Geometria III

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2016/2017
6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano S e X i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$ definiti ponendo:

- S è il segmento di $\mathbb{R}^3$ avente per estremi i punti $(0,0,-1)$ e $(0,0,1)$;
- $X := \mathbb{S}^2 \cup S$, dove $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$ utilizzando il teorema di Mayer-Vietoris.

(1b) Si dica se esiste un punto P di X tale che il sottospazio topologico $X \setminus \{P\}$ di X sia omeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

SOLUZIONE: (1a) Siano $N := (0,0,1)$, $S := (0,0,-1)$ e $O := (0,0,0)$. Indichiamo con E l'equatore $\mathbb{S}^2 \cap \{z=0\}$ di $\mathbb{S}^2$ e scegliamo un punto T di E. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{X_1, X_2\}$ di X definito ponendo $X_1 := X \setminus \{N\}$ e $X_2 := X \setminus \{S\}$. Si osservi che X_1 e X_2 sono contraibili, e $E \cup \{0\}$ è un retratto di deformazione di $X_1 \cap X_2$. In particolare vale che $H_q(X_1 \cap X_2) = 0$ se $q \geq 2$, $H_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}$ e $H_0(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}\langle [O]_{X_1 \cap X_2} \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle [T]_{X_1 \cap X_2} \rangle$, dove $[O]_{X_1 \cap X_2}$ e $[T]_{X_1 \cap X_2}$ indicano rispettivamente le classi di omologia di O e T in $H_0(X_1 \cap X_2)$. Poiché X è connesso per archi, si ha che $H_0(X) = \mathbb{Z}\langle [T]_X \rangle$. Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris per l'omologia di X associata al ricoprimento aperto $\{X_1, X_2\}$ di X segue che $H_q(X) = 0$ se $q \geq 3$, $H_2(X) = \mathbb{Z}$ e la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}\langle [O]_{X_1 \cap X_2} \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle [T]_{X_1 \cap X_2} \rangle \xrightarrow{\phi_0 \oplus \psi_0} \mathbb{Z}\langle [T]_{X_1} \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle [T]_{X_2} \rangle,$$

dove $\phi_0([O]_{X_1 \cap X_2}) = \phi_0([T]_{X_1 \cap X_2}) = [T]_{X_1}$ e $\psi_0([O]_{X_1 \cap X_2}) = \psi_0([T]_{X_1 \cap X_2}) = -[T]_{X_2}$. Segue che

$$H_1(X) \simeq \ker(\phi_0 \oplus \psi_0) = \mathbb{Z}\langle [O]_{X_1 \cap X_2} - [T]_{X_1 \cap X_2} \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

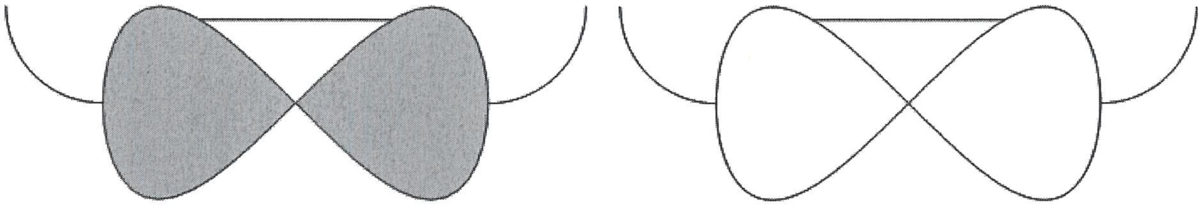
Per calcolare $H_1(X)$ si può anche utilizzare la successione esatta di Mayer-Vietoris per l'omologia ridotta di X associata al ricoprimento aperto $\{X_1, X_2\}$ di X. Infatti $\widetilde{H}_0(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}\langle [O]_{X_1 \cap X_2} - [T]_{X_1 \cap X_2} \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_0(X_1) = 0$ e $\widetilde{H}_0(X_2) = 0$, dunque la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Segue che $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$.

(1b) Supponiamo che esista un punto P di X ed un omeomorfismo $\phi : X \setminus \{P\} \to \mathbb{S}^2$. Proviamo che ciò è impossibile. Distinguiamo due casi. Supponiamo che $P \in S$. Scegliamo $Q \in S \setminus \{P\}$. L'omeomorfismo ϕ induce un omeomorfismo tra $X \setminus \{P, Q\}$ e $\mathbb{S}^2 \setminus \{\phi(Q)\}$. Ciò è assurdo in quanto $\mathbb{S}^2 \setminus \{\phi(Q)\}$ è connesso per archi, mentre $X \setminus \{P, Q\}$ non lo è. Supponiamo infine che $P \notin S$. In questo caso ϕ induce un omeomorfismo tra $X \setminus \{P, N, S\}$ e $\mathbb{S}^2 \setminus \{\phi(N), \phi(S)\}$. D'altra parte quest'ultimo spazio topologico è connesso per archi, mentre $X \setminus \{P, N, S\}$ non lo è. Segue che l'omeomorfismo ϕ non esiste.

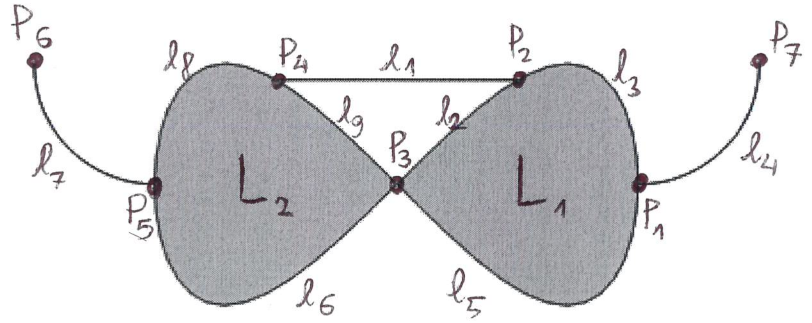
Esercizio 2. Si considerino i due sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$ rappresentati in figura: lo spazio topologico O ("occhiali") e il suo sottospazio M ("montatura").



(2a) Calcolare il gruppo fondamentale di O.

(2b) Stabilire se M è un retratto/retratto di deformazione di O.

SOLUZIONE: (2a) Lo spazio topologico O è un CW complesso che si può ottenere a partire da sette 0-celle $\{P_1, \dots, P_7\}$, nove 1-celle $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_9\}$ e due 2-celle $\{L_1, L_2\}$ (vedi figura).



Il sottocomplesso C di O formato dalle sette 0-celle, dalle 1-celle $\{\ell_2, \dots, \ell_9\}$ e dalle due 2-celle è contraibile. Dunque O è omotopicamente equivalente a X/C. D'altra parte X/C è omeomorfo alla 1-cella ℓ_1 con gli estremi P_2 e P_4 identificati. Segue che X/C è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e quindi $\pi_1(X) = \pi_1(X/C) = \mathbb{Z}$.

(2b) Si osservi che il sottocomplesso D di M formato dalle sette 0-celle e dalle 1-celle $\{\ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_7, \ell_8, \ell_9\}$ è contraibile. Dunque M è omotopicamente equivalente a X/D e quindi a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Segue che $\pi_1(M) = \pi_1(M, P_3) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}$ (infatti $\mathrm{Ab}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3 \not\simeq \mathbb{Z} = \mathrm{Ab}(\mathbb{Z})$), dunque M non è un retratto di deformazione di O.

Si osservi che $\pi_1(M, P_3)$ è il gruppo libero generato dalle classi di omotopia $[\alpha]_M, [\beta]_M, [\gamma]_M$ relativa a $\{0, 1\}$ di tre lacci α, β, γ in M, dove

- α parametrizza (in successione) le 1-celle ℓ_2, ℓ_3, ℓ_5,
- β parametrizza le 1-celle ℓ_6, ℓ_8, ℓ_9,
- γ parametrizza le 1-celle ℓ_2, ℓ_1, ℓ_9.

Sia $i_* : \pi_1(M, P_3) \to \pi_1(O, P_3)$ l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i : M \hookrightarrow O$. Poiché α è omotopa al laccio costante ($\equiv P_3$) relativamente a $\{0, 1\}$ (per mezzo di una omotopia a valori in L_1), vale: $i_*([\alpha]_M) = [\alpha]_O = 1 \in \pi_1(O, P_3)$. Segue che l'omomorfismo i_* non è iniettivo e quindi M non è neanche un retratto di O.

Esercizio 3.

(3a) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2 - 2}{(z-1)(z+1)^3} dz$$

lungo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

(3b) Qual è il residuo all'infinito della funzione integranda $f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)(z+1)^3}$?

SOLUZIONE: (3a) La funzione meromorfa $f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)(z+1)^3}$ ha due poli: uno semplice per $z = 1$ e uno triplo per $z = -1$. Entrambi i poli sono interni alla curva γ, per cui il Teorema dei residui fornisce l'integrale: $I = 2\pi i\,(\mathrm{Res}_1(f) + \mathrm{Res}_{-1}(f))$.

I residui sono $1/8$ in $z = -1$ e $-1/8$ in $z = 1$, per cui $I = 0$. Infatti

$$\mathrm{Res}_1(f) = \mathrm{Res}_1\left(\frac{1}{z-1}\frac{z^2-2}{(z+1)^3}\right) = \frac{z^2-2}{(z+1)^3}_{|z=1} = -\frac{1}{8}$$

e

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left(((z+1)^3 f(z))^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\left(\left(\frac{z^2-2}{z-1}\right)^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{1}{8}.$$

(3b) Dal punto (3a), ricordando che la somma dei residui di f in $\mathbb{C}$ e del residuo all'infinito è zero, si ottiene che $\mathrm{Res}_\infty(f) = 0$. Oppure il calcolo diretto fornisce:

$$\mathrm{Res}_\infty(f) = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{f(\frac{1}{w})}{w^2}\right) = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{f(\frac{1}{w})}{w^2}\right) = \mathrm{Res}_0\left(\frac{-2w^2+1}{(w-1)(w+1)^3}\right) = 0.$$

Esercizio 4. Sia $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{kx}\cos y \sin y.$$

(4a) Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x,y)$ è parte reale di una funzione olomorfa.

(4b) Per un valore di k trovato in (4a), determinare una funzione olomorfa f con parte reale u.

SOLUZIONE: (4a) Condizione necessaria e sufficiente affinché u sia (localmente) parte reale di una funzione olomorfa è che u sia armonica. Essendo

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} = (k^2-4)e^{kx}\cos y \sin y,$$

u è armonica se e solo se $k = \pm 2$.

(4b) Poniamo $k = 2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann per l'armonica coniugata v sono:

$$\begin{cases} v_x = -u_y = 2y - e^{2x}\cos(2y) \\ v_y = u_x = 2x + 2e^{2x}\cos y \sin y = 2x + e^{2x}\sin y \end{cases}$$

La funzione $v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2y) + C$, con C costante reale, è soluzione del sistema. Ponendo $C = 0$, si ottiene la funzione olomorfa $f = u + iy = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2y) + i(2xy - \frac{1}{2}e^{2x}\cos(2y)) = z^2 - \frac{i}{2}e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) = z^2 - \frac{i}{2}e^{2z}$.

Per $k = -2$, un calcolo simile porta alla funzione olomorfa $f(z) = z^2 + \frac{i}{2}e^{-2z}$.