Elementi*, Euclide introduce cinque *nozioni comuni*, principi logici che sono particolarmente importanti nella sua teoria dell'area:

1. Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche tra loro.
2. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
3. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
4. Cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
5. Il tutto è maggiore della parte.

Il termine "uguali" è indefinito, significa "uguali in un aspetto specifico", ad esempio segmenti "uguali in lunghezza", regioni "uguali in area", ma lunghezza e area non sono numeri, ma grandezze geometriche. La nozione comune n.4 parla di "coincidenza" di quantità geometriche. Si tratta della relazione di *congruenza* tra figure: due triangoli congruenti (sovrapponibili mediante un movimento secondo Euclide) hanno la stessa area.

Come esempio di applicazione delle nozioni comuni, Euclide mostra che angoli opposti al vertice sono uguali, sottraendo lo stesso angolo da angoli uguali.



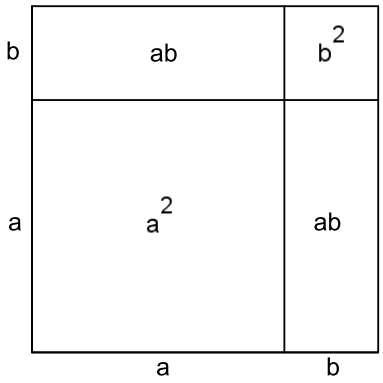
Il quadrato di una somma

Nel Libro II, Euclide afferma che, dato un segmento tagliato in due segmenti a e b, il quadrato costruito sull'intero (cioè $a+b$) è uguale ai quadrati costruiti sui due segmenti più due volte il rettangolo di lati a e b. In termini algebrici (*non* di Euclide)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

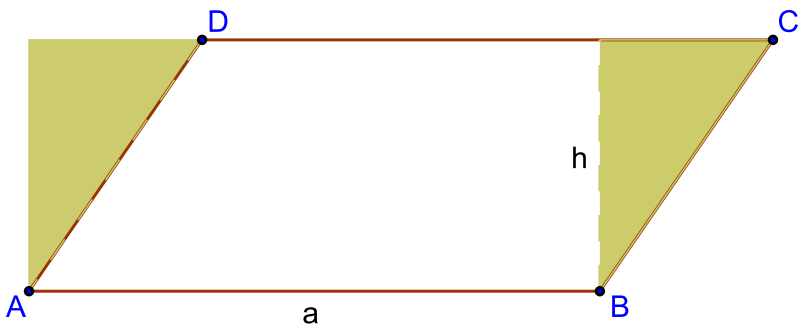
Nella matematica greca, l'unica interpretazione del prodotto ab di due segmenti, è il *rettangolo* di lati a e b. Il rettangolo è "uguale" ad altre figure geometriche se queste possono essere tagliate mediante rette in pezzi che, ricombinati, danno il rettangolo.

Per esempio, il quadrato $(a+b)^2$ è uguale (in area) alla somma del quadrato a^2, del quadrato b^2 e di due copie del rettangolo ab.



2.4 Area dei parallelogrammi e dei triangoli

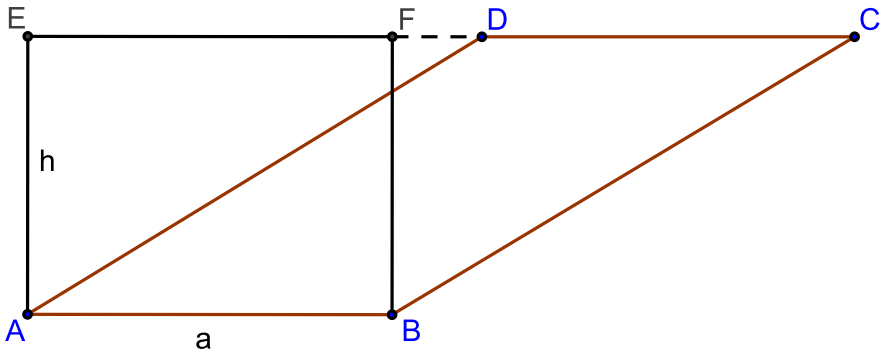
Il parallelogrammo di base a e altezza h è "uguale" (nel senso di Euclide, cioè ha uguale area) al rettangolo di lati a, h.



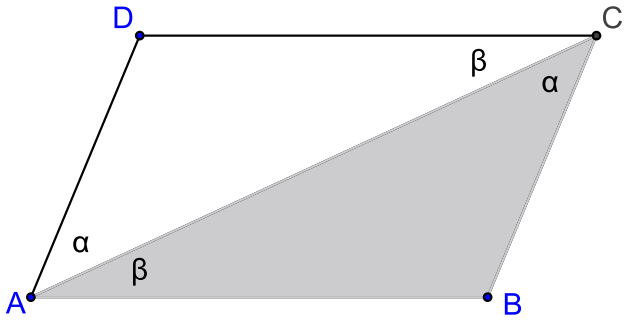
In generale bisogna fare più di un taglio, oppure si procede nel modo seguente.

La figura $ABCE$ si può tagliare in due parti: il rettangolo $ABFE$ e il triangolo BFC, oppure si può suddividere nel parallelogrammo $ABCD$ e nel triangolo AED. I lati DC e AB sono

uguali, i lati AB e EF sono uguali. Per la prima nozione comune, si ha $|DC| = |EF|$. Per la seconda (o la terza) nozione comune, sommando (o sottraendo) FD si ottiene $|ED| = |FC|$. Per l'assioma LAL, i triangoli AED e BFC sono congruenti. Ne deriva, dalla terza nozione comune, che $ABCD$ è congruente al rettangolo $ABFE$.



Seque facilmente la formula dell'area del triangolo, a partire dalla scomposizione di un parallelogrammo in due triangoli congruenti.



Dunque

$$\text{area del triangolo } = \frac{1}{2} \text{ base } \times \text{ altezza}$$

La teoria delle proporzioni

La *teoria delle proporzioni* (tradizionalmente attribuita ad Eudosso – ca. 350 a.C.), svolta da Euclide nel Libro V degli *Elementi*, anticipa in qualche senso la costruzione dei numeri reali con le sezioni di Dedekind (1872).

Due grandezze a, b dello stesso tipo sono dette in *rapporto* $a : b$. Il rapporto non è un numero e nemmeno una grandezza geometrica. Euclide dà la seguente definizione di uguaglianza tra rapporti.

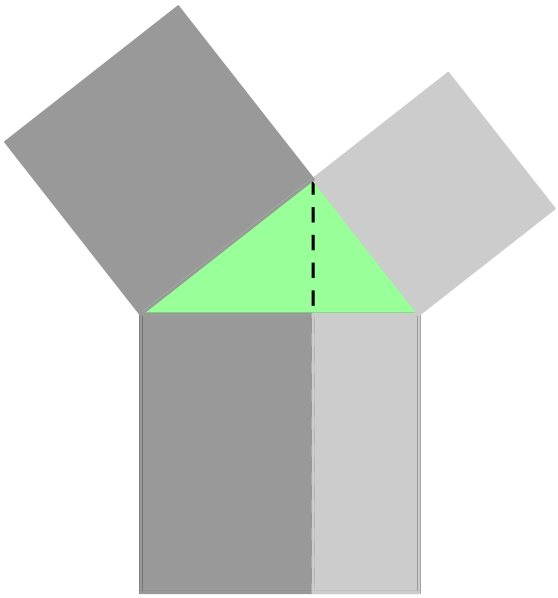
Due rapporti $a : b$ e $c : d$ sono uguali ($a : b = c : d$, "a sta a b come c sta a d") se, per ogni scelta dei numeri naturali m, n, il multiplo ma è minore/uguale/maggiore del multiplo nb se e solo se mc è minore/uguale/maggiore del multiplo nd, rispettivamente.

Se le grandezze a, b sono *commensurabili*, cioè esiste una terza grandezza dello stesso tipo di cui a e b sono multipli (interi), la proporzione ha la seguente interpretazione: se $a = ke$, $b = le$ ($k, l \in \mathbb{N}$), allora $la = kb$ e $a : b = ke : le = k : l$, un rapporto di numeri naturali. Ma la definizione precedente permette di trattare anche grandezze non commensurabili.

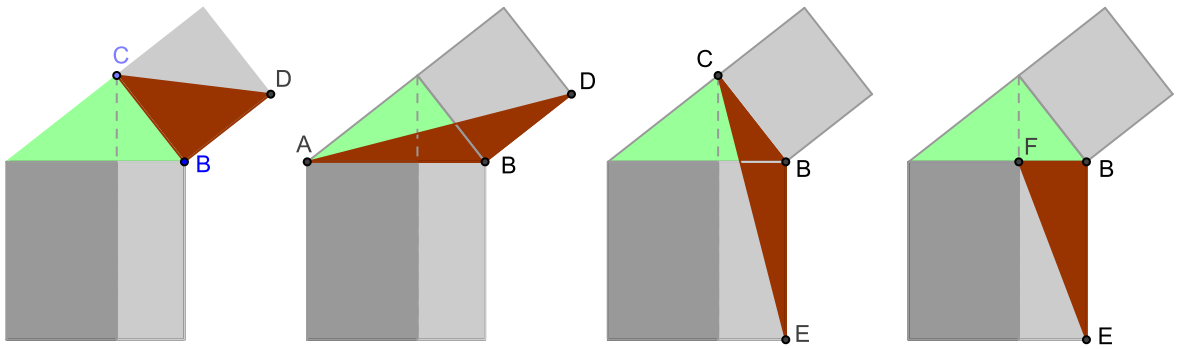
La formula dell'area del triangolo mostra che, per triangoli con uguale altezza, l'area è proporzionale alla base: $A : A' = b : b'$. Questo è immediato se si ammette che ogni segmento corrisponde a un numero reale (la sua lunghezza). In tal caso, $a : b = c : d$ equivale all'uguaglianza di numeri reali $ad = bc$. Altrimenti, bisogna ricorrere alla teoria delle proporzioni.

2.5 Il Teorema di Pitagora

Teorema di Pitagora. *Per ogni triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui lati più corti (i* cateti*) è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa*



La dimostrazione di Euclide: si divide il quadrato sull'ipotenusa in due rettangoli, ognuno dei quali è "uguale" (ha la stessa area) al quadrato su un cateto.



Consideriamo per esempio il quadrato sul cateto a destra.

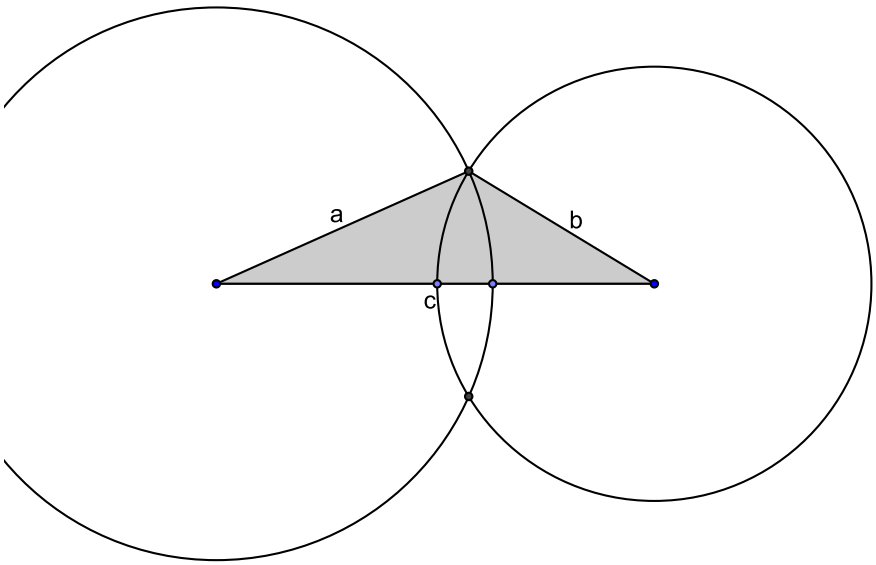
1. il triangolo CBD che si ottiene dividendo il quadrato mediante la diagonale ha la stessa area del triangolo ABD (stessa base BD e uguale altezza)

2. i triangoli ABD e CBE sono congruenti per LAL (l'angolo compreso è somma di angoli uguali nei due triangoli)

3. i triangoli CBE e FBE hanno la stessa area (base BE e uguale altezza).

Osservazione. Dal criterio di congruenza LLL, segue che vale anche il teorema inverso del Teorema di Pitagora: *se* $a, b, c > 0$ *e* $a^2 + b^2 = c^2$ *(una* terna pitagorica *nel caso di* a, b, c *interi), allora il triangolo di lati* a, b, c *è rettangolo.*

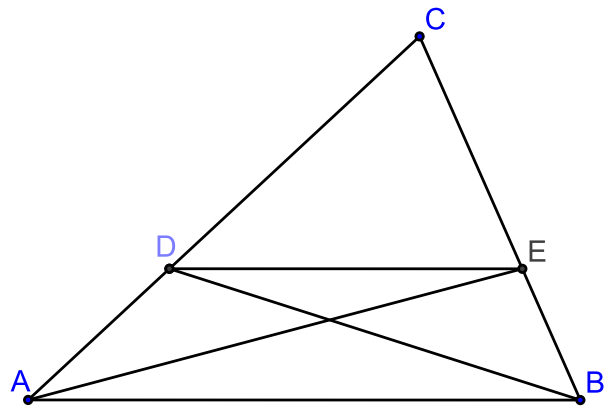
Si noti che da $a^2 + b^2 = c^2$ segue che $(a + b)^2 = c^2 + 2ab > c^2$, e quindi $a + b > c$, $c > a$, $c > b$. Ne deriva che è possibile costruire un triangolo con lati a, b, c. Il triangolo rettangolo di cateti a, b ha ipotenusa d tale che $d^2 = a^2 + b^2 = c^2$, da cui $d = c$. I due triangoli sono congruenti per il criterio LLL, e dunque entrambi rettangoli.



2.6 Il Teorema di Talete

Nella Proposizione 2 del Libro VI, Euclide dimostra il seguente

Teorema di Talete (600 a.C.). *Una retta tracciata parallelamente a un lato di un triangolo taglia gli altri due lati in segmenti proporzionali.*



I triangoli ADE e CDE hanno uguale altezza rispetto alla base sulla retta AC. Dunque le aree sono proporzionali alle basi:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{area\ CDE}{area\ ADE}.$$

Analogamente, considerando i triangoli CDE e BDE, si ha:

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{area\ CDE}{area\ BDE}.$$

I triangoli ADE e BDE hanno uguale base e altezza, e quindi uguale area. Dunque

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|BE|}.$$

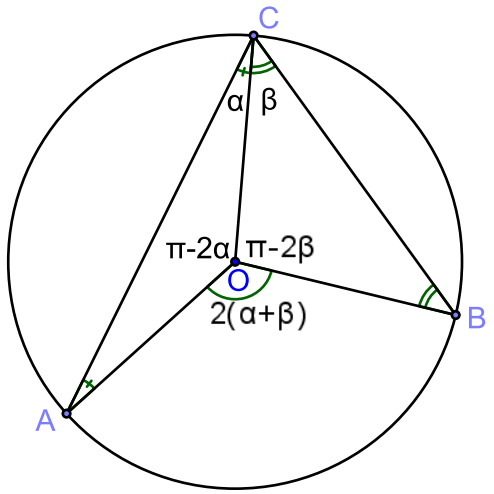
Osservazione.

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|}.$$

Infatti $|CD||CB| = |CD||CE| + |CD||EB| = |CD||CE| + |AD||CE| = (|CD| + |AD|)|CE| = |CA||CE|$.

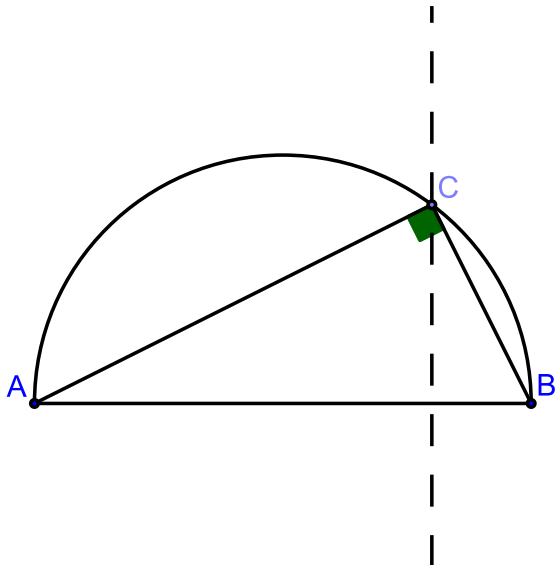
2.7 Angoli alla circonferenza e radici quadrate

Invarianza degli angoli alla circonferenza. *Se A e B sono punti di una circonferenza, allora, per ogni punto C sulla circonferenza, l'angolo $\widehat{ACB}$ è costante.*

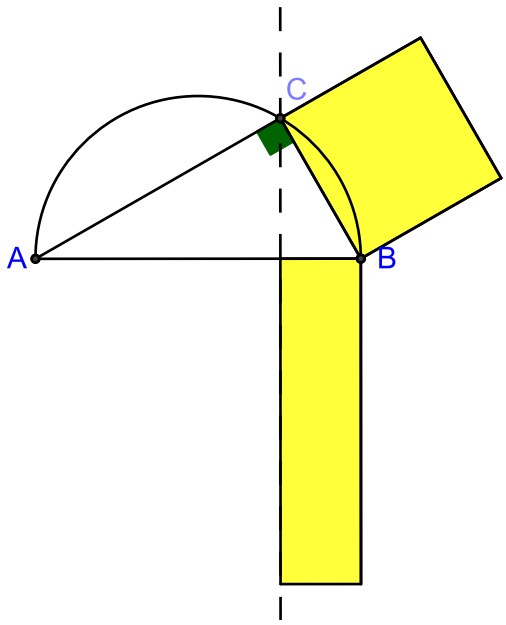


I triangoli AOC e BOC sono isosceli, per cui gli angoli $\widehat{AOC}$ e $\widehat{BOC}$ sono, rispettivamente, $\pi - 2\alpha$ e $\pi - 2\beta$. Ma l'angolo $\widehat{AOB} = 2(\alpha + \beta)$ non dipende dal punto C, e quindi anche l'angolo $\widehat{ACB} = \alpha + \beta$ non dipende da C.

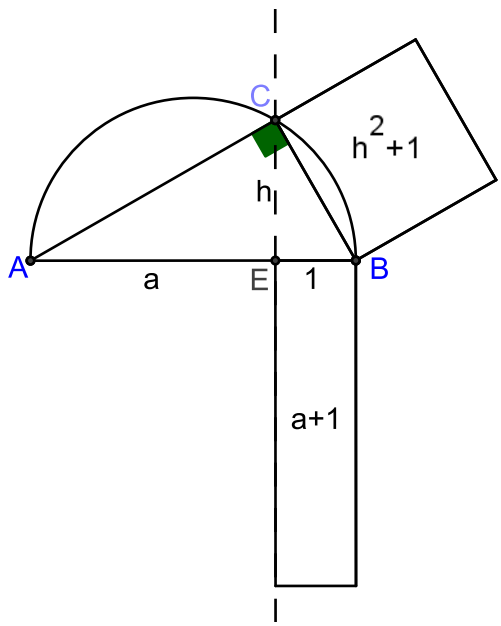
In particolare, se A e B stanno su un diametro, si ha $\alpha + \beta = \pi/2$ e il triangolo ABC è rettangolo in C. Questa proprietà può essere sfruttata per risolvere il seguente problema: dato un segmento AB, costruire il triangolo rettangolo con ipotenusa AB e terzo vertice C su una retta assegnata.



Questa costruzione permette di trovare un quadrato (con area) uguale a un rettangolo assegnato. Basta ricostruire parte della figura tracciata per il Teorema di Pitagora e ricordare quanto detto nel corso della sua dimostrazione.



La stessa costruzione consente anche di costruire la *radice quadrata* di un segmento. Se $|AB| = a + 1$, l'altezza h del triangolo rettangolo soddisfa $h^2 + 1 = a + 1$, e quindi $h^2 = a$ e $h = \sqrt{a}$.



Osservazione. Si può sfruttare la "quadratura" del rettangolo e il Teorema di Pitagora per ottenere la quadratura di un qualsiasi poligono: mediante riga e compasso, si può trovare un quadrato di area uguale a un poligono assegnato. Non si può invece risolvere la *quadratura del cerchio*. La sua impossibilità è stata dimostrata solo nel 1882 da Lindemann (equivale alla non costruibilità di π).

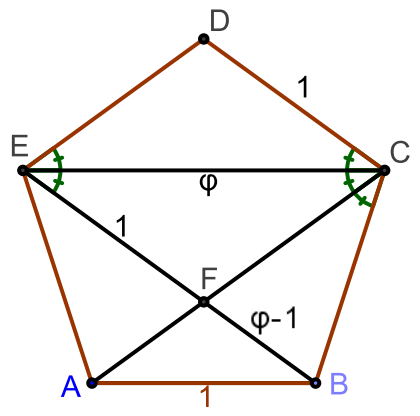
Cartesio mostrò nel 1637 che le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e l'estrazione della radice quadrata sono *tutte e sole* quelle ottenibili mediante riga e compasso.

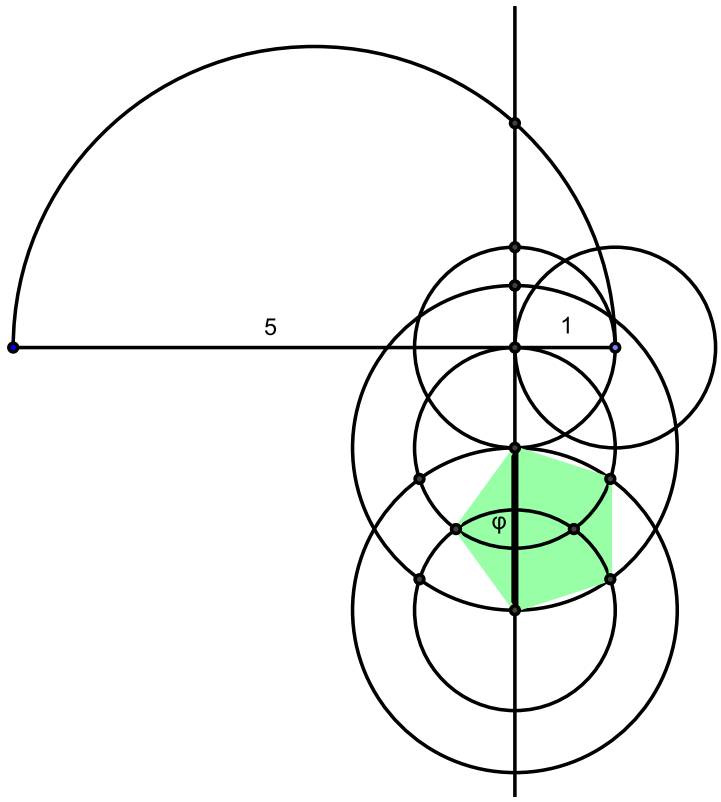
Il pentagono regolare La costruzione della radice quadrata di 5 e quindi della *sezione aurea* $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ permette di ottenere il *pentagono regolare* mediante riga e compasso. Infatti

la diagonale del pentagono regolare di lato 1 ha lunghezza ϕ, come si ottiene dalla similitudine dei triangoli CEF e ABF:

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1},$$

da cui si ottiene $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, cioè $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.





Poliedri regolari

I *poliedri regolari* (detti anche *solidi platonici*) sono solidi le cui facce sono dei poligoni regolari tutti uguali tra loro, e tali che in ogni vertice confluiscono lo stesso numero di facce. Le facce si attaccano lungo gli spigoli, i quali a loro volta confluiscono nei vertici, punti attorno ai quali sono situate tre o più facce.

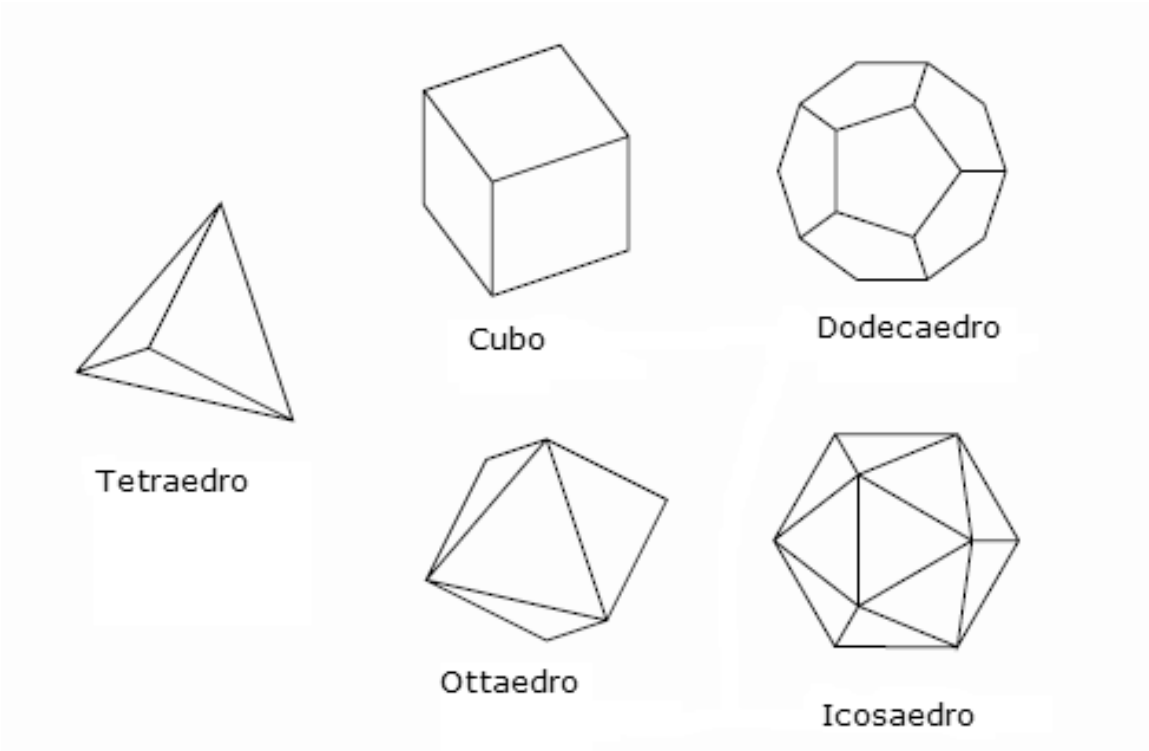
A differenza dei poligoni regolari, ci sono solo cinque solidi regolari: tre con facce triangolari, uno con facce quadrate e uno con facce pentagonali. È una conseguenza di quanto visto sui poligoni regolari che ricoprono il piano. Se si considera un vertice di un poliedro e le facce che stanno attorno a questo vertice, la superficie che si ottiene tagliando lungo uno spigolo si può stendere su un piano.

Si ha un certo numero (tre o più) di poligoni regolari uguali, che si toccano tutti nel vertice, più un certo angolo che si produce quando si apre il poliedro per distenderlo sul piano. La somma degli angoli che stanno attorno al vertice è dunque minore di 2π, e siccome attorno al vertice ci sono almeno tre poligoni, questi devono avere angoli minori di $2\pi/3$.

Ma abbiamo visto che ci sono solo tre poligoni regolari con angoli minori di $2\pi/3$: il triangolo, il quadrato e il pentagono.

Le uniche possibilità sono:

1. il *tetraedro* (4 facce, 3 triangoli in ogni vertice)
2. il *cubo* (6 facce, 3 quadrati in ogni vertice)
3. l'*ottaedro* (8 facce, 4 triangoli in ogni vertice)
4. il *dodecaedro* (12 facce, 3 pentagoni in ogni vertice)
5. l'*icosaedro* (20 facce, 5 triangoli in ogni vertice).



2.8 Gli assiomi di Hilbert

Euclide trovò l'assioma più importante della geometria – l'assioma delle parallele – e identificò i teoremi fondamentali e le relazioni logiche tra di essi. In alcuni casi però la logica non è del tutto corretta (ad esempio, mancano alcuni assiomi geometrici che garantiscano l'esistenza degli oggetti costruiti). Inoltre, la teoria dell'area non ha un supporto geometrico.

Questi problemi ebbero una sistemazione definitiva nel 1899 grazie a David Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*). Hilbert introdusse assiomi di *incidenza* e di *ordinamento*, introdusse l'*aritmetica dei segmenti* e l'*assioma di Dedekind*, che implica la corrispondenza tra i punti della retta e i numeri reali.

Assiomi di incidenza

I1. Per ogni coppia di punti distinti passa sempre un'unica retta.

I2. Ogni retta contiene almeno due punti.

I3. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.

I4. Per ogni retta l e punto P non su l, c'è un'unica retta per P che non interseca l (assioma delle parallele).

Assiomi di ordinamento

O1. Se un punto A sta tra B e C, allora A sta anche tra C e B, ed i tre punti sono allineati.

O2. Dati due punti distinti A e C, esiste un terzo B sulla retta passante per A e C tale che B sta tra A e C.

O3. Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è esattamente uno che giace tra gli altri due.

O4. (Assioma di Pasch) Siano A, B e C tre punti non allineati e l una retta non contenente alcuno dei tre punti A, B, C. Se l contiene un punto del segmento AB, allora contiene anche un punto di uno dei due segmenti AC e BC.

Assiomi di congruenza

C1. Per ogni segmento AB, e per ogni semiretta r con origine in C, esiste un unico punto D su r tale che $AB \cong CD$.

C2. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva e riflessiva (e quindi anche simmetrica): se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, allora $CD \cong EF$. Per ogni AB, $AB \cong AB$.

C3. Sia B tra A e C e sia E tra D e F. Se $AB \cong DE$ e $BC \cong EF$, allora $AC \cong DF$ (somma di segmenti).

C4. Per ogni angolo $\widehat{ABC}$ e ogni semiretta DE, esiste un'unica semiretta DF su un lato fissato di DE tale che $\widehat{ABC} \cong \widehat{EDF}$.

C5. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva e riflessiva (e quindi anche simmetrica): se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, allora $\beta \cong \gamma$. Per ogni angolo α, $\alpha \cong \alpha$.

C6. (LAL) Se per due triangoli ABC e $A'B'C'$ si ha $|AB| = |A'B'|$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $|BC| = |B'C'|$, allora si ha anche $|AC| = |A'C'|$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.

Altri assiomi

E. Due circonferenze si intersecano se una di esse contiene sia punti interni che punti esterni all'altra.

A. (Assioma di Archimede) Per ogni coppia di segmenti AB e CD, esiste un numero naturale n tale che la somma di n copie di AB è maggiore di CD.

D. (Assioma di Dedekind) Se i punti di una retta l sono suddivisi in due sottoinsiemi non vuoti S, T in modo tale che nessun punto di S stia tra due punti di T e nessun punto di T stia tra due punti di S, allora esiste un unico punto P, tale che P sta tra due qualsiasi punti, scelti uno in S e uno in T.

Dunque la retta è *completa*, non ha buchi, e usando l'Assioma di Dedekind si può dimostrare che la retta può essere messa in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali. Comunque, l'assioma (D) non è necessario per ottenere i teoremi di Euclide, che coinvolgono solo i numeri *costruibili* con riga e compasso.

3 Coordinate

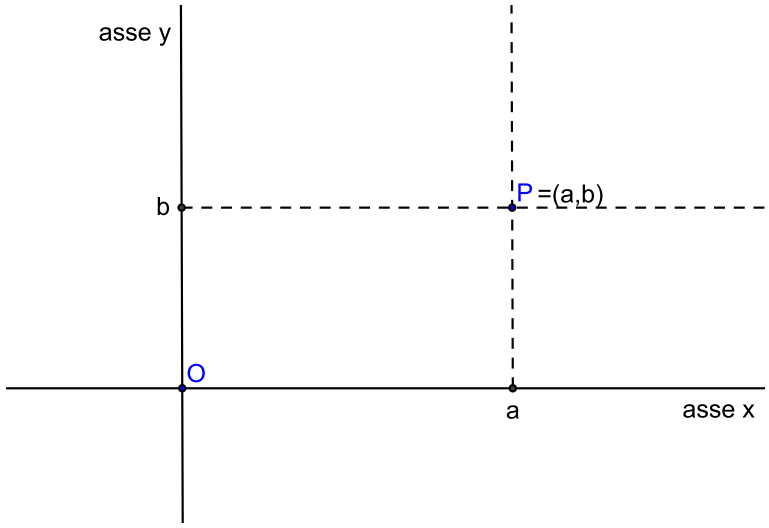
Intorno al 1630, Pierre de Fermat e René Decartes (Cartesio) scoprirono, indipendentemente, i vantaggi dell'uso dei numeri nella geometria, cioè delle *coordinate*.

Cartesio pensava che la geometria fosse quella descritta da Euclide, e che i numeri fossero un aiuto nello studio delle figure geometriche. Solo molto più tardi, nel 1800, dopo la scoperta di geometrie con proprietà non euclidee, divenne conveniente *definire* punti, rette, lunghezza, ecc. mediante i numeri reali, e poi dimostrare che questi soddisfacevano gli assiomi di Euclide-Hilbert (*aritmetizzazione della geometria*).

Si ottiene in questo modo una descrizione algebrica della costruibilità con riga e compasso, che ha reso possibile dimostrare che certe figure *non* sono costruibili. Inoltre è possibile introdurre il concetto di *movimento* nella geometria euclidea, e dare così un fondamento alla dimostrazione di Euclide dei criteri di congruenza.

3.1 La retta reale e il piano reale

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, ordinati secondo la usuale relazione a "minore di" b, fornisce un *modello* della retta e permette di costruire un modello di tutta la geometria piana (e solida) di Euclide.

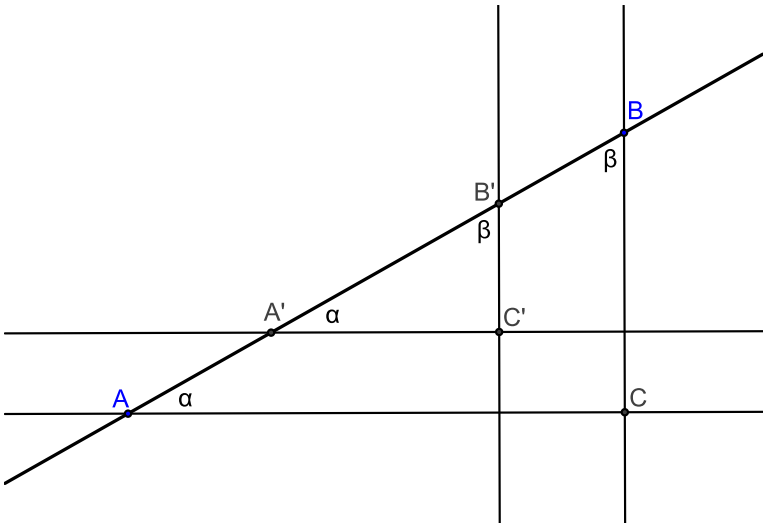


Consideriamo nel piano una coppia di rette perpendicolari, dette *asse* x e *asse* y, con intersezione in un punto O detto *origine*. Orientiamo le rette (a destra e verso l'alto, rispettivamente) e interpretiamo le rette come rette di numeri reali (grazie all'assioma di Dedekind), fissando un intervallo come unità di misura. Per ogni punto P del piano, per l'assioma delle parallele passa un'unica retta parallela all'asse x e un'unica retta parallela all'asse y. Queste rette intersecano gli assi in punti corrispondenti a due numeri reali a e b, detti *coordinate* x e y rispettivamente (o anche *ascissa* e *ordinata* del punto P). Si ottiene una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le *coppie ordinate* di numeri reali, e si scrive $P = (a, b)$.

La *geometria analitica* è basata su questa corrispondenza, che crea un dizionario tra geometria e algebra, in modo tale che problemi geometrici possono essere tradotti in proprietà algebriche di polinomi o altre funzioni di una variabile reale.

3.2 Rette ed equazioni

Una delle principali conseguenze dell'assioma delle parallele, il Teorema di Talete e la similitudine dei triangoli, permette di introdurre il concetto di *pendenza* e di *coefficiente angolare* di una retta.



Presi due punti A, B su una retta non verticale l, e detto C il terzo vertice di un triangolo rettangolo ABC, il rapporto $|BC|/|AC|$ non dipende dalla scelta di A, B. Infatti, se A', B' sono su l e $A'B'C'$ è rettangolo, i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono simili, poiché hanno angoli uguali. I lati corrispondenti sono quindi proporzionali. In particolare,

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|},$$

cioè la pendenza (o coefficiente angolare) è costante.

Osservazione. La pendenza può essere anche un numero negativo o nullo. La pendenza è zero se B e C hanno uguale coordinata y (retta orizzontale). Negli altri casi, bisogna dare un segno alle lunghezze $|BC|$ e $|AC|$: $|BC|$ ha segno positivo se C ha coordinata y maggiore di B (C è "sopra" B) e $|AC|$ ha segno positivo se C ha coordinata x maggiore di A (C sta "a destra" di A). Altrimenti il segno è negativo.

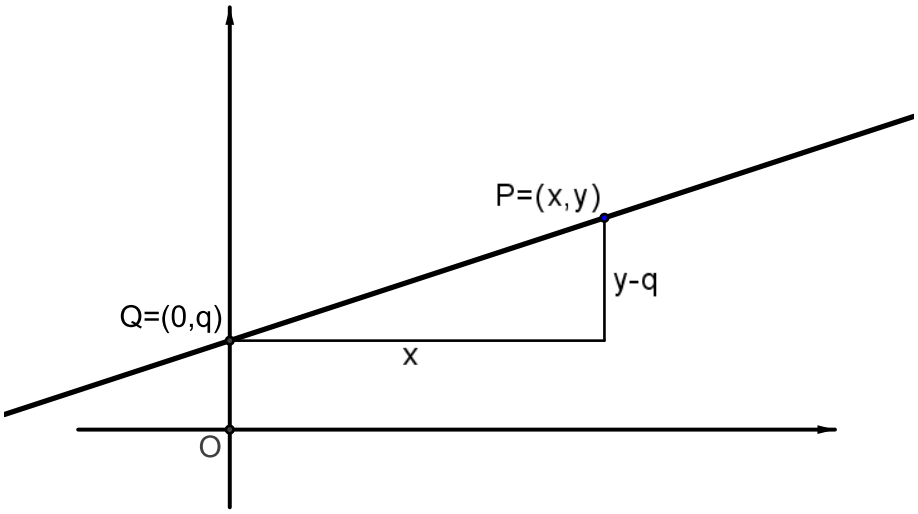
Sia ora l una retta con pendenza m che interseca l'asse y nel punto $Q = (0, q)$. Ogni altro punto $P = (x, y)$ sulla retta l definisce assieme a Q la pendenza della retta:

$$m = \frac{y - q}{x}$$

e quindi, moltiplicando per x,

$$y = mx + q.$$

Questa equazione è soddisfatta da tutti e soli i punti della retta. È detta *equazione (cartesiana) della retta*.



Le rette verticali non hanno una pendenza: hanno equazione $x = c$, c costante. Dunque, tutte le rette hanno un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \text{ costanti reali, con } a, b \text{ non entrambi nulle}),$$

un'equazione *lineare* nelle variabili x, y.

Osservazione. Facendo un ulteriore passo avanti, possiamo cambiare il punto di vista e *definire* il piano come l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, e una retta nel piano come il sottoinsieme di tutte le coppie (x, y) che soddisfano un'equazione lineare $ax+by+c = 0$, con a, b non entrambi nulli. In questo modo la geometria diventa parte dell'algebra o dell'analisi reale.

Si ottiene così un *modello* della geometria assiomatica di Euclide-Hilbert. Infatti gli assiomi possono essere *dimostrati* in questo modello. Ad esempio, l'assioma di costruzione

- esiste un'unica retta passante per due punti distinti,

e l'assioma delle parallele

- per ogni retta l e ogni punto P non appartenente a l, esiste un'unica retta per P che non interseca l

possono essere dimostrati usando l'*algebra lineare*.

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, l'equazione

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

definisce una retta passante per P_1 e P_2. I coefficienti sono $a = y_2 - y_1$, $b = -(x_2 - x_1) \neq 0$, $c = y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$. Inoltre l'equazione può essere riscritta

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad \text{con } m = -\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

o anche

$$y = mx + q, \quad \text{con } q = y_1 - mx_1 .$$

Due rette passanti per P_1 e P_2, di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, hanno coefficienti che soddisfano le equazioni

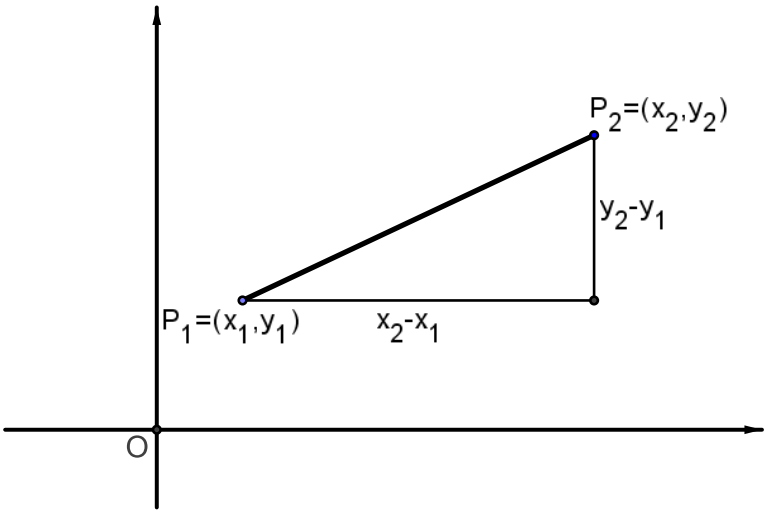
$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q = m'x_1 + q' \\ y_2 = mx_2 + q = m'x_2 + q' \end{cases}$$

Dunque $(m - m')x_1 = q' - q = (m - m')x_2$, da cui $m = m'$ (poiché $x_1 \neq x_2$) e $q = q'$. La retta è unica.

Il caso $x_1 = x_2$ è immediato: $x = x_1$ è l'equazione dell'unica retta per i due punti.

3.3 Distanza

Per introdurre il concetto di *distanza* e di *lunghezza* nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, ci facciamo guidare dalla geometria euclidea per trovare la definizione giusta.



Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, la lunghezza $|P_1P_2|$ è la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo: dal Teorema di Pitagora segue che

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

e quindi

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Se ora *definiamo* la distanza tra due punti di $\mathbb{R}^2$ mediante la formula precedente, si ottiene la validità del Teorema di Pitagora "automaticamente", o meglio, "per definizione". È immediato nel caso in cui il triangolo rettangolo abbia cateti paralleli agli assi, mentre il caso generale può essere ricondotto a quello precedente mediante una rotazione, come vedremo più avanti.

Equazione della circonferenza

Dalla formula della distanza si può ottenere l'*equazione della circonferenza* di centro $C = (a, b)$ e raggio r. I suoi punti $P = (x, y)$ sono caratterizzati dalla proprietà

$$r = |PC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

da cui

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Asse di un segmento

L'insieme dei punti equidistanti da *due* punti distinti P_1 e P_2 è una retta, l'*asse* del segmento P_1P_2.

Se $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$, un punto $P = (x, y)$ è equidistante da P_1 e P_2 se $|PP_1| = |PP_2|$, cioè

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2} = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2},$$

che equivale a

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2.$$

Espandendo e semplificando, si ottiene

$$2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0,$$

l'equazione di una retta nel piano cartesiano.

3.4 Intersezione di rette e circonferenze

Una volta determinate le equazioni di rette e circonferenze, è possibile dare l'equivalente algebrico delle costruzioni con riga e compasso. Trovare i punti di intersezione di rette o circonferenze corrisponde a trovare le soluzioni di una coppia di equazioni di rette o di circonferenze.

Ad esempio, per trovare le intersezioni di due circonferenze

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$

e

$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

si espandono i quadrati e si sottraggono le equazioni

$$x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - r_1^2 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 - r_2^2 = 0, \tag{2}$$

ottenendo

$$2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y + r_2^2 - r_1^2 = 0. \tag{3}$$

Il sistema (1)–(2) è equivalente al sistema delle due equazioni (1)–(3). Risolvendo l'equazione lineare (3) rispetto a x o y, e sostituendo nella (1), si ottiene un'equazione quadratica in una variabile, con una, due o nessuna soluzione reale.

Risolvere un'equazione lineare richiede solo le operazioni $+, -, \times$ e $\div$, mentre risolvere un'equazione quadratica richiede anche l'estrazione della radice quadrata. Dunque, i punti di intersezione coinvolti nelle costruzioni con riga e compasso possono essere calcolati mediante le operazioni $+, -, \times, \div$ e $\sqrt{\ }$.

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato:

Criterio algebrico di costruibilità (Cartesio). *Un punto del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ è costruibile con riga e compasso se e solo se le sue coordinate si possono ottenere da 1 mediante le operazioni $+, -, \times, \div$ e $\sqrt{\ }$.*

Ad esempio, la sezione aurea $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ e $\sqrt{2}$ sono costruibili, mentre la "costante di Delo" $\sqrt[3]{2}$ non lo è perché non si può esprimere mediante radici quadrate.

L'impossibilità di risolvere tre famosi problemi geometrici, la *duplicazione del cubo*, la *trisezione dell'angolo* e la *quadratura del cerchio* mediante riga e compasso, venne dimostrata usando il criterio algebrico di Cartesio e l'algebra moderna introdotta da Abel e Galois solo nel 1800 (Wantzel 1837, Lindemann 1882).

La possibilità di costruire il poligono regolare con 17 lati venne provata da Gauss nel 1796 usando lo stesso criterio (e i numeri complessi).

Osservazione. Se si utilizza una riga *graduata*, che permette di riportare una lunghezza assegnata su una retta passante per un punto, si possono ottenere anche i punti con coordinate ottenute risolvendo equazioni di terzo e quarto grado. In particolare, si può duplicare il cubo e trisecare l'angolo.

3.5 Angoli e coefficienti angolari

Date due rette non perpendicolari l_1 e l_2, con coefficienti angolari m_1 e m_2 rispettivamente, la *pendenza relativa di l_1 rispetto a l_2* è definita come

$$\pm\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

La formula deriva dalla relazione trigonometrica

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2},$$

poiché la relazione tra il coefficiente angolare e l'angolo θ tra la retta e l'asse x è $m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$.

L'ambiguità nel segno deriva dal fatto che le due rette definiscono *due* angoli con somma π. La pendenza relativa può essere utilizzata per stabilire se due angoli sono uguali. In questo modo, si possono anche *dimostrare* i criteri di congruenza LAL e ALA nel piano cartesiano e ottenere la validità di tutti gli assiomi di Euclide e Hilbert.

Nel caso di rette perpendicolari, non parallele agli assi, i coefficienti angolari soddisfano la relazione $m_1 m_2 = -1$. Per ottenere questa proprietà, consideriamo una retta l, di equazione

$$y = m_1 x + q_1.$$

Presi due punti $P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$ sulla retta, l'asse del segmento P_1P_2 ha equazione della forma

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c = 0.$$

Dunque ogni retta perpendicolare a l ha coefficiente angolare

$$m_2 = -\frac{2(a_2 - a_1)}{2(b_2 - b_1)} = -\frac{a_2 - a_1}{m_1 a_2 + q - m_1 a_1 - q} = -\frac{a_2 - a_1}{m_1(a_2 - a_1)} = -\frac{1}{m_1}.$$

3.6 Isometrie

Una possibile debolezza del modello $\mathbb{R}^2$ del piano euclideo è l'apparente particolarità di un punto, l'origine, e di due rette, gli assi. Questo possibile difetto di $\mathbb{R}^2$ può essere risolto considerando delle *trasformazioni* che trasformano un punto qualsiasi nell'origine delle coordinate e una retta qualsiasi nell'asse x.

Una *trasformazione* del piano è una qualsiasi funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. f è detta *isometria* se manda ogni coppia di punti P_1 e P_2, in punti $f(P_1)$, $f(P_2)$ che hanno la stessa distanza:

$$|f(P_1)f(P_2)| = |P_1P_2|$$

per ogni P_1, P_2. Una isometria è anche detta *movimento rigido* del piano. Questa idea restituisce fondamento al *principio di sovrapposizione* utilizzato da Euclide per *dimostrare*, per esempio, il criterio LAL.

Traslazioni

Una *traslazione* muove ogni punto del piano di una distanza fissata in una direzione data. Ogni traslazione dipende da due costanti a, b, e sarà denotata con $t_{a,b}$:

$$t_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b).$$

È facile mostrare che $t_{a,b}$ è un'isometria: dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$,

$$|t_{a,b}(P_1)t_{a,b}(P_2)| = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |P_1P_2|.$$

Si osservi che $t_{a,b}(0, 0) = (a, b)$.

Rotazioni

Siano c, s due numeri reali tali che $c^2 + s^2 = 1$. La *rotazione* del piano, attorno all'origine O, definita da c e s, è la trasformazione

$$r_{c,s}(x, y) = (cx - sy, sx + cy).$$

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned}
|r_{c,s}(P_1)r_{c,s}(P_2)| &= \sqrt{(c(x_2 - x_1) - s(y_2 - y_1))^2 + (s(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1))^2} \\
&= \sqrt{(c^2 + s^2)(x_2 - x_1)^2 + (c^2 + s^2)(y_2 - y_1))^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1))^2} \\
&= |P_1P_2|,
\end{aligned}$$

e quindi $r_{c,s}$ è una isometria.

Inoltre, $r_{c,s}(O) = O$, $r_{c,s}(1, 0) = (c, s)$, $r_{c,s}(0, 1) = (-s, c)$. Interpretando c e s rispettivamente come il coseno e il seno di un angolo θ compreso tra 0 e 2π, si ottiene la *rotazione di un angolo θ (in senso antiorario) attorno all'origine O*.

Componendo la rotazione attorno ad O con traslazioni, si ottiene la *rotazione attorno a un qualsiasi punto P* del piano.

Riflessioni

La *riflessione rispetto all'asse* x è la trasformazione h_x definita da $h_x(x, y) = (x, -y)$. Si tratta di un'isometria, come è facile verificare.

La riflessione h_l rispetto a una qualsiasi retta l, si riconduce a h_x combinando traslazioni e rotazioni. Ad esempio, la riflessione rispetto alla retta $y = x + 1$ si ottiene componendo le seguenti isometrie:

- $t_{0,-1}$, che trasla la retta $y = x + 1$ nella retta per l'origine $y = x$,
- la rotazione $r_{\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, che trasforma la retta $y = x$ nell'asse x,
- la riflessione h_x,
- la rotazione $r_{\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}}$ e
- la traslazione $t_{0,1}$, che riportano l'asse x nella retta $y = x + 1$.

Glissoriflessioni

Una *glissoriflessione* è l'isometria che si ottiene effettuando una riflessione, rispetto a una retta l, seguita da una traslazione nella direzione della retta l. Ad esempio, la trasformazione $f(x, y) = (x + 1, -y)$ è ottenuta componendo la riflessione h_x con la traslazione $t_{1,0}$.

Una glissoriflessione non è né una traslazione, né una rotazione o una riflessione (non fissa alcun punto, diversamente da rotazioni e riflessioni, e trasforma in se stessa solo una retta, non infinite rette come una traslazione).

3.7 Il teorema delle tre riflessioni

Una isometria di $\mathbb{R}^2$ *è determinata dalle immagini* $f(A), f(B), f(C)$ *di tre punti* A, B, C *non allineati* (cioè di un triangolo). Infatti:

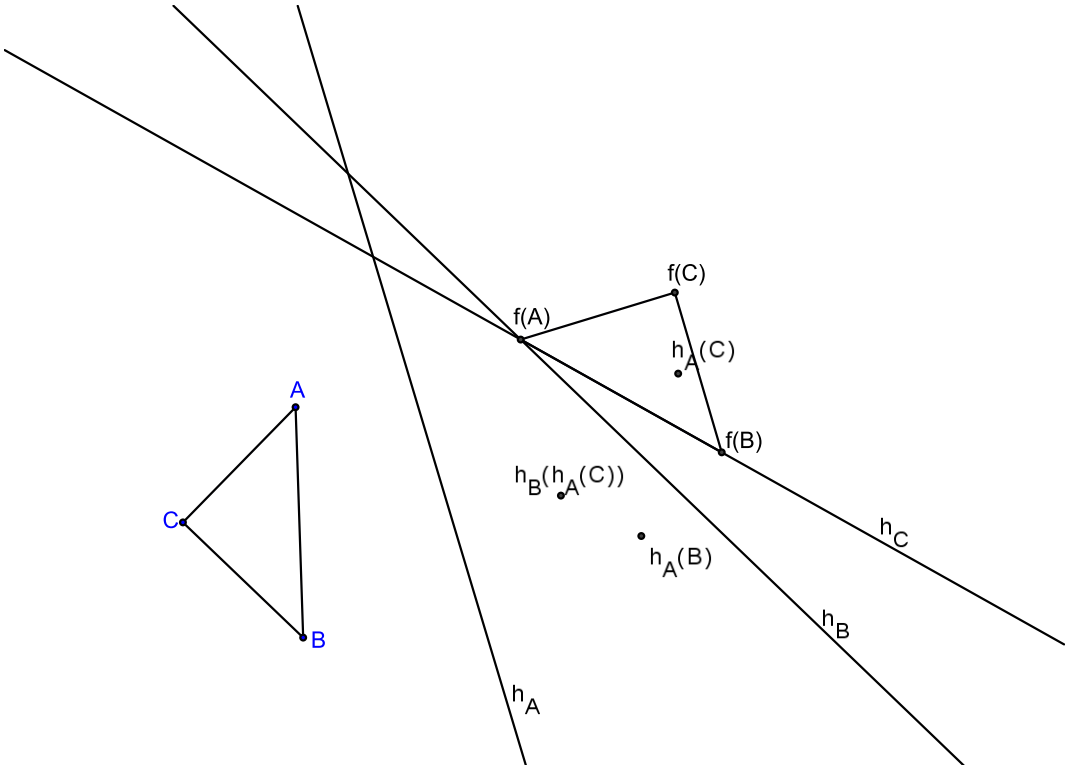
- Ogni punto P è determinato dalla sua distanza da A, B, C: se $Q \neq P$ avesse le stesse distanze da A, B, C, allora A, B, C starebbero sull'asse del segmento PQ.
- L'isometria f trasforma il triangolo ABC nel triangolo congruente di vertici $f(A), f(B), f(C)$.
- $f(P)$ è univocamente determinato dalle distanze $|f(P)f(A)| = |PA|$, $|f(P)f(B)| = |PB|$, $|f(P)f(C)| = |PC|$.

Osservazione. Ogni isometria *trasforma rette in rette.*

Siano A, B, C allineati. Se $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ non fossero allineati, esisterebbe un punto Q a distanza d da $f(A), f(B), f(C)$ (l'intersezione degli assi dei segmenti $f(A)f(B)$ e $f(B)f(C)$). Ma allora si potrebbero trovare due punti P e P', distinti, a distanza d rispettivamente da A e B e da B e C (P sull'asse del segmento AB e P' sull'asse di BC), tali che $f(P) = Q = f(P')$. Ma ogni isometria è iniettiva, poiché preserva le distanze: $|PP'| = |f(P)f(P')| = |QQ| = 0$. Quindi dovrebbe essere $P = P'$ e si ottiene una contraddizione.

Teorema delle tre riflessioni. *Ogni isometria di* $\mathbb{R}^2$ *è la composizione di una, due o tre riflessioni.*

Infatti, per quanto visto sopra, basta mostrare che, fissati tre punti non allineati A, B, C, esiste una composizione di riflessioni che manda A in $f(A)$, B in $f(B)$, C in $f(C)$.



Sia h_A la riflessione rispetto all'asse del segmento $Af(A)$. Allora $h_A(A) = f(A)$.

Se $h_A(B) \neq f(B)$, si considera la seconda riflessione h_B rispetto all'asse del segmento $h_A(B)f(B)$. La composizione $h_B \circ h_A$ manda B in $f(B)$, ma manda anche A in $f(A)$, poiché $h_A(A) = f(A)$ e $f(A)$ appartiene all'asse del segmento $h_A(B)f(B)$:

$$|f(A)f(B)| = |AB| = |h_A(A)h_A(B)| = |f(A)h_A(B)|.$$

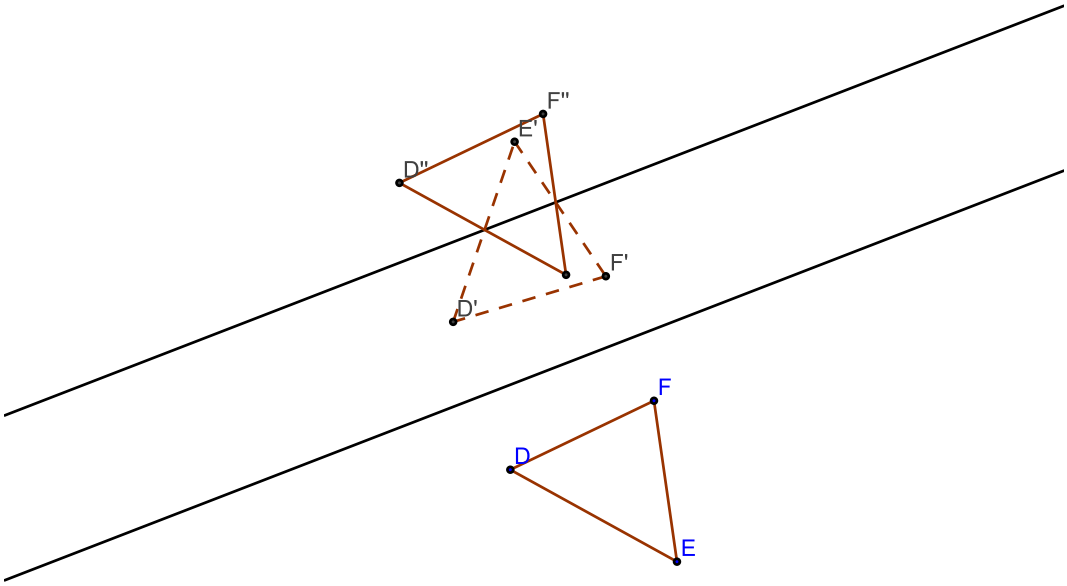
Dunque $h_B \circ h_A(A) = h_B(f(A)) = f(A)$, e $h_B \circ h_A(B) = f(B)$.

Si procede in modo analogo per il punto C. Se $C' = h_B \circ h_A(C) = f(C)$, allora $f = h_B \circ h_A$. Altrimenti, sia h_C la riflessione rispetto all'asse del segmento $C'f(C)$. $f(A)$ e $f(B)$ stanno su quest'asse. Quindi la composizione $h_C \circ h_B \circ h_A$ manda A in $f(A)$, B in $f(B)$ e C in $h_C(C') = f(C)$. Dunque $f = h_C \circ h_B \circ h_A$.

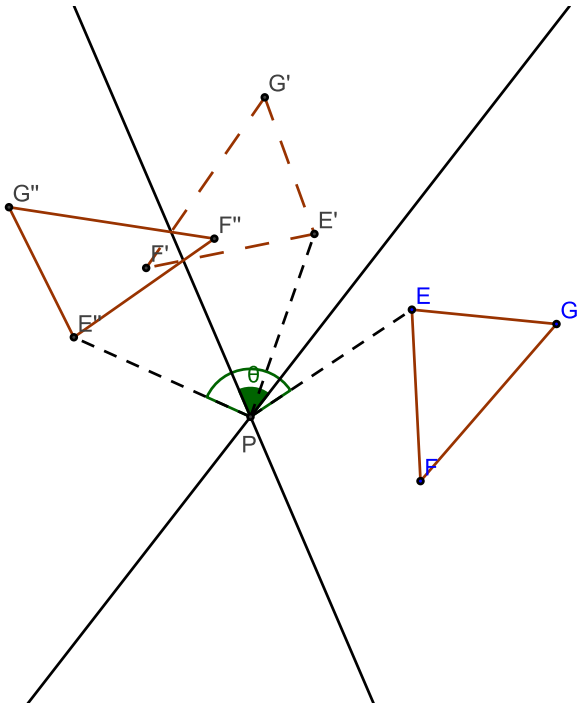
Osservazione

- Se l'isometria è composizione di *due* riflessioni, allora è una traslazione oppure una rotazione, a seconda che le rette di riflessione siano parallele oppure incidenti (nel centro di rotazione).
- Se l'isometria è composizione di *tre* riflessioni, rispetto a tre rette non tutte parallele, allora è una glissoriflessione. Se le tre rette sono parallele, si ottiene una riflessione.

La composizione di due riflessioni rispetto a rette parallele che distano d, è la traslazione nella direzione perpendicolare alle rette, di lunghezza $2d$.



La composizione di due riflessioni rispetto a rette che si intersecano nel punto P, con angolo θ, è la rotazione attorno a P di un angolo 2θ. Si osservi che la rotazione dipende solo dal punto P e dall'angolo formato dalle due rette.



Se l'isometria f è composizione di tre riflessioni, rispetto a rette non parallele m, n e l, in quest'ordine, allora

$$f = (h_l \circ h_n) \circ h_m = (h_{l'} \circ h_{n'}) \circ h_m,$$

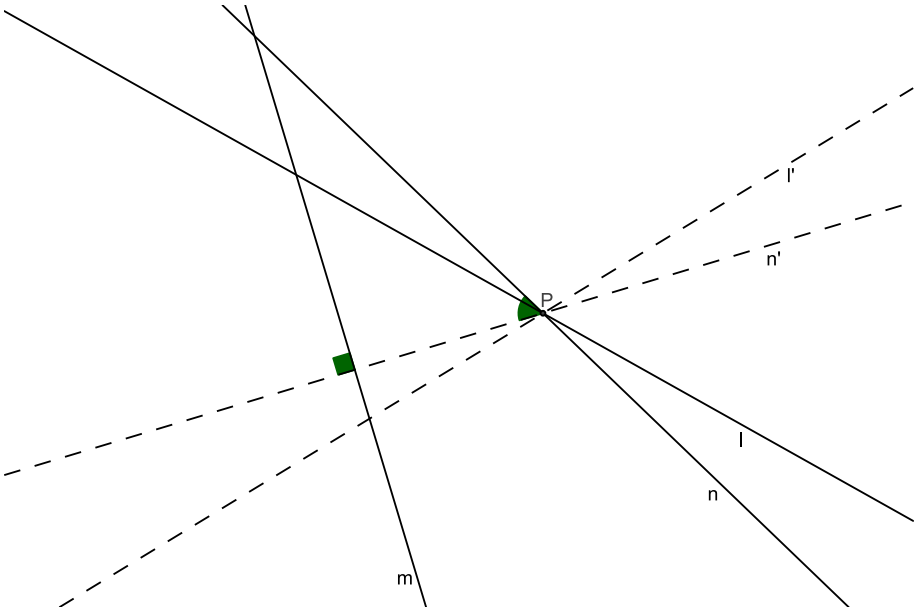
con l' e n' che possono essere scelte in modo che n' sia perpendicolare a m. Inoltre

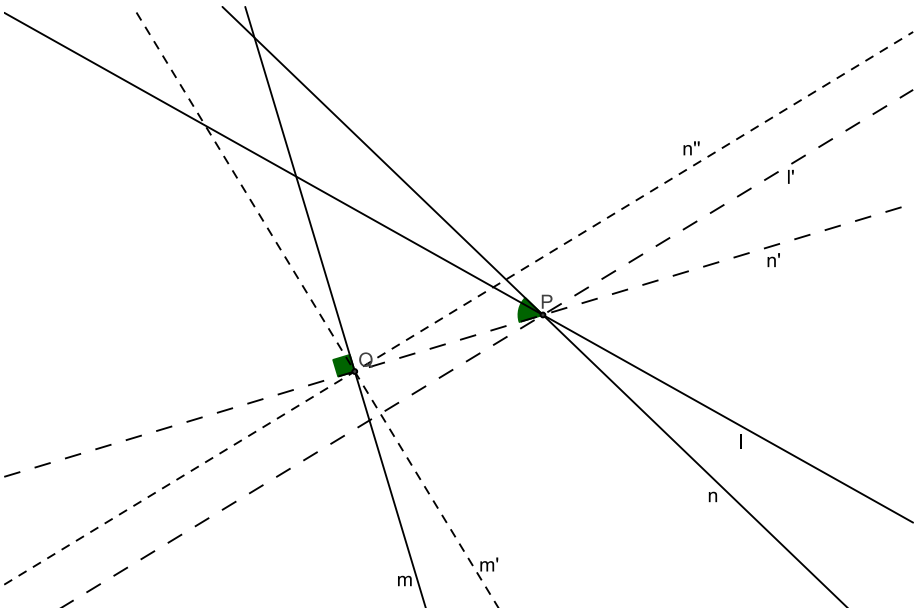
$$f = (h_{l'} \circ h_{n'}) \circ h_m = h_{l'} \circ (h_{n'} \circ h_m) = h_{l'} \circ (h_{n''} \circ h_{m'}),$$

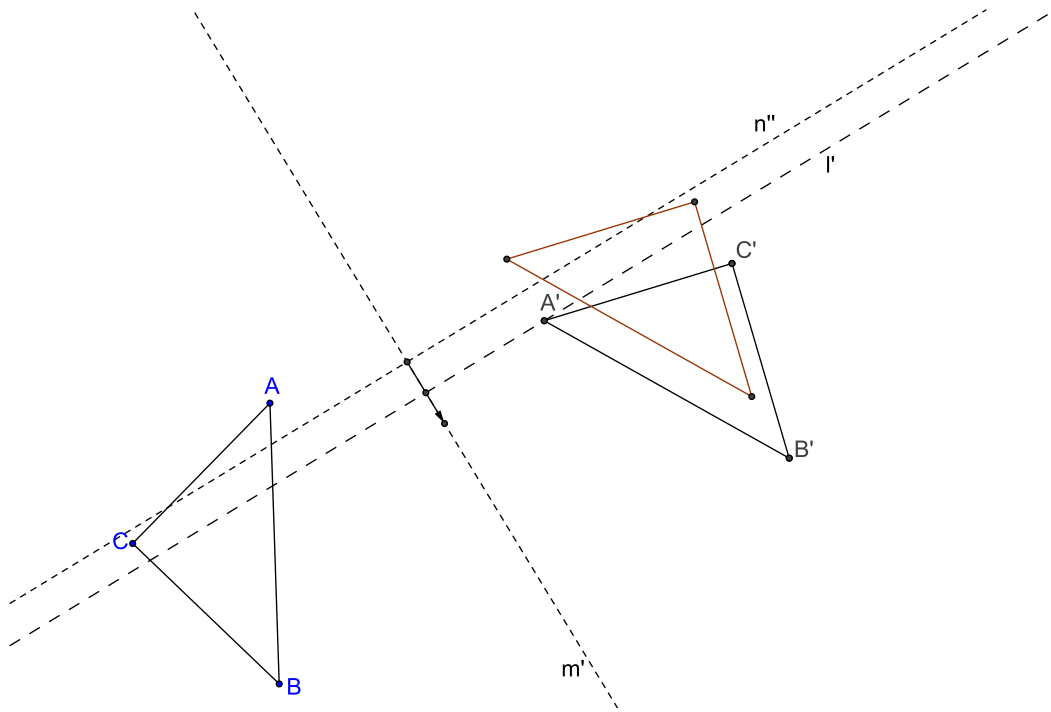
con n'' parallela a l' e perpendicolare a m'. Dunque

$$f = (h_{l'} \circ h_{n''}) \circ h_{m'} = t \circ h,$$

con h riflessione rispetto alla retta m' e t traslazione in direzione perpendicolare a m'. Si tratta dunque di una glissoriflessione.







Osservazione. L'insieme $\mathcal{I}$ costituito da tutte le isometrie del piano cartesiano è un *gruppo* rispetto all'operazione di composizione. L'elemento neutro è la funzione identità definita da: $f(P) = P$ per ogni punto P. Ogni isometria è una funzione invertibile, con inversa f^{-1} ancora isometria. Si noti che l'operazione *non* è commutativa: in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

La geometria euclidea può anche essere descritta come lo studio delle proprietà che sono *invarianti* per le isometrie del gruppo $\mathcal{I}$ (come distanza, angolo, allineamento).