

Geometria III

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2016/2017

3 luglio 2017

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata.** Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

ATTENZIONE. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia \mathbb{R}^3 lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano T e S i sottospazi topologici di \mathbb{R}^3 definiti ponendo:

- T è il toro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$;
- $S := T \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia relativa $H_q(T, S)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica se S è un retratto di T .

Esercizio 2. Sia X lo spazio topologico ottenuto dal piano proiettivo reale identificando due punti.

(2a) Calcolare il gruppo fondamentale di X .

(2b) Lo spazio X è omeomorfo a una superficie topologica orientabile?

Esercizio 3. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = e^z - e^2$.

(3a) Stabilire su quale regione del piano complesso la funzione $g(z) = 1/f(z)$ è olomorfa.

(3b) Calcolare gli integrali di f e di g lungo la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}$$

applicando il Teorema dei residui.