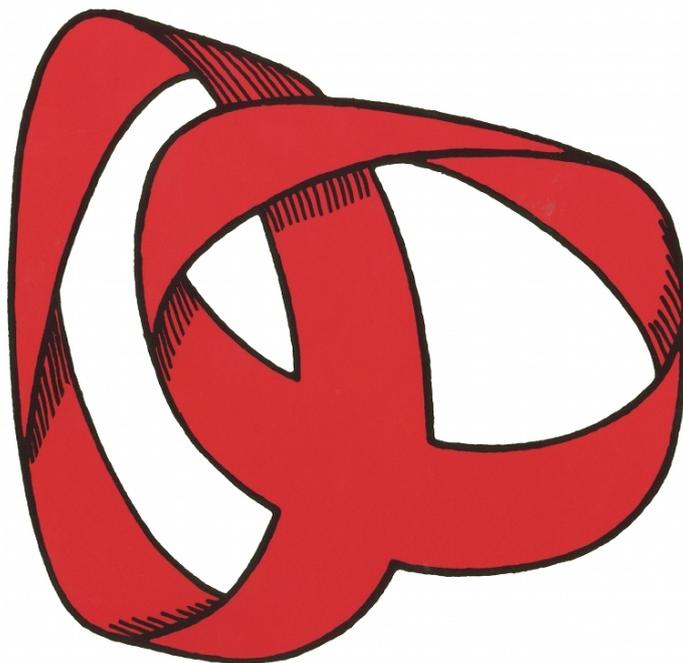

Gianluca Occhetta

Note di
Topologia Algebrica e
Analisi Complessa



Dipartimento di Matematica
Università di Trento
Via Sommarive 14
38050 - Povo (TN)

Nota per la lettura

Queste note raccolgono gli argomenti (alcuni variabili negli anni) svolti prima nei corsi di Geometria IV unità didattica e Analisi Complessa, e poi nel corso di Geometria III, dall'a.a. 2010-2011 del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Trento. Per alcune parti di queste note, nonché per suggerimenti e correzioni, sono debitore a Davide Panizzolo, Elisa Tasso, Roberto Pignatelli, Riccardo Ghiloni, Valentina Paterno e Davide Pastorello. Sono anche grato agli studenti che mi hanno via via segnalato imprecisioni e proposto modifiche e mi assumo la responsabilità di tutti gli errori che possono essere rimasti.

Gianluca Occhetta

Indice

Nota per la lettura	iii
Indice	iv
I Topologia Algebrica	1
1 Superfici topologiche	3
1.1 Varietà topologiche	3
1.2 Superfici compatte	7
2 Omotopia	13
2.1 Omotopia di applicazioni continue	13
2.2 Tipo d'omotopia - Retratti	15
2.3 CW-complessi finiti	17
3 Il gruppo fondamentale	23
3.1 Il gruppo fondamentale	23
3.2 Omomorfismo indotto	25
3.3 Teorema di invarianza per omotopia	27
4 Teorema di Seifert-Van Kampen e applicazioni	31
4.1 Gruppi con presentazione	31
4.2 Il teorema di Seifert-Van Kampen	34
4.3 Gruppo fondamentale e retrazioni	40
4.4 Il teorema di classificazione delle superfici compatte	41
5 Rivestimenti	49
5.1 Azioni di gruppo	49
5.2 Rivestimenti	50
5.3 Sollevamenti	52

5.4	Rivestimenti e gruppo fondamentale	55
6	Omologia singolare	57
6.1	Gruppi abeliani e successioni esatte	57
6.2	Complessi di catene	60
6.3	Omologia singolare	61
6.4	Significato geometrico di $H_0(X)$ e $H_1(X)$	65
7	Teorema di Mayer-Vietoris, . . .	69
7.1	Successione esatta di Mayer-Vietoris	69
7.2	Omologia di una coppia e retrazioni	78
7.3	Omologia locale e invarianza della dimensione	83
II	Analisi Complessa	87
8	Funzioni olomorfe	89
8.1	Richiami sui numeri complessi	89
8.2	Funzioni complesse. Continuità e differenziabilità	91
8.3	Serie di potenze	94
8.4	Estensione complessa di alcune funzioni notevoli	96
9	Integrazione lungo curve	101
9.1	Integrazione lungo curve	101
9.2	Il teorema di Cauchy - versione locale	104
9.3	Indice di un punto rispetto a una curva	109
9.4	Formula integrale e applicazioni	111
10	Il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy	115
10.1	Catene omologhe	115
10.2	Il Teorema di Cauchy - Dimostrazione di Dixon	116
11	Altre applicazioni della formula integrale	121
11.1	Successioni di funzioni olomorfe	121
11.2	Serie di Laurent	122
11.3	Singularità isolate di funzioni olomorfe	123
12	Residui	127
12.1	Teorema dei residui	127
12.2	Calcolo dei residui	128
12.3	Applicazioni al calcolo di integrali indefiniti	132
12.4	Applicazioni al calcolo di somme di serie	138
13	Zeri di funzioni olomorfe (e meromorfe)	141
13.1	Principio d'identità	141

INDICE

13.2 Principio dell'argomento	142
13.3 Teorema di Rouché	143
13.4 Comportamento locale e applicazioni	144
14 Complementi	145
14.1 Prolungamento analitico	145
14.2 Superfici di Riemann - Cenni introduttivi	152
Indice analitico	159
Bibliografia	161

Parte I
Topologia Algebrica

Una varietà topologica è uno spazio topologico con alcune buone proprietà (ad esempio essere di Hausdorff e connesso) che localmente è simile allo spazio euclideo. In questo capitolo introdurremo la definizione di varietà topologica, con alcuni esempi, andando ad esaminare poi in modo particolare le superfici topologiche compatte. Vedremo due famiglie particolari di tali superfici, che possono essere costruite partendo dal toro e dal piano proiettivo, mediante un'operazione detta "somma connessa". Nel Capitolo 4 dimostreremo che tali superfici non sono tra loro omeomorfe e sono, a meno di omeomorfismo, tutte e sole le superfici compatte.

1.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente euclideo* se per ogni suo punto x esistono un intero n e un intorno aperto U di x omeomorfo a un disco aperto n -dimensionale \mathring{D}^n (o, equivalentemente, a \mathbb{R}^n). Sia $\varphi : U \rightarrow \mathring{D}^n$ l'omeomorfismo; la coppia (U, φ) è detta *carta locale*, U è detto *dominio* della carta locale. La carta locale si dice *centrata* in $x \in X$ se $\varphi(x)$ è l'origine in \mathbb{R}^n .

Useremo ora un risultato che verrà dimostrato più avanti (Cf. 7.29):

Teorema 1.2 (Teorema di invarianza della dimensione). *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ aperti. Se esiste un omeomorfismo tra U e V allora $n = m$.*

Dal teorema appena enunciato segue che, se X è uno spazio topologico localmente euclideo, allora per ogni suo punto x si può definire la *dimensione locale* $\dim_x(X)$ nel modo seguente: $\dim_x(X) = n$ se esiste una carta locale (U, φ) il cui dominio contiene x tale che φ sia un omeomorfismo tra U e un disco aperto di \mathbb{R}^n . Infatti, se (V, ψ) è un'altra carta locale che contiene x , con ψ omeomorfismo tra V e un disco aperto di \mathbb{R}^m , allora $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ è un omeomorfismo tra $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$, e quindi $m = n$.

Proposizione 1.3. *Se X è uno spazio topologico localmente euclideo e connesso, allora la dimensione locale non dipende dal punto, e viene detta dimensione di X .*

Dimostrazione. Poiché X è connesso è sufficiente provare che la dimensione locale è localmente costante, cioè che, per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto su cui è costante; infatti una funzione localmente costante a valori interi è continua se si dota \mathbb{N} della topologia discreta, e i connessi di tale topologia sono i

sottospazi costituiti da un solo punto.

La proprietà cercata segue dal fatto che, dato un punto $x \in X$, e una carta locale (U, φ) il cui dominio contiene x , allora la dimensione locale è costante su U per il Teorema (1.2). \square

Proposizione 1.4. *Uno spazio topologico connesso e localmente euclideo è connesso per archi.*

Dimostrazione. Fissato un punto $x \in X$ consideriamo il sottoinsieme $W = \{y \in X \mid \text{esiste un arco congiungente } x \text{ a } y\}$. Chiaramente $W \neq \emptyset$ poiché $x \in W$. Osserviamo che, se $Y \subset X$ è connesso per archi e $Y \cap W \neq \emptyset$ allora $Y \subset W$; per mostrarlo fissiamo $y \in Y \cap W$ e $\alpha : I \rightarrow X$ cammino tale che $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$; dato $z \in Y$ esiste un cammino $\gamma_z : I \rightarrow Y$ tale che $\gamma_z(0) = y, \gamma_z(1) = z$, e quindi il cammino prodotto¹ $\beta_z = \alpha * \gamma_z$ è tale che $\beta_z(0) = x, \beta_z(1) = z$.

Sia $y \in X$ e sia (U, φ) una carta locale centrata in q ; chiaramente U è connesso per archi, in quanto omeomorfo a un disco aperto di \mathbb{R}^n . Se $y \in W$ allora $U \cap W \neq \emptyset$, quindi $U \subset W$, e W è aperto. Se invece $y \in W^c$ allora $U \not\subset W$, quindi $U \cap W = \emptyset$ e W^c è aperto.

Poiché W è non vuoto, aperto e chiuso nel connesso X segue che $W = X$. \square

Osservazione 1.5. Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente uno spazio di Hausdorff, come mostra l'esempio seguente.

Si consideri lo spazio X ottenuto come prodotto di \mathbb{R} con la topologia euclidea e di uno spazio formato da due punti a, b con la topologia discreta, e sia Y il quoziente di X ottenuto identificando i punti (x, a) e (x, b) se $x > 0$.

Indichiamo con $\pi : X \rightarrow Y$ la proiezione sul quoziente. osserviamo innanzitutto che $A = \pi(\mathbb{R} \times \{a\})$ e $B = \pi(\mathbb{R} \times \{b\})$ sono aperti di Y , in quanto le loro controimmagini via π sono aperte in X . Ogni punto di Y è contenuto in A o in B , e tali aperti sono omeomorfi ad \mathbb{R} , quindi Y è uno spazio localmente euclideo. Sia ora U un aperto di Y che contiene $\pi(0 \times \{a\})$; la sua controimmagine è un aperto di X che contiene $0 \times \{a\}$, quindi contiene un intervallo $(-\varepsilon_a, \varepsilon_a) \times \{a\}$ per ε_a opportunamente piccolo. Pertanto $\pi((-\varepsilon_a, \varepsilon_a) \times \{a\}) \subset U$. Analogamente, se V è un aperto di Y che contiene $\pi(0 \times \{b\})$ si mostra che, per un opportuno ε_b reale positivo, si ha $\pi((-\varepsilon_b, \varepsilon_b) \times \{b\}) \subset V$. Segue che, se $\varepsilon = \min(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ allora $U \cap V \supset \pi((0, \varepsilon) \times \{a\}) \neq \emptyset$. Concludiamo che Y non è uno spazio di Hausdorff.

Definizione 1.6. Uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo a base numerabile si dice *varietà topologica*.

Osservazione 1.7. Poiché una varietà topologica è connessa, la sua dimensione è ben definita.

¹Ricordiamo che se α e β sono cammini tali che $\alpha(1) = \beta(0)$ allora $\alpha * \beta$ è il cammino

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Esempio 1.8. Alcuni esempi di varietà topologiche

- a) \mathbb{R}^n .
- b) \mathbb{C}^n . Lo spazio affine complesso \mathbb{C}^n è omeomorfo a \mathbb{R}^{2n} in modo canonico, associando alla ennupla di numeri complessi (z_1, \dots, z_n) la $2n$ -pla di numeri reali $(\Re(z_1), \Im(z_1), \dots, \Re(z_n), \Im(z_n))$, ove $\Re(z)$ e $\Im(z)$ denotano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z .
- c) \mathbb{S}^n . La sfera di dimensione n è coperta da due aperti omeomorfi a \mathbb{R}^n : $U_\alpha = \mathbb{S}^n \setminus \{N = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ e $U_\beta = \mathbb{S}^n \setminus \{S = (0, 0, \dots, 0, -1)\}$ e φ_α e φ_β sono così definite

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

- d) Il toro è una varietà topologica.

Sia $L = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, e consideriamo la relazione di equivalenza su \mathbb{R}^2 definita nel modo seguente: due punti \mathbf{x} e \mathbf{y} di \mathbb{R}^2 sono equivalenti se e solo se $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in L$.

Denotiamo con \mathbb{R}^2/L lo spazio topologico quoziente, con proiezione sul quoziente $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L$. La proiezione π è un'applicazione aperta. Infatti

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + U).$$

Ogni punto di \mathbb{R}^2 è equivalente modulo L ad un punto contenuto nel quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$. Due punti di Q non appartenenti al bordo individuano classi distinte, mentre i punti di ∂Q sono equivalenti se hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata.

Sia ora $\varepsilon < \frac{1}{2}$, e, per ogni \mathbf{x} in \mathbb{R}^2 sia

$$B_{\mathbf{x}} := B_{\mathbf{x}}(\varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon\}.$$

Per ogni \mathbf{x} , in $B_{\mathbf{x}}$ non cadono due punti equivalenti, e perciò la restrizione $\pi|_{B_{\mathbf{x}}} : B_{\mathbf{x}} \rightarrow \pi(B_{\mathbf{x}})$ è un omeomorfismo.

Consideriamo l'insieme $\{(U_{\mathbf{x}}, \varphi_{\mathbf{x}})\}$, ove $U_{\mathbf{x}} = \pi(B_{\mathbf{x}})$ e $\varphi_{\mathbf{x}} = (\pi|_{B_{\mathbf{x}}})^{-1}$. Tale insieme costituisce una famiglia di carte locali i cui domini coprono il toro.

- e) $\mathbb{R}P^n$. Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è coperto da $n + 1$ aperti U_i omeomorfi a \mathbb{R}^n .

$$U_i = \{p \in \mathbb{R}P^n \mid x_i(p) \neq 0\}$$

e $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ è definita ponendo

$$\varphi_i(x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

f) $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n è coperto da $n + 1$ aperti U_i omeomorfi a \mathbb{R}^{2n} .

$$U_i = \{p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid z_i(p) \neq 0\};$$

definiamo $\tilde{\varphi}_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ come

$$\tilde{\varphi}_i(z_0 : \cdots : z_i : \cdots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

e $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ è definita componendo $\tilde{\varphi}_i$ con l'omeomorfismo canonico tra \mathbb{C}^n e \mathbb{R}^{2n} descritto nell'esempio b).

g) Un aperto connesso di una varietà topologica è una varietà topologica.

h) Il prodotto di varietà topologiche è una varietà topologica.

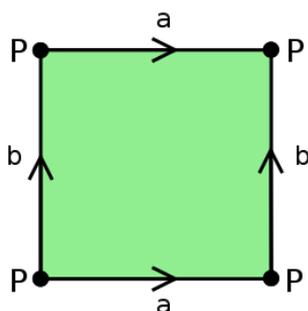
In dimensione 1 la classificazione delle varietà topologiche è molto semplice; sussiste infatti il seguente risultato, che diamo senza dimostrazione:

Teorema 1.9. *Una varietà topologica di dimensione 1 è omeomorfa a \mathbb{S}^1 o a \mathbb{R} .*

La situazione è molto più complessa già per $n = 2$, e questo è il caso che studieremo, aggiungendo l'ipotesi della compattezza. Studieremo quindi superfici topologiche compatte, cioè varietà topologiche compatte di dimensione 2.

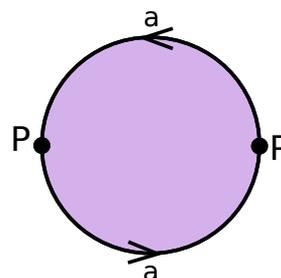
1.2 SUPERFICI COMPATTE

Vedremo più avanti (Teorema 4.29) che ogni superficie topologica compatta è omeomorfa allo spazio quoziente di un poligono piano con un numero pari di lati rispetto ad una relazione di equivalenza che identifica i lati del poligono a coppie. Due casi particolari sono dati dal toro e dal piano proiettivo reale.



Dalla descrizione del toro fatta nell'esempio 1.8 d) segue che il toro è omeomorfo al quoziente di un quadrato rispetto alle identificazioni in figura.

Il piano proiettivo reale può essere visto come quoziente della sfera S^2 rispetto all'identificazione dei punti antipodali, e quindi anche come quoziente della semisfera superiore, equatore compreso, rispetto all'identificazione dei punti antipodali sull'equatore. Proiettando sul piano equatoriale, possiamo rappresentare il piano proiettivo come quoziente di un disco rispetto alle identificazioni in figura.



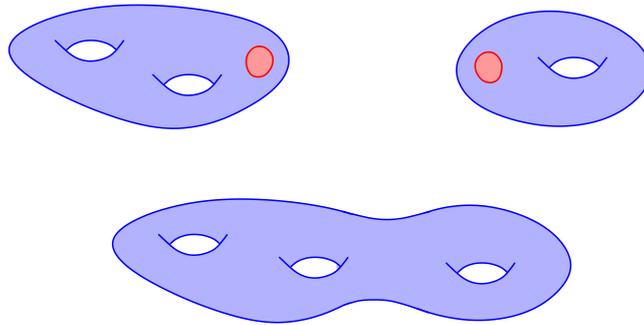
Notazione 1.10. Gli spazi topologici ottenuti come quozienti di un poligono rispetto ad identificazioni dei lati, in cui tutti i vertici sono identificati possono essere descritti scegliendo arbitrariamente un vertice e un verso di percorrenza e scrivendo i lati nell'ordine in cui si incontrano, con la lettera corrispondente se l'orientazione indicata su di essi corrisponde al verso di percorrenza scelto, con la lettera corrispondente con l'esponente -1 se l'orientazione indicata su di essi è opposta al verso di percorrenza scelto. Chiameremo una tale successione di simboli *parola*. Ad esempio il toro è individuato (tra le altre) dalla parola $aba^{-1}b^{-1}$ e il piano proiettivo dalla parola aa .

Siano S_1 e S_2 due superfici compatte; fissiamo due punti $x \in S_1, y \in S_2$ e due intorni U_x e U_y omeomorfi a \mathbf{D}^2 , via omeomorfismi $h_1 : U_x \rightarrow \mathbf{D}^2$ e $h_2 : U_y \rightarrow \mathbf{D}^2$. Consideriamo ora $Y = (S_1 \setminus \overset{\circ}{U}_x) \amalg (S_2 \setminus \overset{\circ}{U}_y)$ e sia \sim la relazione d'equivalenza le cui identificazioni non banali sono

$$x' \sim y' \iff y' = h_2^{-1}(h_1(x'))$$

Si può verificare che lo spazio topologico quoziente $S = Y/\sim$ è uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente euclideo di dimensione 2 e compatto; S è cioè una superficie compatta, detta *somma connessa* di S_1 ed S_2 :

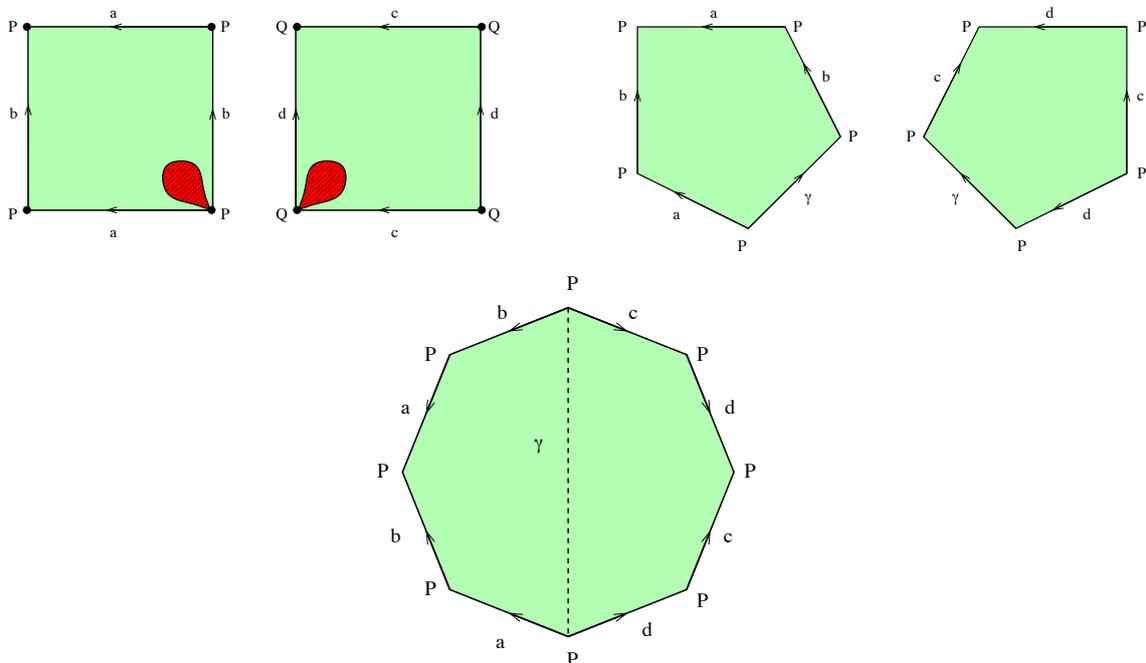
$$S = S_1 \# S_2.$$



Osservazione 1.11. Si può dimostrare che la somma connessa è definita a meno di classi di omeomorfismo, e che non dipende dal punto scelto.

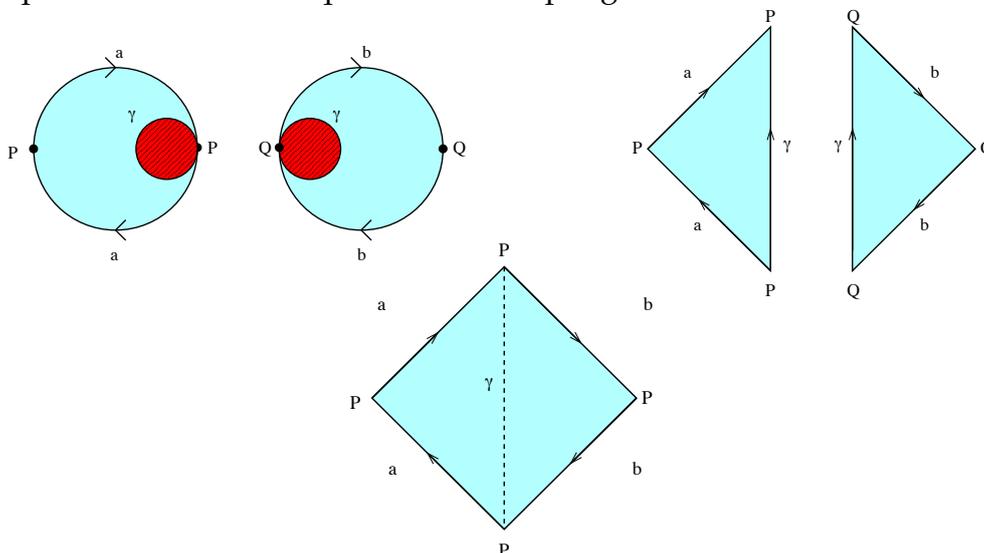
Definizione 1.12. Indichiamo con T_0 la sfera, con T_1 il toro e con T_g la superficie che si ottiene facendo la somma connessa di $g \geq 2$ tori.

Esempio 1.13. Vediamo in figura come rappresentare la somma connessa di due tori come quoziente di un poligono.



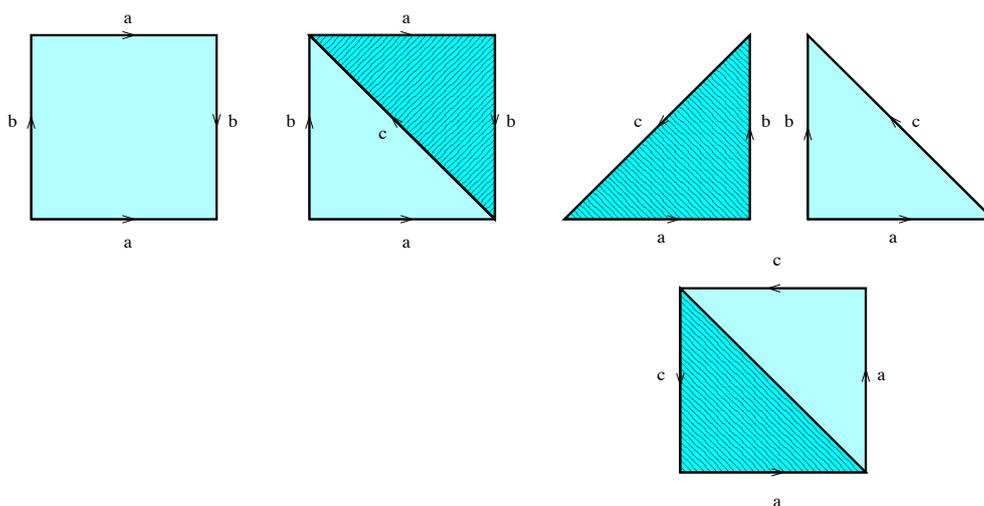
Definizione 1.14. Indichiamo con U_1 il piano proiettivo reale e con U_h la superficie che si ottiene facendo la somma connessa di $h \geq 2$ piani proiettivi reali.

Esempio 1.15. Vediamo in figura come rappresentare la somma connessa di due piani proiettivi reali come quoziente di un poligono.



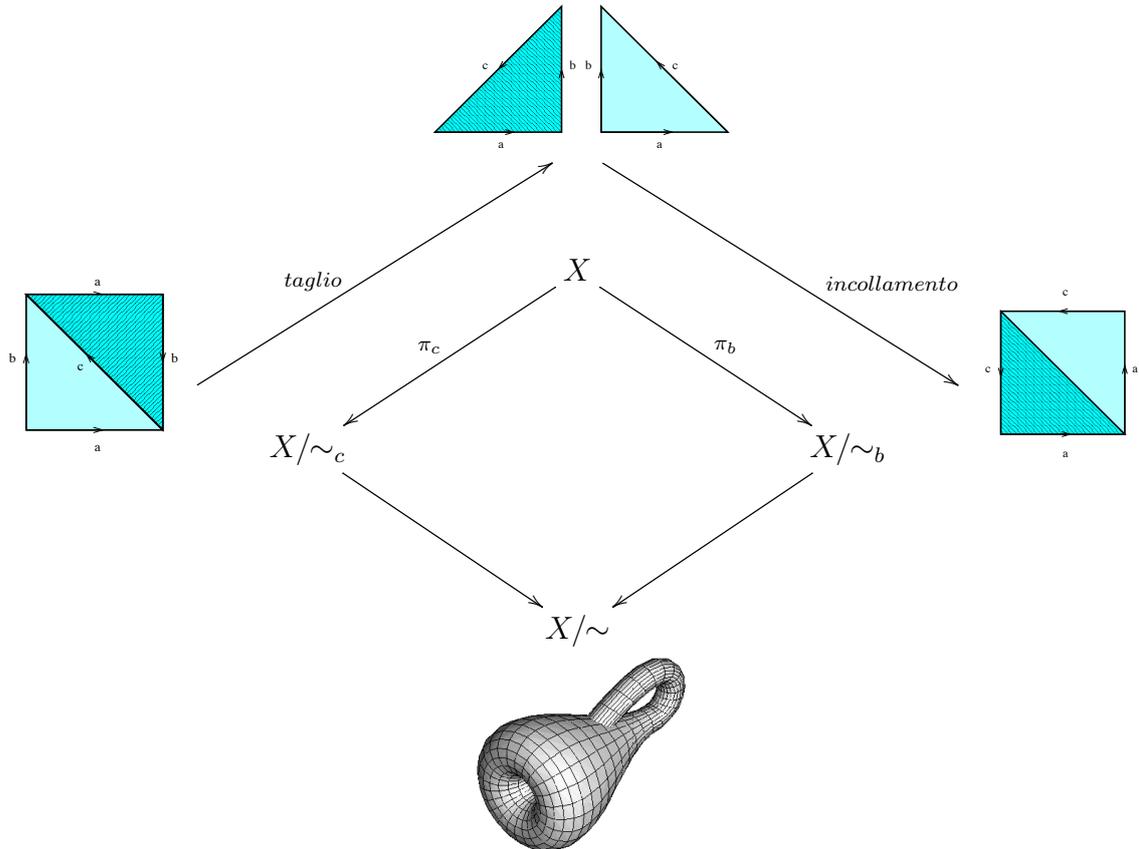
Osservazione 1.16. Possiamo notare che la somma connessa S di due superfici S_1 ed S_2 ottenute come quozienti di poligoni rispetto ad identificazioni dei lati, in cui tutti i vertici sono identificati, è descritta dalla parola ottenuta giustapponendo le parole corrispondenti ad S_1 ed S_2 . Ad esempio la somma connessa dell'Esempio 1.13 è individuata dalla parola $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$, mentre quella dell'Esempio 1.15 è individuata dalla parola $aabb$.

Esempio 1.17. La bottiglia di Klein, quoziente del quadrato rispetto alle identificazioni $aba^{-1}b$ è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi. Per mostrarlo si utilizza il procedimento di "taglia e incolla" come in figura.



L'operazione di taglio è essenzialmente l'introduzione di una nuova relazione di equivalenza (che dice che i due lati indicati con c vanno identificati; poiché

le relazioni di equivalenza \sim_a, \sim_b, \sim_c corrispondenti all'identificazione di una sola coppia di lati corrispondenti sono un sottoinsieme della relazione di equivalenza \sim corrispondente all'identificazione di tutte le coppie di lati, il quoziente rispetto a \sim fattorizza via i quozienti parziali, dando un diagramma commutativo:

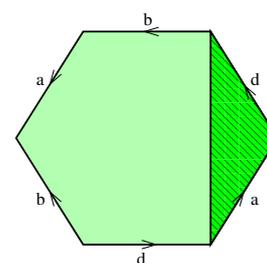
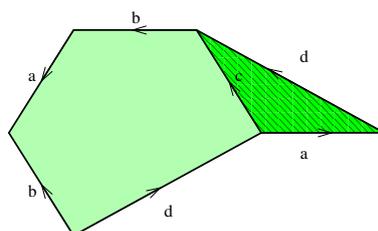
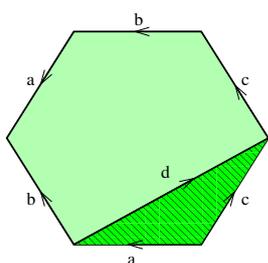
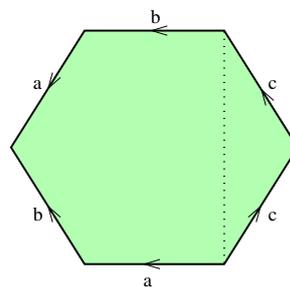


Cosa succede facendo la somma connessa di una superficie T_g e di una superficie U_h ? Consideriamo innanzitutto il seguente caso particolare:

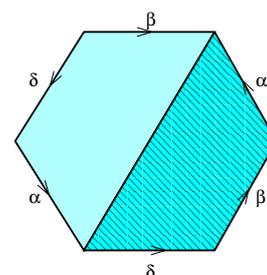
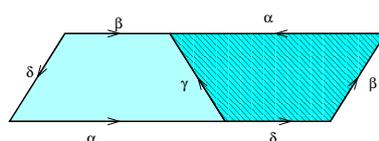
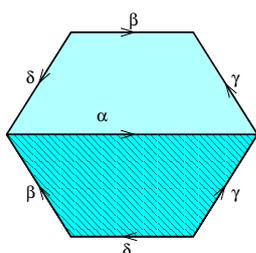
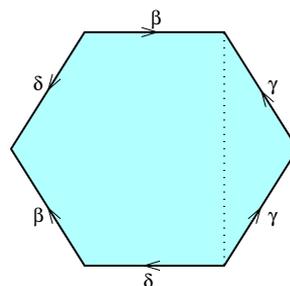
Lemma 1.18. *La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che la bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma di due piani proiettivi, quindi basta mostrare che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di una bottiglia di Klein e di un piano proiettivo.

La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla superficie quoziente del poligono in figura, che, via un taglio e un incollamento risulta omeomorfo al poligono individuato dalla parola $dadbab^{-1}$.



La somma connessa di di una bottiglia di Klein e di un piano proiettivo è omeomorfa alla superficie quoziente del poligono in figurache, via un taglio e un incollamento risulta omeomorfo al poligono individuato dalla parola $\delta\alpha\delta\beta\alpha\beta^{-1}$.



Concludiamo quindi che le superfici $T_1 \# U_1$ e U_3 sono omeomorfe. □

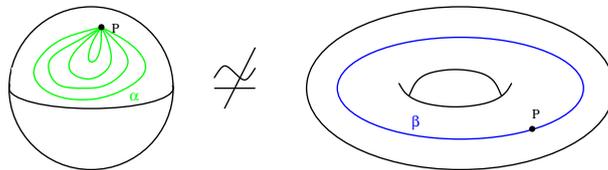
Possiamo ora trattare il caso generale:

Proposizione 1.19. *La somma connessa di una superficie T_g e di una superficie U_h è omeomorfa alla superficie U_{h+2g} .*

Dimostrazione. Osserviamo che, per $g = 1$ la Proposizione si riduce al Lemma 1.18, quindi assumiamo che g sia maggiore o uguale a due e che il risultato sia vero per $g' \leq g - 1$.

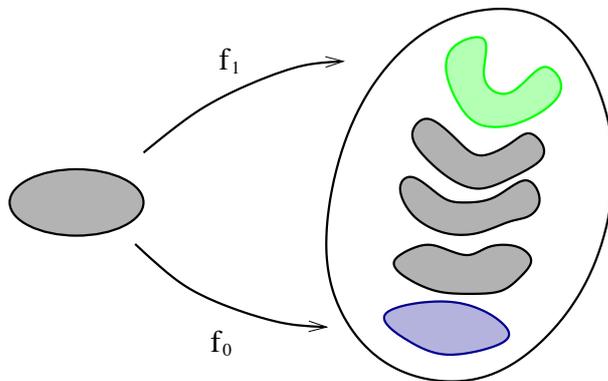
$$T_g \# U_h \simeq T_{g-1} \# (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# U_{h+2} \simeq U_{h+2g} \quad \square$$

Il toro e la sfera non sono omeomorfi. Come si può dimostrare? Intuitivamente la sfera ha la proprietà che ogni cammino chiuso può essere deformato con continuità al cammino costante, mentre nel toro questo non è vero. Vedremo ora come si può formalizzare questo concetto.



Problema: Date $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ applicazioni continue si vuole formalizzare l'idea seguente:

f_1 si ottiene per deformazione continua da f_0 .



2.1 OMOTOPIA DI APPLICAZIONI CONTINUE

Definizione 2.1. Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ si dicono *omotope* se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \rightarrow Y$, tale che $\forall x \in X$ si ha

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = f_1(x).$$

In tal caso scriveremo $f_0 \sim f_1$; poniamo poi $f_t(x) = F(x, t)$. Abbiamo cioè una famiglia di funzioni continue che varia con continuità.

Esempi 2.2.

- a) Sia $X = Y = \mathbf{D}^n$; l'applicazione identica $f_0 = \text{Id}_{\mathbf{D}^n}$ e l'applicazione costante che manda ogni elemento di \mathbf{D}^n in $\mathbf{0}$, $f_1 = \mathbf{0}$ sono omotope. Un'omotopia tra di esse è data da $F(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x}$.
- b) Sia $X = Y = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$; l'applicazione identica $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}}$ e l'applicazione $f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ sono omotope. Un'omotopia tra di esse è data da $F(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.
- c) Sia $X = Y = \mathbf{S}^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} \simeq \mathbb{C}^k$ una sfera di dimensione dispari; l'applicazione identica $f_0 = \text{Id}_{\mathbf{S}^{2k-1}}$ e l'applicazione antipodale $f_1(z) = -z$ sono omotope. Un'omotopia tra esse è data da $F(z, t) = e^{i\pi t}z$.
- d) Sia X uno spazio topologico qualsiasi; ogni arco $f : I \rightarrow X$ di punto iniziale x_0 è omotopo all'arco costante di base x_0 tramite l'omotopia $F(s, t) = f((1 - t)s)$.

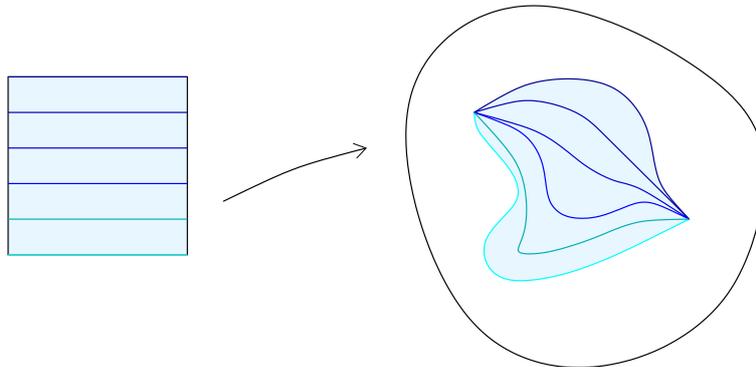
Come mostra l'ultimo esempio l'omotopia non è ancora la nozione adeguata per formalizzare l'esempio dei cammini sulla sfera e sul toro. In quel caso, infatti, tutti i cammini intermedi devono avere lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Introduciamo quindi una nuova definizione:

Definizione 2.3. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ applicazioni continue e $A \subset X$ un sottospazio. Le applicazioni f_0 e f_1 si dicono *omotope relativamente ad A* se esiste un'omotopia $F : X \times I \rightarrow Y$ tra f_0 ed f_1 tale che

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \quad \forall a \in A, \forall t \in I.$$

In particolare, nel caso dei cammini, avremo la seguente

Definizione 2.4. Due cammini che abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale si dicono *omotopi* se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$.



Quindi due cammini $\alpha : I \rightarrow X$ e $\beta : I \rightarrow X$ sono omotopi se esiste un'applicazione $F : I \times I \rightarrow X$ continua tale che

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \alpha(s); \\ F(s, 1) &= \beta(s); \\ F(0, t) &= \alpha(0) = \beta(0) = x_0; \\ F(1, t) &= \alpha(1) = \beta(1) = x_1. \end{aligned}$$

Osservazione 2.5. L'omotopia (relativa) è una relazione d'equivalenza.

2.2 TIPO D'OMOTOPIA - RETRATTI

Sospendiamo momentaneamente il discorso sui cammini e utilizziamo le nozioni sull'omotopia per introdurre un nuovo concetto di equivalenza per spazi topologici.

Definizione 2.6. Si dice che due spazi topologici X e Y hanno lo stesso *tipo d'omotopia* (o che sono *omotopicamente equivalenti*) se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f \sim \text{Id}_X$ e $f \circ g \sim \text{Id}_Y$. Tali applicazioni sono dette *equivalenze omotopiche*. Scriveremo $X \sim Y$ per indicare che X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

Osservazione 2.7. L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici (Esercizio!).

Definizione 2.8. Uno spazio topologico si dice *contraibile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esempi 2.9.

- a) Due spazi omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia.
- b) D^n è contraibile.

Siano $f : D^n \rightarrow \{0\}$ l'applicazione costante e $g : \{0\} \rightarrow D^n$ l'inclusione. Dobbiamo verificare che $g \circ f \sim \text{Id}_{D^n}$ e che $f \circ g \sim \text{Id}_{\{0\}}$. La prima affermazione segue dall'esempio 2.2 a), mentre la seconda è immediata, essendo $f \circ g = \text{Id}_{\{0\}}$.

- c) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$.

Siano $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ la funzione $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ e $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusione. Dobbiamo verificare che $g \circ f \sim \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ e che $f \circ g \sim \text{Id}_{S^{n-1}}$. La prima affermazione segue dall'esempio 2.2 b), mentre la seconda è immediata, essendo $f \circ g = \text{Id}_{S^{n-1}}$.

Definizione 2.10. Una *proprietà omotopica* è una proprietà invariante per equivalenze omotopiche.

Definizione 2.11. Sia $A \subset X$ un sottospazio, e $i : A \rightarrow X$ l'inclusione.

1. A si dice *retrato* di X se esiste un'applicazione continua $r : X \rightarrow A$ tale che $r \circ i = \text{Id}_A$.
2. A si dice *retrato di deformazione* se esiste un'applicazione continua $r : X \rightarrow A$ tale che $r \circ i = \text{Id}_A$ e $i \circ r \sim \text{Id}_X$.

Intuitivamente un sottospazio A è un retratto di deformazione di X se X può essere deformato con continuità fino a farlo coincidere con A .

Osservazione 2.12. Se A è retratto di deformazione di X , allora A ha lo stesso tipo di omotopia di X .

Osservazione 2.13. Sia X un sottospazio di $(\mathbb{R}^n, \tau_\epsilon)$ e sia A un sottospazio di X . Se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che per ogni $x \in X$ il segmento che unisce il punto x al punto $r(x)$ è contenuto in X , allora l'applicazione

$$F : X \times I \rightarrow X$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)x + t(i \circ r(x))$$

è un'omotopia relativa ad A tra Id_X e $i \circ r$.

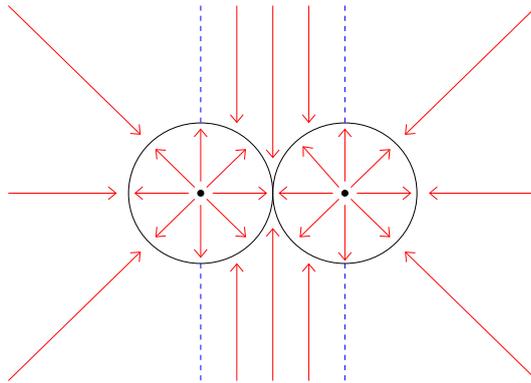
Pertanto se esiste r siffatta, A è retratto di deformazione di X .

Esempi 2.14.

- a) Un sottospazio stellato di \mathbb{R}^n è contraibile.
- b) Sia T il toro ottenuto da $I \times I$ come quoziente rispetto alla relazione di equivalenza \sim tale che $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \{x, x'\} = \{0, 1\}$ e $y = y'$ oppure $\{y, y'\} = \{0, 1\}$ e $x = x'$, e sia A la circonferenza quoziente del segmento $\{0\} \times I$ rispetto alla relazione indotta da \sim ; allora A è retratto di T . Per mostrarlo basta considerare l'applicazione $R : T \rightarrow A$ indotta dall'applicazione $r : I \times I \rightarrow \{0\} \times I$ che manda (x, y) in $(0, y)$.

Mostriamo più avanti che A non è un retratto di deformazione di X (Cf. [Proposizione 4.22](#)).

- c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$ ha $S^1 \vee S^1$ come retratto di deformazione. La retrazione è definita diversamente in regioni diverse di $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$, come in figura:



- d) $\mathbb{R}^3 \setminus r$ ha S^1 come retratto di deformazione. La retrazione è data componendo la proiezione su di un piano perpendicolare alla retta con la retrazione di \mathbb{R}^2 meno un punto su S^1 .
- e) Un poligono convesso di \mathbb{R}^2 con $2k$ lati identificati a coppie e tutti i vertici identificati, privato di un punto Q interno al poligono, ha un bouquet di k circonferenze (cioè l'unione a un punto di k circonferenze) come retratto di deformazione.

Sia X il poligono privato del punto Q , senza le identificazioni al bordo, ed A il bordo del poligono. La proiezione dal punto Q fornisce una retrazione $r : X \rightarrow A$, e, in virtù dell'Osservazione 2.13, denotata con $i : A \rightarrow X$ l'inclusione, l'applicazione $F : X \times I \rightarrow X$ definita ponendo $F(x, t) = (1 - t)x + t(i \circ r(x))$ è un'omotopia tra l'identità di X e $i \circ r$.

Sia \sim la relazione d'equivalenza su X definita dalle identificazioni al bordo; A è chiuso rispetto a \sim , ed ha quindi senso considerare anche il quoziente A/\sim .

Osserviamo che, se $x \neq x'$ e $x \sim x'$, allora $x, x' \in A$, e quindi, essendo r una retrazione, $r(x) = x$ e $r(x') = x'$. Di conseguenza sia r che F passano al quoziente rispetto a \sim , definendo una retrazione $\bar{r} : X/\sim \rightarrow A/\sim$ ed un'omotopia $\bar{F} : X/\sim \times I \rightarrow X/\sim$ tra l'identità di X/\sim e $j \circ \bar{r}$, ove si è denotata con j l'inclusione di A/\sim in X/\sim .

In particolare $\mathbb{R}P^2 \setminus \{P\} \sim S^1$ e $T_1 \setminus \{P\} \sim S^1 \vee S^1$.

2.3 CW-COMPLESSI FINITI

Spesso nelle applicazioni e negli esercizi è utile trovare spazi omotopicamente equivalenti ad uno spazio dato che siamo più "semplici". Un'operazione che può essere utile in tal senso è quella di sostituire uno spazio topologico X con il quoziente rispetto ad un sottospazio contraibile $A \subset X$.

Non è però sempre vero che, dati uno spazio topologico X e un sottospazio

contraibile A gli spazi X e X/A sono omotopicamente equivalenti.

Vedremo ora un modo particolare di costruire spazi topologici, che ci darà una condizione sufficiente per poter contrarre sottospazi contraibili senza alterare il tipo di omotopia dello spazio topologico.

Consideriamo il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \\ X & & \end{array}$$

in cui A , X e Y sono spazi topologici, $i : A \rightarrow X$ è l'inclusione e f è un'applicazione continua. Vogliamo costruire un nuovo spazio topologico incollando X e Y tramite f , identificando cioè i punti di A con le loro immagini ¹.

Per far ciò consideriamo lo spazio topologico $X \amalg Y$ e in esso consideriamo la relazione di equivalenza \sim generata dall'identificazione $x \sim f(x)$ per ogni $x \in A$. Lo spazio che cerchiamo, denotato con $X \cup_f Y$, è lo spazio topologico quoziente $Z = (X \amalg Y)/\sim$.

Definizione 2.15. Un CW-complesso finito X di dimensione N è uno spazio topologico costruito nel modo seguente:

1. X^0 è uno spazio finito e discreto;
2. Per $0 < n \leq N$ lo spazio topologico X^n è ottenuto da X^{n-1} attaccando un numero finito J_n di coppie $(X, A) = (\mathbf{D}_i^n, \mathbf{S}_i^{n-1})$ mediante applicazioni continue $\varphi_i^n : \mathbf{S}_i^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$;
3. $X = X^N$.

Il sottospazio $X^n \subset X$ è detto n -scheletro di X . Ogni coppia $(\mathbf{D}_i^n, \mathbf{S}_i^{n-1})$ ha una *mappa caratteristica* Φ_i^n , che è la composizione

$$\mathbf{D}_i^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_i \mathbf{D}_i^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X.$$

Una cella aperta (rispettivamente chiusa) è l'immagine via la mappa caratteristica del disco aperto (rispettivamente chiuso); si noti che $\Phi_i^n|_{\mathbf{D}_i^n \setminus \mathbf{S}_i^{n-1}}$ è un omeomorfismo, mentre $\Phi_i^n|_{\mathbf{D}_i^n}$ in generale non lo è.

Esempi 2.16.

- a) La sfera \mathbf{S}^n .

Una sua possibile struttura di CW-complesso è data prendendo come X^0 un punto, e attaccando una coppia $(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1})$ mediante l'applicazione costante $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X^0$.

¹Tale costruzione è una generalizzazione di quella vista nella costruzione della somma connessa di superfici.

Alternativamente è possibile prendere come X^0 un punto, costruire la sfera S^{n-1} mediante l'attaccamento di una $n - 1$ cella come sopra, ottenendo X^{n-1} e quindi attaccare due n -celle (D^n, S^{n-1}) mediante l'applicazione identica $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$.

b) Il disco D^n .

Una sua possibile struttura di CW-complesso è data prendendo come X^0 un punto, attaccando una coppia (D^{n-1}, S^{n-2}) mediante l'applicazione costante $f : S^{n-2} \rightarrow X^0$ e ottenendo perciò $X^{n-1} = S^{n-1}$ e attaccando quindi una coppia (D^n, S^{n-1}) mediante l'applicazione identica $f : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$.

c) L'unione a un punto di k circonferenze.

Sia X^0 un punto, e ad esso attacchiamo k coppie (D^1, S^0) mediante le applicazioni costanti $f_i : S^0 \rightarrow X^0$.

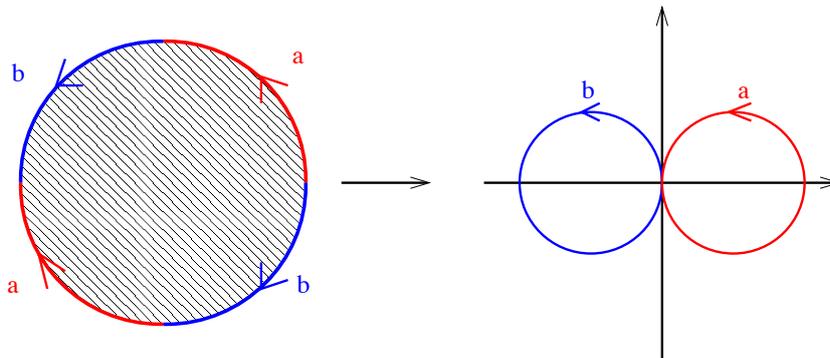
d) Il toro.

Sia X^0 un punto. Ad esso attacchiamo due coppie (D^1, S^0) mediante le applicazioni costanti $f_i : S^0 \rightarrow X^0$, ottenendo così come X^1 l'unione ad un punto di due circonferenze.

Vogliamo ora attaccare una coppia (D^2, S^1) mediante un'applicazione $f : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$. Identificando un punto della circonferenza con l'angolo al centro corrispondente (in radianti), e considerando $S^1 \vee S^1$ come l'unione ad un punto delle circonferenze di raggio uno centrate in $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ consideriamo la mappa φ definita ponendo

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi + 4t), -\sin(4t)) & t \in [0, \pi/2] \\ (-1 + \cos(4t), \sin(4t)) & t \in [\pi/2, \pi] \\ (1 + \cos(\pi + 4t), \sin(4t)) & t \in [\pi, 3\pi/2] \\ (-1 + \cos(4t), -\sin(4t)) & t \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases}$$

Tale mappa manda il bordo del disco in $S^1 \vee S^1$ come in figura.



Analogamente si può dare una struttura di CW-complesso finito a tutte le superfici compatte.

e) Lo spazio proiettivo reale di dimensione n .

Lo spazio proiettivo di dimensione zero è un punto.

Sia $f : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ il quoziente rispetto all'identificazione dei punti antipodali; lo spazio proiettivo di dimensione n è ottenuto dallo spazio proiettivo di dimensione $n - 1$ mediante attaccamento di una n -cella via f .

Definizione 2.17. Un *sottocomplesso* di un CW-complesso finito X è un sottoinsieme A costituito da un'unione di celle chiuse di X .

Diamo senza dimostrazione il seguente risultato, di importanza cruciale nel seguito:

Teorema 2.18. Se X è un CW-complesso finito e $A \subset X$ è un sottocomplesso contraibile, allora $X \sim X/A$.

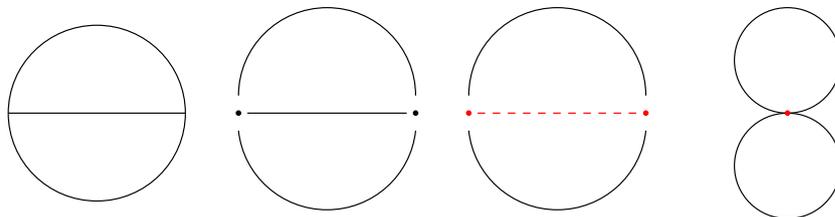
Vediamo ora alcune applicazioni

Esempi 2.19.

a) Sia X il sottospazio di \mathbb{R}^2 costituito dall'unione di \mathbf{S}^1 e di $[-1, 1] \times \{0\}$. Allora X ha lo stesso tipo di omotopia dell'unione a un punto di due circonferenze.

Possiamo considerare la struttura di CW-complesso di X ottenuta ponendo $X^0 = (-1, 0) \cup (1, 0)$ e attaccando tre coppie $(\mathbf{D}^1, \mathbf{S}^0)$ mediante l'applicazione identica $\text{Id}_{\mathbf{S}^0} : \mathbf{S}^0 \rightarrow X^0$.

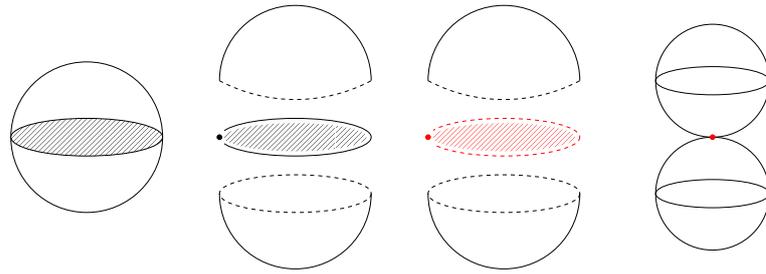
Il sottospazio $A = [-1, 1] \times \{0\}$ è un sottocomplesso contraibile, e quindi, in virtù della proposizione precedente $X \sim X/A \simeq \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$.



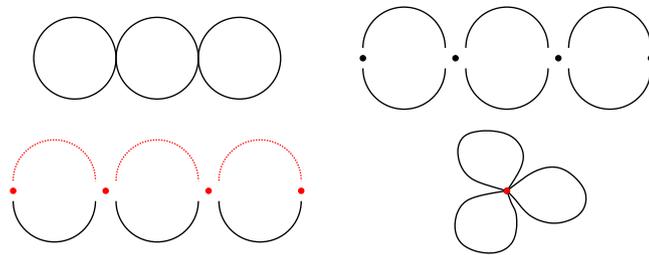
b) Sia X l'unione di $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ con il disco $\mathbf{D}^2 \times \{0\}$. Allora X è omotopicamente equivalente all'unione a un punto di due sfere.

Possiamo considerare la struttura di CW-complesso di X ottenuta ponendo $X^0 = (-1, 0, 0)$, attaccando una coppia $(\mathbf{D}^1, \mathbf{S}^0)$ mediante l'applicazione identica $\text{Id}_{\mathbf{S}^0} : \mathbf{S}^0 \rightarrow X^0$ e tre coppie $(\mathbf{D}^2, \mathbf{S}^1)$ come in figura.

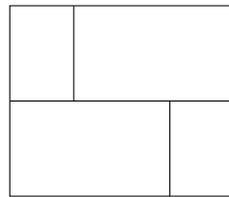
Il sottocomplesso costituito da X^1 e da una delle celle due dimensionali è un sottocomplesso contraibile.



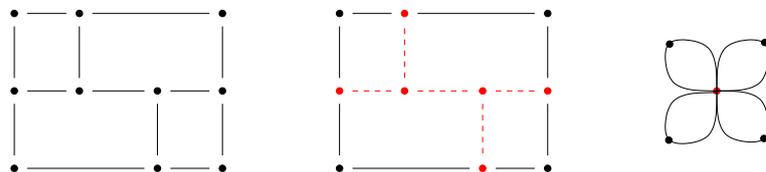
c) Lo spazio topologico costituito da tre circonferenze in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ come in figura è omotopicamente equivalente a un bouquet di 3 circonferenze. Vediamo in figura la struttura di CW-complesso e il sottocomplesso contraibile.



d) Lo spazio topologico in figura (sottospazio di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$) è omotopicamente equivalente a un bouquet di 4 circonferenze.



Vediamo in figura la struttura di CW-complesso e il sottocomplesso contraibile.



Il gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico e x_0 un suo punto. Consideriamo l'insieme delle classi di equivalenza di cammini chiusi che iniziano e terminano in x_0 rispetto alla relazione di omotopia di cammini. In questo capitolo mostreremo come sia possibile dotare tale insieme della struttura di gruppo, e che la classe di isomorfismo del gruppo così costruito non dipende dalla scelta del punto se X è uno spazio connesso per archi. Mostreremo poi che la costruzione è functoriale, nel senso che ad ogni applicazione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ tale che $\varphi(x) = y$ risulta associato un morfismo di gruppi $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, y)$. Concluderemo mostrando che, se $\varphi : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica tale che $\varphi(x) = y$, allora i gruppi $\pi(X, x)$ e $\pi(Y, y)$ sono isomorfi via φ_* .

3.1 IL GRUPPO FONDAMENTALE

Definizione 3.1. Un cammino $\alpha : I \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ è detto *cappio* di punto base x_0 .

Definizione 3.2. Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto; sia

$$\pi(X, x_0) = \{\text{Classi di equivalenza di cappi omotopi con punto base } x_0\}.$$

e siano $[\alpha], [\beta] \in \pi(X, x_0)$. Definiamo il prodotto delle classi $[\alpha]$ e $[\beta]$ nel seguente modo:

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Il fatto che tale operazione sia ben definita segue dalla seguente

Proposizione 3.3. Siano α e β due cammini in X tali che sia definito il prodotto $\alpha * \beta$, e siano γ e δ altri due cammini tali che $\alpha \sim \gamma$ e $\beta \sim \delta$; allora $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.

Dimostrazione. Siano F e G le omotopie tra α e γ e tra β e δ ; allora l'omotopia tra i prodotti è data da

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & s \in [0, 1/2] \\ G(2s - 1, t) & s \in [1/2, 1] \end{cases} \quad \square$$

Mostreremo ora che $\pi(X, x_0)$ è un gruppo rispetto all'operazione appena definita; nella dimostrazione utilizzeremo il seguente

Lemma 3.4. Siano $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino e $\varphi : I \rightarrow I$ una funzione continua tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Allora $\alpha \sim \alpha \circ \varphi$.

Dimostrazione. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ l'applicazione definita ponendo

$$F(s, t) = \alpha((1 - t)s + t\varphi(s));$$

è immediato verificare che F è un'omotopia di cammini tra α e $\alpha \circ \varphi$. □

Teorema 3.5. Siano $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow X$ cammini tali che $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0)$, e siano $x_0 = \alpha(0)$, $x_1 = \alpha(1)$. Siano inoltre ε_{x_0} e ε_{x_1} i cammini costanti $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$ e $\varepsilon_{x_1}(s) = x_1$ e $\bar{\alpha}$ il cammino inverso di α ¹. Allora

1. $\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * \varepsilon_{x_1}$;
2. $\alpha * \bar{\alpha} \sim \varepsilon_{x_0}$ e $\bar{\alpha} * \alpha \sim \varepsilon_{x_1}$;
3. $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Dimostrazione. Siano $\varphi, \psi : I \rightarrow I$ le funzioni definite da

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2s - 1 & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \psi(s) = \begin{cases} 2s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

L'asserzione 1. segue dal Lemma 3.4, in quanto $\varepsilon_{x_0} * \alpha = \alpha \circ \varphi$ e $\alpha * \varepsilon_{x_1} = \alpha \circ \psi$.

Per mostrare che $\alpha * \bar{\alpha}$ e ε_{x_0} sono omotopi utilizziamo la seguente applicazione:

$$F(s, t) = \begin{cases} x_0 & s \in [0, \frac{t}{2}] \\ \alpha(2s - t) & s \in [\frac{t}{2}, \frac{1}{2}] \\ \bar{\alpha}(2s + t - 1) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{2-t}{2}] \\ x_0 & s \in [\frac{2-t}{2}, 1] \end{cases}$$

Infine la 3. deriva dal Lemma 3.4, in quanto $(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \phi$, ove ϕ è definita nel modo seguente:

$$\phi(s) = \begin{cases} 2s & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ s + \frac{1}{4} & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{s+1}{2} & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

Corollario 3.6. $\pi(X, x_0)$ è un gruppo (in generale non abeliano) rispetto al prodotto di classi di equivalenza di cappi appena definito.

¹Il cammino $\bar{\alpha}$ è definito ponendo $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$.

Definizione 3.7. Il gruppo $\pi(X, x_0)$ è detto *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x_0 .

Esempio 3.8. Se $X = \{*\}$, allora $\pi(X, *)$ è il gruppo banale, in quanto esiste un unico cammino, quello costante.

Il gruppo fondamentale è definito scegliendo un punto base; mostreremo ora che, qualora due punti di X siano connessi da un cammino, la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale è la medesima.

Proposizione 3.9. Siano x, y due punti di X ; se esiste un arco $f : I \rightarrow X$ che congiunge x a y allora $\pi(X, x) \simeq \pi(X, y)$.

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione $u_f : \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ in questo modo:

$$u_f([\alpha]) = [\bar{f} * \alpha * f].$$

L'applicazione è ben definita: poiché ovviamente $\bar{f} \sim \bar{f}$ e $f \sim f$, applicando due volte la Proposizione 3.3, otteniamo che, se $\alpha \sim \beta$, allora $\bar{f} * \alpha * f \sim \bar{f} * \beta * f$.

Mostriamo ora che u_f è un morfismo di gruppi.

$$\begin{aligned} u_f([\alpha][\beta]) &= u_f([\alpha * \beta]) = [\bar{f} * \alpha * \beta * f] = \\ &= [\bar{f} * \alpha * f * \bar{f} * \beta * f] = [\bar{f} * \alpha * f][\bar{f} * \beta * f] = u_f([\alpha])u_f([\beta]). \end{aligned}$$

La biunivocità di u_f segue dal fatto che $u_{\bar{f}} \circ u_f = \text{Id}_{\pi(X, x)}$ e $u_f \circ u_{\bar{f}} = \text{Id}_{\pi(X, y)}$. \square

Corollario 3.10. Se uno spazio X è connesso per archi, allora $\pi(X, x) \simeq \pi(X, y) \forall x, y \in X$.

3.2 OMOMORFISMO INDOTTO

Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, e sia α un coppia di punto base x ; l'applicazione $(\varphi \circ \alpha) : I \rightarrow Y$ è un coppia in Y con punto base $\varphi(x)$.

Si può verificare che, se $\alpha \sim \beta$ allora $\varphi \circ \alpha \sim \varphi \circ \beta$; infatti, se $F : I \times I \rightarrow X$ è un'omotopia tra α e β , allora $G = \varphi \circ F$ è un'omotopia tra $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$.

Definizione 3.11. L'applicazione

$$\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$$

che associa ad una classe di equivalenza $[\alpha]$ la classe di equivalenza $[\varphi \circ \alpha]$ è detta *morfismo indotto*.

Osservazione 3.12. Valgono le seguenti proprietà:

1. φ_* è un morfismo di gruppi;

2. dati tre spazi topologici X, Y, Z e due applicazioni continue $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$, allora

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*; \quad (3.13)$$

3. indicata con Id_X l'identità di X , si ha che

$$(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi(X,x)}. \quad (3.14)$$

Dimostrazione. Per verificare la prima affermazione, notiamo innanzitutto che, dalle definizioni di morfismo indotto e prodotto di cammini segue immediatamente che $\varphi \circ (\alpha * \beta) = (\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)$; pertanto

$$\varphi_*([\alpha * \beta]) = [\varphi \circ (\alpha * \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta)] = [(\varphi \circ \alpha)][(\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha])\varphi_*([\beta]).$$

Le altre due proprietà seguono direttamente dalla definizione. □

Corollario 3.15. *Un omeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ induce un isomorfismo di gruppi $\varphi_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x_0))$ per ogni $x_0 \in X$.*

Dimostrazione. Sia $\psi : Y \rightarrow X$ l'inverso di φ . Siano $\varphi_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x_0))$ e $\psi_* : \pi(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi(X, x_0)$ i morfismi indotti. Per le proprietà (3.13) e (3.14) si ha che

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi(X,x_0)}$$

$$\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\pi(Y,\varphi(x_0))},$$

da cui l'asserto. □

Possiamo riassumere quello che abbiamo detto dicendo che abbiamo costruito un *functore* dalla categoria degli spazi topologici puntati e applicazioni continue di spazi topologici puntati ² alla categoria dei gruppi e morfismi di gruppi.

$Top.$	Gr
<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> (X, x) $\varphi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ $\psi \circ \varphi$ Id_X $(X, x) \simeq (Y, y)$	<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $\pi(X, x)$ $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, y)$ $\psi_* \circ \varphi_*$ $\text{Id}_{\pi(X,x)}$ $\pi(X, x) \simeq \pi(Y, y)$

Di grande importanza nelle applicazioni è la seguente

²Uno spazio topologico puntato è la coppia costituita da uno spazio topologico e da un suo punto. Un'applicazione continua fra due spazi topologici puntati $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ è un'applicazione continua $\varphi : X \rightarrow Y$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$.

Proposizione 3.16. Sia $A \subset X$ un retratto. Indichiamo con $r : X \rightarrow A$ la retrazione e con $i : A \rightarrow X$ l'inclusione. Allora, per ogni $a \in A$, denotati con $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ e $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ i morfismi indotti si ha

$$r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A, a)};$$

in particolare i_* è iniettivo e r_* è suriettivo.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ & & \searrow & \text{Id}_A & \nearrow & \end{array}$$

e il diagramma indotto sui gruppi fondamentali

$$\begin{array}{ccc} \pi(A, a) & \xrightarrow{i_*} & \pi(X, a) & \xrightarrow{r_*} & \pi(A, a) \\ & & \searrow & (\text{Id}_A)_* & \nearrow & \end{array}$$

Per le proprietà (3.13) e (3.14) si ha che

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{\pi(A, a)}.$$

In particolare i_* è iniettivo e r_* è suriettivo. □

3.3 TEOREMA DI INVARIANZA PER OMOTOPIA

Vogliamo ora mostrare che spazi che hanno lo stesso tipo di omotopia hanno gruppi fondamentali isomorfi; useremo il seguente

Lemma 3.17. Siano $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$ continue e omotope, sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra Φ e Ψ e sia $f(s) = F(x_0, s)$ (è un cammino che congiunge $\Phi(x_0)$ e $\Psi(x_0)$). Allora il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_*} & \pi(Y, \Phi(x_0)) \\ & \searrow \Psi_* & \swarrow u_f \\ & \pi(Y, \Psi(x_0)) & \end{array}$$

commuta, cioè $\Psi_* = u_f \circ \Phi_*$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che, per ogni $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$ si ha

$$[\Psi \circ \alpha] = [\bar{f} * (\Phi \circ \alpha) * f]$$

Osserviamo innanzitutto che il coppia $\Psi \circ \alpha$ è omotopa al coppia $\varepsilon_{y_0} * (\Psi \circ \alpha) * \varepsilon_{y_0}$, ove si è posto $y_0 = \Psi(x_0)$. E' immediato verificare che

$$((\bar{f} * (\Phi \circ \alpha)) * f)(s) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ F(\alpha(4s - 1), 0) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ F(x_0, 2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$((\varepsilon_{y_0} * (\Psi \circ \alpha)) * \varepsilon_{y_0})(s) = \begin{cases} F(x_0, 1) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ F(\alpha(4s - 1), 1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ F(x_0, 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Pertanto, definendo $H : I \times I \rightarrow Y$ come

$$H(s, t) = \begin{cases} F(x_0, (1 - 4s)(1 - t) + t) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ F(\alpha(4s - 1), t) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ F(x_0, (2s - 1)(1 - t) + t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

si ottiene l'omotopia cercata. □

Teorema 3.18. (Teorema d'invarianza per omotopia) Siano X e Y spazi topologici, e sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora per ogni $x \in X$ il morfismo indotto $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Poiché φ è un'equivalenza omotopica, esiste $\psi : Y \rightarrow X$ tali che $\psi \circ \varphi \sim \text{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi \sim \text{Id}_Y$.

Sia $y = \varphi(x)$, sia F un'omotopia tra $\psi \circ \varphi$ e Id_X , e sia $f(s) = F(x, s)$; f è un arco che congiunge $\psi(y)$ a x ³. Applicando il Lemma 3.17 a $\psi \circ \varphi$ e Id_X otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \pi(X, x) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, y) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi(X, \psi(y)) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \text{Id}_{\pi(X, x)} & & u_f & \\ & & \pi(X, x) & & \end{array}$$

Poiché u_f è un isomorfismo, allora $\psi_* \circ \varphi_*$ è un isomorfismo; in particolare ciò implica che ψ_* è suriettiva.

Applicando ora il Lemma 3.17 all'omotopia G tra $\varphi \circ \psi$ e Id_Y , ponendo $g(s) = G(y, s)$, otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \pi(Y, y) & \xrightarrow{\psi_*} & \pi(X, \psi(y)) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \pi(Y, \varphi(\psi(y))) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \text{Id}_{\pi(Y, y)} & & u_g & \\ & & \pi(Y, y) & & \end{array}$$

³Attenzione: in generale $\psi(y) \neq x$.

Abbiamo indicato con $\tilde{\varphi}_*$ il morfismo indotto da φ tra i gruppi $\pi(X, \psi(y))$ e $\pi(Y, \varphi(\psi(y)))$, poiché, essendo i punti base diversi, tale morfismo non è quello precedentemente indicato con φ_* .

Poiché u_g è un isomorfismo, allora $\tilde{\varphi}_* \circ \psi_*$ è un isomorfismo; in particolare ψ_* è iniettiva. Quindi ψ_* e φ_* sono isomorfismi. \square

Corollario 3.19. *Se X è contraibile, allora $\pi(X, x)$ è il gruppo banale, per ogni $x \in X$.*

Corollario 3.20. *Se $A \subset X$ è un retratto di deformazione e $a \in A$, allora i morfismi $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ e $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ sono isomorfismi.*

Teorema di Seifert-Van Kampen e applicazioni

In questo capitolo vedremo come calcolare effettivamente alcuni gruppi fondamentali, utilizzando un risultato, il Teorema di Seifert-Van Kampen, che permette di ricostruire il gruppo fondamentale di uno spazio topologico se sono noti i gruppi di due suoi sottospazi opportunamente scelti e della loro intersezione.

Per poter applicare fruttuosamente tale teorema abbiamo bisogno di conoscere almeno uno spazio il cui gruppo fondamentale non sia banale. Tale spazio sarà la circonferenza, il cui gruppo fondamentale sarà poi calcolato nel Capitolo 5 mediante la teoria dei rivestimenti.

Il Teorema di Seifert-Van Kampen richiede che i gruppi dei sottospazi e della loro intersezione siano dati in un modo particolare, per cui, nella prima sezione richiameremo il concetto di presentazione di un gruppo.

4.1 GRUPPI CON PRESENTAZIONE

Sia S un insieme: $S = \{x_i\}_{i \in I}$.

Definizione 4.1. Chiamiamo *alfabeto* l'insieme $\{x_i, x_i^{-1}\}_{i \in I}$ dove x_i^{-1} è inteso solamente come un'espressione formale.

Definizione 4.2. Sia W l'insieme delle espressioni del tipo

$$x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \dots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$$

con $x_i \in S$ e $\varepsilon(i) = \pm 1$. Tali espressioni sono dette *parole*. W comprende anche la *parola vuota*, che non contiene nessun simbolo.

Introduciamo ora una relazione d'equivalenza \sim in W nel modo seguente: diremo che due parole w_1 e w_2 sono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra introducendo o cancellando un numero finito di espressioni del tipo $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$.

L'insieme quoziente $G = W/\sim$ risulta essere un gruppo rispetto alla giustapposizione; è detto *gruppo libero generato da S* .

L'elemento neutro è dato dalla classe della parola vuota, che indicheremo con il simbolo 1, mentre l'inverso della classe della parola $x_{i_1}^{\varepsilon(i_1)} x_{i_2}^{\varepsilon(i_2)} \dots x_{i_n}^{\varepsilon(i_n)}$ è dato dalla classe della parola $x_{i_n}^{-\varepsilon(i_n)} \dots x_{i_2}^{-\varepsilon(i_2)} x_{i_1}^{-\varepsilon(i_1)}$.

Esempi 4.3.

- a) Se $S = \emptyset$ allora $G = \{1\}$.
- b) Se $S = \{x\}$ allora $G = \{1, x, x^{-1}, xx, x^{-1}x^{-1}, \dots\} \simeq \mathbb{Z}$.
- c) Se $S = \{a, b\}$ allora $G = \{1, a, b, a^{-1}, b^{-1}, ab, ba, \dots\} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, ove $*$ indica il prodotto libero di gruppi. Tale gruppo non è abeliano.
- d) In generale, se $\text{card}(S) = n$, allora $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ è detto gruppo libero a n generatori. La sua struttura dipende solo dalla cardinalità di S , non dalla natura degli elementi di S .

Nell'insieme W delle parole, oltre alla relazione \sim , definita sopra, possiamo introdurre altre relazioni di equivalenza. Fissato un sottoinsieme $R \subset W$, diciamo che due elementi di W sono R -equivalenti

$$w_1 \sim_R w_2$$

se si ottengono uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni del tipo

- i) Inserire o cancellare xx^{-1} o $x^{-1}x$ con $x \in S$.
- ii) Inserire o cancellare r o r^{-1} con $r \in R$.

L'insieme W/\sim_R è un gruppo rispetto alla giustapposizione

$$[w_1]_R [w_2]_R = [w_1 w_2]_R,$$

detto gruppo con presentazione $\langle S \mid R \rangle$; l'insieme S è chiamato insieme dei *generatori*, mentre l'insieme R è l'insieme dei *relatori*; spesso la presentazione viene indicata mettendo in evidenza le relazioni individuate dagli elementi di R , cioè si scrive $\langle S \mid \{r = 1 \mid r \in R\} \rangle$.

Osservazione 4.4. Si può dimostrare che il gruppo $\langle S \mid R \rangle$ è il quoziente del gruppo libero $\langle S \mid \emptyset \rangle$ rispetto alla *chiusura normale* di R , cioè rispetto al più piccolo sottogruppo normale che contiene R .

Esempi 4.5.

- a) $\langle \emptyset \mid \emptyset \rangle = \{1\}$ Gruppo banale.
- b) $\langle x \mid x^n \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Classi di resti modulo n .
- c) $\langle x, y \mid xy = yx \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ¹.

¹Se G e G' sono gruppi, con $G \times G'$ intendiamo il prodotto diretto di tali gruppi, cioè il loro prodotto cartesiano dotato dell'operazione definita componente per componente utilizzando le operazioni in G e G'

- d) $\langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$, il gruppo Diedrale, cioè il gruppo delle simmetrie del quadrato (x è una rotazione di un angolo retto, y la riflessione rispetto a una diagonale).
- e) $S_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1, (s_i s_j)^2 = 1 \text{ se } |i - j| > 1, (s_i s_j)^3 = 1 \text{ se } |i - j| = 1 \rangle$, il gruppo S_n , delle permutazioni su n elementi.
- f) Ogni gruppo (G, \cdot) è un gruppo con presentazione. Una presentazione è data da $\langle S_G \mid R_G \rangle$, con $S_G = G$ e $R_G = \{(x \cdot y)y^{-1}x^{-1}\}$.

Osservazione 4.6. Lo stesso gruppo può avere diverse presentazioni.

Proposizione 4.7 (Trasformazioni di Tietze). Sia $G = \langle S \mid R \rangle$.

1. Se una relazione $r \in R$ è conseguenza delle relazioni in $R \setminus \{r\}$ allora

$$\langle S \mid R \rangle = \langle S \mid R \setminus \{r\} \rangle.$$

2. Sia $\bar{s} \notin S$ e w una parola nell'alfabeto su S ; allora

$$\langle S \mid R \rangle = \langle S \cup \{\bar{s}\} \mid R \cup \{\bar{s} = w\} \rangle.$$

Definizione 4.8. Sia G un gruppo, e $g_1, g_2 \in G$; il commutatore di g_1 e g_2 , denotato con $[g_1, g_2]$, è l'elemento $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$. Se H, K sono sottoinsiemi di G , indicheremo con $[H, K]$ l'insieme dei commutatori $[h, k]$, con $h \in H$ e $k \in K$. Prendendo $H = K = G$, l'insieme $[G, G]$ risulta essere un sottogruppo normale, detto *sottogruppo dei commutatori* di G .

Osservazione 4.9. Si può dimostrare, usando l'Osservazione 4.4 che, dati due gruppi con presentazione $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, allora $G = G_1 \oplus G_2$ ammette la presentazione $G = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup [S_1, S_2] \rangle$.

Definizione 4.10. Sia G un gruppo. Il suo *abelianizzato*, denotato con $\text{Ab}(G)$, è il gruppo quoziente di G rispetto al sottogruppo normale $[G, G]$. Data una presentazione $G = \langle S \mid R \rangle$, è semplice verificare che $\text{Ab}(G)$ ammette la presentazione

$$\text{Ab}(G) = \langle S \mid R \cup [S, S] \rangle$$

Osservazione 4.11. Se G e G' sono gruppi isomorfi, allora $\text{Ab}(G)$ e $\text{Ab}(G')$ sono gruppi isomorfi.

Esempi 4.12.

- a) $G = \langle S \mid \emptyset \rangle, S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Allora $\text{Ab}(G) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$.

b) $G = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$. L'abelianizzato è

$$\text{Ab}(G) = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = [x, y] = 1 \rangle;$$

poiché x e y commutano la terza relazione diventa $x^2y^2 = 1$, e quindi, utilizzando la seconda si deduce $x^2 = 1$. Pertanto, per la Proposizione 4.7 1) $\text{Ab}(G) = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = (xy)^2 = [x, y] = x^2 = 1 \rangle$. E' immediato verificare che la prima e la terza relazione sono conseguenze delle altre, e quindi

$$\begin{aligned} \text{Ab}(G) &= \langle x, y \mid x^2 = y^2 = [x, y] = 1 \rangle \\ &= \langle x \mid x^2 = 1 \rangle \oplus \langle y \mid y^2 = 1 \rangle \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

c) Sia $S_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 = (s_1s_2)^3 = 1 \rangle$ il gruppo di sostituzioni su tre elementi; il suo abelianizzato è

$$\text{Ab}(S_3) = \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 = (s_1s_2)^3 = [s_1, s_2] = 1 \rangle;$$

combinando la seconda e la terza relazione si ottiene $s_1^3s_2^3 = 1$, e quindi, utilizzando l'idempotenza degli s_i otteniamo $s_1 = s_2^{-1}$. Applicando il punto 1) della Proposizione 4.7 per due volte, e poi il punto 2) della medesima proposizione otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Ab}(S_3) &= \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 = (s_1s_2)^3 = [s_1, s_2] = s_1s_2 = 1 \rangle \\ &= \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 = s_1s_2 = 1 \rangle \\ &= \langle s_1 \mid s_1^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

In modo analogo è possibile mostrare che $\text{Ab}(S_n) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 2$.

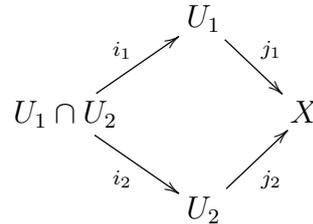
d) Sia $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$; il suo abelianizzato è il gruppo $\text{Ab}(G) = \langle a, b \mid aba^{-1}b = [a, b] = 1 \rangle$; combinando le due relazioni otteniamo $b^2 = 1$, quindi $\text{Ab}(G) = \langle a, b \mid aba^{-1}b = [a, b] = b^2 = 1 \rangle$ per la Proposizione 4.7 1); osservando ora che da $b^2 = 1$ segue che $b^{-1} = b$ la prima relazione può essere derivata dalle ultime due, quindi, ancora per la Proposizione 4.7 1) e per l'Osservazione 4.9:

$$\text{Ab}(G) = \langle a, b \mid b^2 = [a, b] = 1 \rangle = \langle a \mid \emptyset \rangle \oplus \langle b \mid b^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2.$$

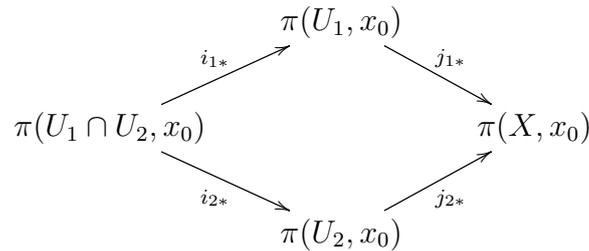
4.2 IL TEOREMA DI SEIFERT-VAN KAMPEN

Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connesso per archi; sia

infine x_0 un punto di $U_1 \cap U_2$. Le inclusioni danno luogo al seguente diagramma commutativo



che induce un diagramma commutativo sui gruppi fondamentali



Consideriamo delle presentazioni per $\pi(U_1, x_0)$, $\pi(U_2, x_0)$ e $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$

$$\begin{aligned}
 \pi(U_1, x_0) &= \langle S_1 \mid R_1 \rangle \\
 \pi(U_2, x_0) &= \langle S_2 \mid R_2 \rangle \\
 \pi(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle S \mid R \rangle
 \end{aligned}$$

Il Teorema di Seifert-Van Kampen ci permette di trovare il gruppo fondamentale di X conoscendo quello di U_1 , quello di U_2 e quello di $U_1 \cap U_2$. In particolare

I generatori di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione dei generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e dei generatori di $\pi(U_2, x_0)$.

Le **relazioni** di $\pi(X, x_0)$ sono l'unione delle relazioni di $\pi(U_1, x_0)$, delle relazioni di $\pi(U_2, x_0)$ e di un insieme di relazioni R_S costruito a partire dai generatori di $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$.

L'insieme di relazioni R_S si costruisce nel modo seguente: preso un elemento $s \in \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$, possiamo considerare le sue immagini $i_{1*}s \in \pi(U_1, x_0)$ e $i_{2*}s \in \pi(U_2, x_0)$ e denotiamo con " $i_{1*}s$ " e " $i_{2*}s$ " le parole corrispondenti.

Ciò significa che " $i_{1*}s$ " è la parola che si ottiene scrivendo $i_{1*}s$ utilizzando gli elementi di S_1 , cioè i generatori di $\pi(U_1, x_0)$ e analogamente " $i_{2*}s$ " è la parola che si ottiene scrivendo $i_{2*}s$ utilizzando gli elementi di S_2 , cioè i generatori di $\pi(U_2, x_0)$. L'insieme R_S è costituito dalle relazioni che nascono per il fatto che $j_{1*} \circ i_{1*} = j_{2*} \circ i_{2*}$, cioè:

$$R_S = \{ "i_{1*}s" = "i_{2*}s" \mid s \in S \}.$$

Riassumiamo quanto detto finora:

Teorema 4.13 (Seifert-Van Kampen). *Sia X uno spazio topologico, U_1 e U_2 due suoi aperti non vuoti e connessi per archi tali che $X = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2$ sia non vuoto e connesso per archi e $x_0 \in U_1 \cap U_2$.*

*Siano $\pi(U_1, x_0) = \langle S_1 | R_1 \rangle, \pi(U_2, x_0) = \langle S_2 | R_2 \rangle, \pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S | R \rangle$ e sia $R_S = \{ "i_{1*s}" = "i_{2*s}" | s \in S \}$. Allora*

$$\pi(X, x_0) \simeq \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle.$$

Per poter utilizzare il Teorema di Seifert-Van Kampen è necessario conoscere il gruppo fondamentale degli aperti U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$. Sappiamo già che il gruppo fondamentale di uno spazio contraibile è il gruppo banale. Anticipiamo un altro risultato che dimostreremo più avanti (Corollario 5.26):

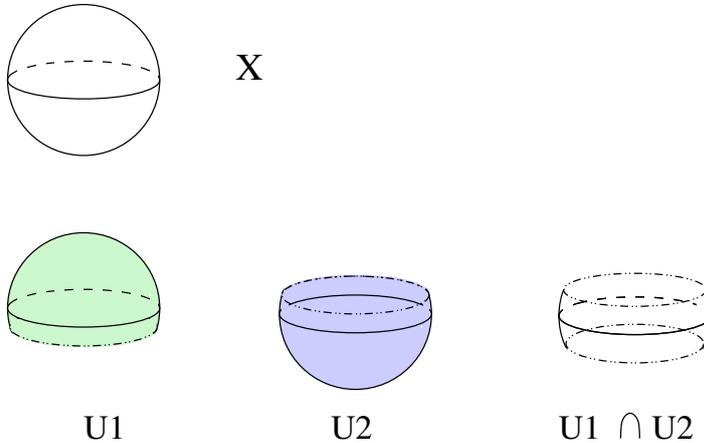
Teorema 4.14. *Sia x_0 il punto $(1, 0)$ della circonferenza \mathbf{S}^1 . Allora*

$$\pi(\mathbf{S}^1, x_0) \simeq \langle \alpha | \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z},$$

dove il generatore α è la classe del cappio $a(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Esempio 4.15. Sia $X = \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, sia x_0 un punto sull'equatore, sia $0 < \varepsilon \ll 1$ e siano

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z > -\varepsilon\}, \quad U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z < \varepsilon\}.$$



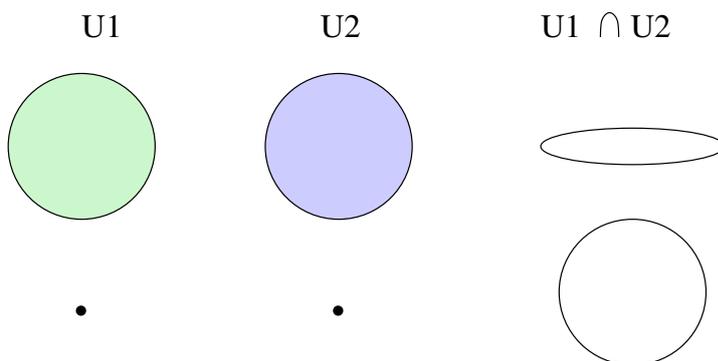
Gli insiemi U_i sono omeomorfi a dischi di dimensione due, e perciò contraibili, quindi i loro gruppi fondamentali sono banali:

$$\pi(U_i, x_0) = \langle \emptyset | \emptyset \rangle.$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha l'equatore come retratto di deformazione, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \alpha | \emptyset \rangle,$$

dove α è un cammino che fa un giro sull'equatore.



Applicando il Teorema 4.13 otteniamo quindi

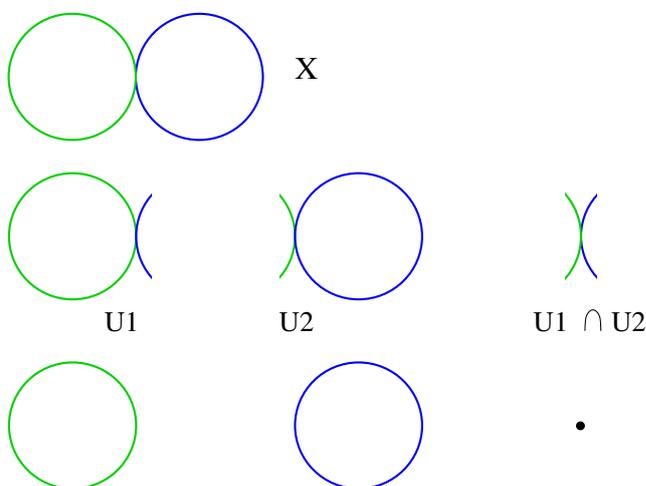
$$\pi(\mathbf{S}^2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$$

Osservazione 4.16. Possiamo, più in generale, osservare che, qualora i gruppi fondamentali $\pi(U_i, X_0)$ siano banali, allora anche il gruppo fondamentale di X è banale.

Esempio 4.17. Sia $X = \mathbf{S}^n$ con $n > 2$; prendendo aperti U_1 e U_2 e un punto x_0 in modo analogo a quanto fatto nell'Esempio 4.15 e utilizzando l'Osservazione 4.16 possiamo concludere che $\pi(\mathbf{S}^n, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$.

Esempio 4.18. Sia $X = \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1 = \{(x + 1)^2 + y^2 = 1\} \vee \{(x - 1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, sia $x_0 = (0, 0)$ e sia $0 < \varepsilon \ll 1$ e siano

$$U_1 = \{(x, y) \in X \mid x < \varepsilon\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in X \mid x > -\varepsilon\}.$$



Il gruppo fondamentale della circonferenza $\{(x+1)^2 + y^2 = 1\}$ è ciclico infinito generato dalla classe α del cammino $a(t) = (\cos(2\pi t) - 1, \sin(2\pi t))$; l'aperto U_1 ha tale circonferenza come retratto di deformazione, quindi abbiamo un isomorfismo

$$\pi(\mathbf{S}^1, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, x_0)$$

$$\alpha \longrightarrow i_*\alpha$$

Denotando con abuso di linguaggio ancora con α la classe del cammino $i \circ \alpha$ possiamo quindi concludere che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha \mid \emptyset \rangle.$$

Analogamente, denotato con β la classe del cammino $b(t) = (\cos(2\pi t)+1, \sin(2\pi t))$ avremo che

$$\pi(U_2, x_0) = \langle \beta \mid \emptyset \rangle.$$

L'intersezione $U_1 \cap U_2$ è contraibile, quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle.$$

Applicando il Teorema 4.13 otteniamo

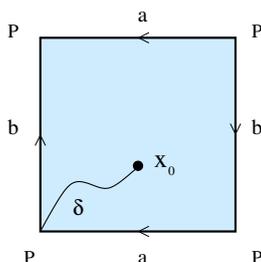
$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Osservazione 4.19. Possiamo in generale osservare che, dati due spazi topologici (X, x_0) e (Y, y_0) , con gruppi fondamentali $\pi(X, x_0) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $\pi(Y, y_0) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ e tali che x_0 e y_0 hanno un intorno contraibile in X e in Y rispettivamente, allora il gruppo fondamentale dello spazio topologico Z , unione a un punto di (X, x_0) e (Y, y_0) è dato da

$$\pi(Z, z_0) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

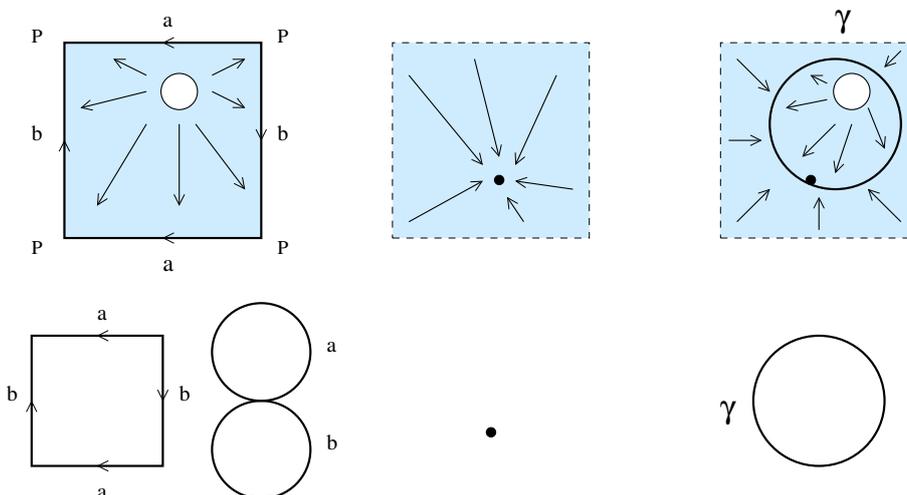
Esempio 4.20. Utilizzando ripetutamente l'Osservazione 4.19 possiamo mostrare che il gruppo fondamentale di un *bouquet* di k circonferenze² è il gruppo libero con k generatori.

Esempio 4.21. $X = K$, la bottiglia di Klein; sia x_0 un punto interno al poligono e sia δ un cammino che congiunge il punto P , vertice del poligono, con x_0 .



²cioè l'unione a un punto di k copie di \mathbf{S}^1 .

Sia $U_1 = K \setminus D$, ove D è un disco chiuso contenuto in K e che non contiene x_0 , e sia $U_2 = K \setminus \{a, b\}$. Con abuso di linguaggio denoteremo, da ora in avanti, con la stessa lettera un cammino e la sua classe di omotopia. Il contesto chiarirà a cosa ci stiamo riferendo di volta in volta.



L'aperto U_1 ha come retratto di deformazione il bordo di K , $\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$; abbiamo dunque isomorfismi

$$\pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) \xrightarrow{i_*} \pi(U_1, P) \xrightarrow{u_\delta} \pi(U_1, x_0)$$

Ricordando che $\pi(\partial K, P) = \langle a, b \mid \emptyset \rangle$, e detti $\alpha = \bar{\delta}i_*a\delta$ e $\beta = \bar{\delta}i_*b\delta$ abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \emptyset \rangle.$$

L'aperto U_2 è contraibile, e perciò $\pi(U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$.

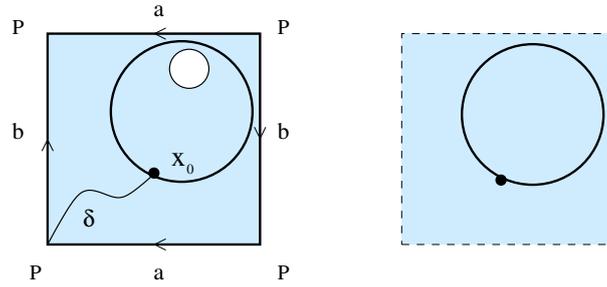
L'intersezione $U_1 \cap U_2$ ha una circonferenza γ passante per x_0 come retratto di deformazione, e perciò, confondendo γ con $i_*\gamma$ possiamo scrivere

$$\pi(U_1 \cap U_2) = \langle \gamma \mid \emptyset \rangle.$$

Vediamo ora di costruire l'insieme $R_S = \{“i_{1*}\gamma” (“i_{2*}\gamma”)^{-1}\}$.

Dobbiamo considerare la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_1, x_0)$ e scriverla utilizzando i generatori di tale gruppo. Osserviamo che la retrazione $r : U_1 \rightarrow \mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ manda il cammino $i_{1*}\gamma$ nel cammino $ba^{-1}ba$, e quindi

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, P) &\xrightarrow{i_*} \pi(U_1, P) \xrightarrow{u_\delta} \pi(U_1, x_0) \\ ba^{-1}ba &\longrightarrow i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a \longrightarrow \bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta \end{aligned}$$



Pertanto $\bar{\delta}i_*bi_*a^{-1}i_*bi_*a\delta = \bar{\delta}i_*b\bar{\delta}i_*a^{-1}\delta\bar{\delta}i_*b\delta\bar{\delta}i_*a\delta = \beta\alpha^{-1}\beta\alpha$.

Ripetiamo il procedimento con la classe dell'immagine di γ in $\pi(U_2, x_0)$. poiché tale gruppo è banale, avremo che anche $i_{2*}\gamma$ sarà banale: $i_{2*}\gamma = 1$.

Possiamo quindi concludere che

$$\pi(K, x_0) = \langle \alpha, \beta \mid \beta\alpha^{-1}\beta\alpha = 1 \rangle.$$

4.3 GRUPPO FONDAMENTALE E RETRAZIONI

Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ un sottospazio e $a \in A$. Riassumiamo le condizioni necessarie sui gruppi fondamentali e sui morfismi indotti tra i gruppi fondamentali perché A possa essere un retratto o un retratto di deformazione di X .

Proposizione 4.22. *Sia $A \subset X$ un retratto. Indichiamo con $r : X \rightarrow A$ la retrazione e con $i : A \rightarrow X$ l'inclusione. Allora, per ogni $a \in A$, denotati con $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ e $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ i morfismi indotti si ha*

$$r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A, a)};$$

in particolare i_* è iniettivo e r_* è suriettivo.

Condizione necessaria affinché un sottospazio A di X sia un retratto di deformazione è che, per ogni $a \in A$ si abbia $\pi(X, a) \simeq \pi(A, a)$.

Dimostrazione. La prima parte è il contenuto della Proposizione 3.16, mentre la seconda è una conseguenza del Teorema 3.18. \square

Esempi 4.23. a) S^1 non è un retratto di D^2 .

Sia $x_0 = (1, 0)$. Se S^1 fosse un retratto di D^2 la mappa

$$i_* : \pi(S^1, x_0) \rightarrow \pi(D^2, x_0)$$

sarebbe iniettiva, ma ciò è impossibile, in quanto il secondo gruppo è banale, mentre il primo è isomorfo a \mathbb{Z} .

b) S^1 non è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

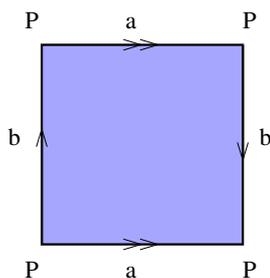
Sia $x_0 = (1, 0)$. Dobbiamo studiare l'omomorfismo

$$i_* : \pi(S^1, x_0) \rightarrow \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, x_0)$$

Entrambi i gruppi sono isomorfi a \mathbb{Z} , ma un generatore del gruppo $\pi(S^1, x_0)$ è la classe del cammino $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, mentre un generatore del gruppo $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, x_0)$ è la classe del cammino $\gamma(t) = (1 + \cos(2\pi t), 1 + \sin(2\pi t))$.

L'immagine della classe $[\alpha]$ in $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, x_0)$ è la classe di un cammino che, non girando attorno al punto $(1, 1)$ è omotopo al cammino banale. Pertanto i_* non è iniettiva e S^1 non è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$.

c) Sia X la bottiglia di Klein, ottenuta come quoziente del quadrato, come in figura:



e sia A la circonferenza b . Mostriamo che A non è un retratto di X . Consideriamo il diagramma

$$\pi(A, P) \xrightarrow{i_*} \pi(X, P) \xrightarrow{r_*} \pi(A, P)$$

$$\langle b \mid \emptyset \rangle \xrightarrow{i_*} \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle \xrightarrow{r_*} \langle b \mid \emptyset \rangle$$

Poiché $i_*(b) = b$ e $r_* \circ i_* = \text{Id}_{\pi(A, P)}$ si ha $r_*(b) = b$.

Sia $r_*(a) = b^k$; poiché in $\pi(X, P)$ si ha $aba^{-1}b = 1$ allora $r_*(aba^{-1}b) = 1$.

Da ciò segue $1 = r_*(a)r_*(b)r_*(a^{-1})r_*(b) = b^k b b^{-k} b = b^2$, raggiungendo la contraddizione che in $\pi(A, P) = \langle b \mid \emptyset \rangle$ si dovrebbe avere $b^2 = 1$.

4.4 IL TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE

Definizione 4.24. Sia X una superficie compatta. Un *triangolo geometrico* in X è un'applicazione $\tau : T' \rightarrow T \subset X$ che sia un omeomorfismo sull'immagine, dove T' è un triangolo (non degenere) di \mathbb{R}^2 .

Definizione 4.25. Una *triangolazione* di una superficie topologica X è una collezione di triangoli geometrici tale che ogni punto di X appartiene all'immagine un triangolo geometrico e nella quale le possibili intersezioni delle immagini di due diversi triangoli geometrici sono

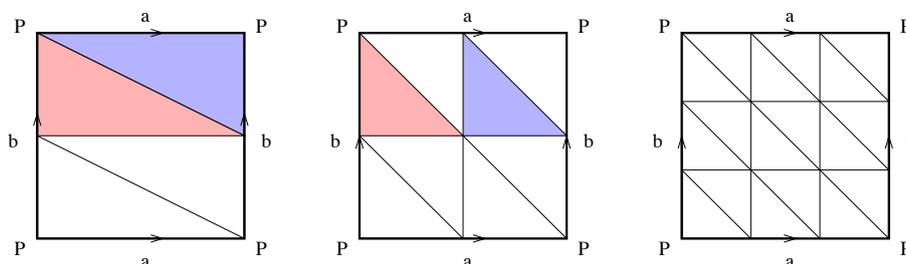
- L'insieme vuoto;
- Un punto, che sia immagine di un vertice per entrambi;
- L'immagine omeomorfa di un segmento, che sia immagine di un lato per entrambi.

Le superfici topologiche sono tutte triangolabili. La dimostrazione di questo fatto è al di là della portata di queste note.

Teorema 4.26 (Teorema di Radò). *Ogni superficie è triangolabile e ogni superficie compatta ammette una triangolazione finita.*

Osservazione 4.27. Per la validità del teorema precedente la condizione che una superficie sia uno spazio topologico a base numerabile è essenziale.

Esempio 4.28. Consideriamo il toro. Le prime due suddivisioni in figura non sono triangolazioni (ci sono triangoli con due lati in comune o con due vertici in comune senza il lato corrispondente in comune), la terza sì.



Teorema 4.29 (Teorema di classificazione). *Sia S una superficie compatta. Allora S è omeomorfa ad una superficie T_g ($g \geq 0$) o ad una superficie U_h ($h \geq 1$). Inoltre, $T_g \not\cong U_h$ per ogni $g \geq 0$ e $h \geq 1$ e, se $g \neq g'$ allora $T_g \not\cong T_{g'}$ e se $h \neq h'$ allora $U_h \not\cong U_{h'}$.*

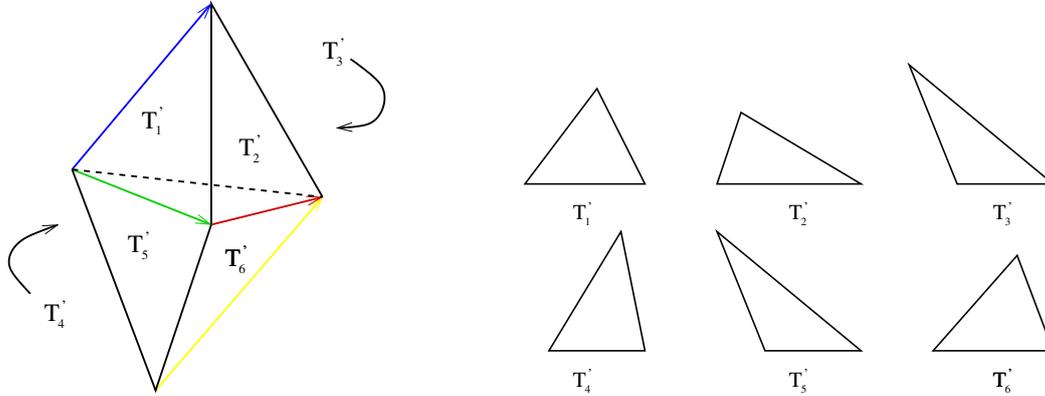
Dimostrazione.

Passo 1: Una superficie compatta S è omeomorfa a un poligono di \mathbb{R}^2 con i lati identificati a coppie.

Una superficie compatta ammette una triangolazione finita.

Siano $\tau_1 : T'_1 \rightarrow T_1, \dots, \tau_n : T'_n \rightarrow T_n$ i triangoli geometrici di tale triangolazione, ordinati in modo che T_i abbia uno spigolo in comune con uno dei triangoli precedenti T_1, T_2, \dots, T_{i-1} . Il fatto che sia sempre possibile ordinare i triangoli in questo modo segue dalla connessione di S .

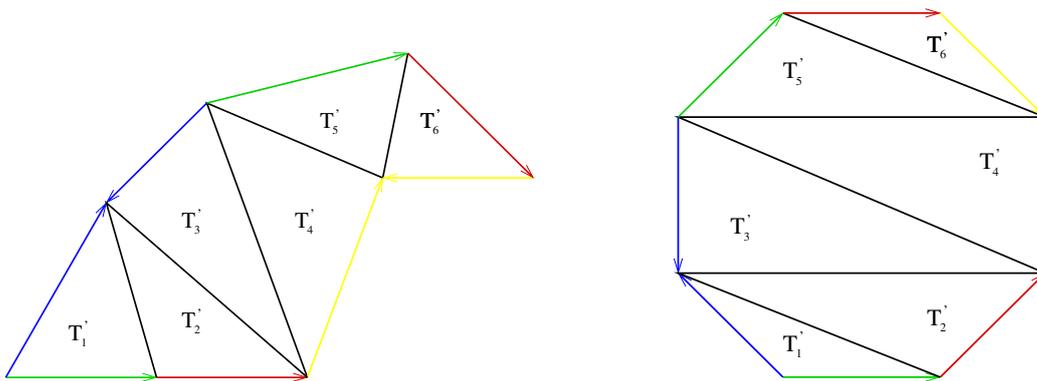
Senza perdita di generalità supponiamo che T'_1, \dots, T'_n siano a coppie disgiunti, e denotiamo con $T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i$ la loro unione.



Introduciamo ora una relazione di equivalenza in T' in questo modo: T_2 ha uno spigolo in comune con T_1 , quindi esistono due lati e_1 ed e_2 dei triangoli T'_1 e T'_2 tali che $\tau_1(e_1) = \tau_2(e_2)$. In particolare $\tau_2^{-1} \circ \tau_1 : e_1 \rightarrow e_2$ è un omeomorfismo. Utilizzando tale omeomorfismo identifichiamo e_1 ed e_2 .

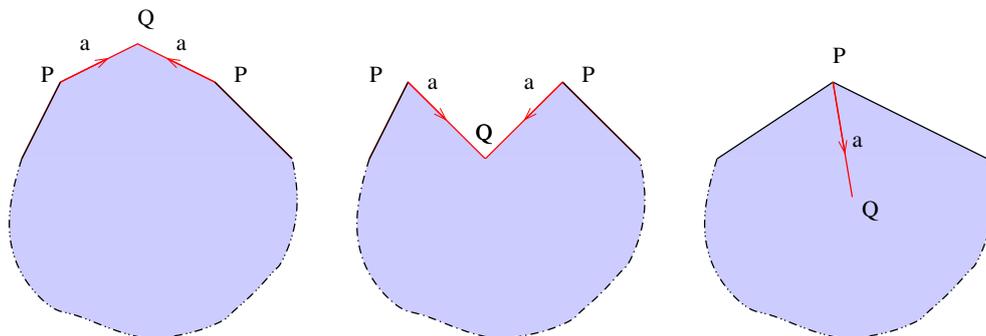
In generale T_i ha uno spigolo in comune con T_j per qualche $j < i$, quindi esistono due lati e_i ed e_j dei triangoli T'_i e T'_j tali che $\tau_i(e_i) = \tau_j(e_j)$. In particolare $\tau_j^{-1} \circ \tau_i : e_i \rightarrow e_j$ è un omeomorfismo. Utilizzando tale omeomorfismo identifichiamo e_i ed e_j .

Lo spazio T' modulo questa relazione di equivalenza è omeomorfo a un poligono, e la mappa $\tau : T' \rightarrow S$ ottenuta incollando le mappe τ_i è l'identificazione di coppie di lati del poligono



Passo 2: Eliminazione delle coppie adiacenti del primo tipo.

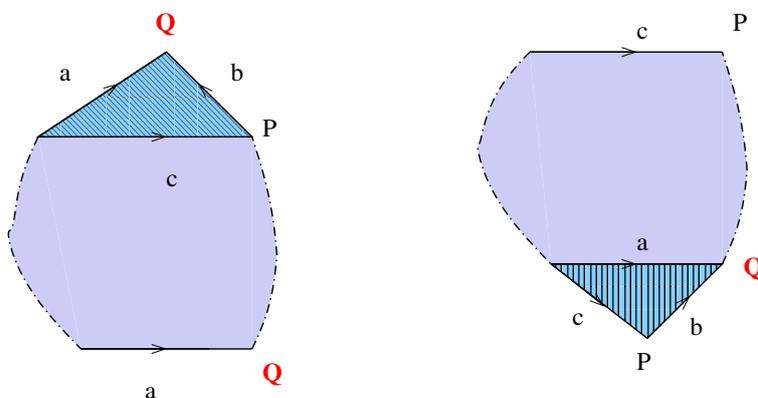
Diremo che una coppia è del *primo tipo* se i lati che la compongono compaiono con l'orientazione opposta, del *secondo tipo* altrimenti.



In figura vediamo come sia possibile eliminare coppie adiacenti del primo tipo se il poligono ha almeno quattro lati. Se il poligono ha solamente due lati ci sono due possibilità: o è del tipo aa^{-1} e quindi la superficie è una sfera, o è del tipo aa e quindi la superficie è un piano proiettivo reale.

Passo 3: Riduzione dei vertici ad un unico nome.

Supponiamo di aver ripetuto il secondo passo finché è stato possibile; i vertici del poligono non sono necessariamente tutti identificati tra di loro, ma possono appartenere a diverse classi di equivalenza. Mostriamo ora come, con una serie di operazioni successive, sia possibile arrivare ad un nuovo poligono in cui tutti i vertici appartengono ad un'unica classe di equivalenza.



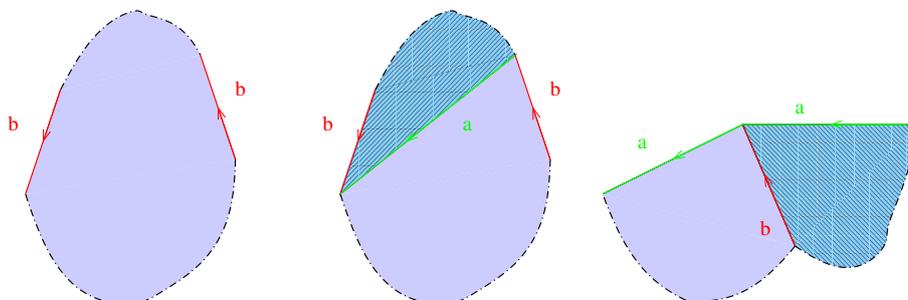
Le operazioni mostrate in figura fanno diminuire i vertici nella classe di equivalenza di Q di un'unità e fanno aumentare i vertici nella classe di equivalenza di P di un'unità.

Alternando il passo 2 ed il passo 3 (perché è necessario il passo 2?) arriviamo ad un poligono in cui tutti i vertici devono essere identificati e in cui non sono presenti coppie adiacenti del primo tipo.

Passo 4: Rendere adiacenti le coppie del secondo tipo.

Vogliamo mostrare che è possibile rendere adiacenti tutte le coppie del secondo tipo. Per far ciò, per ogni coppia non adiacente del secondo tipo operiamo un

taglio tra gli estremi finali della coppia scelta, come in figura, ed incolliamo in corrispondenza della coppia medesima.

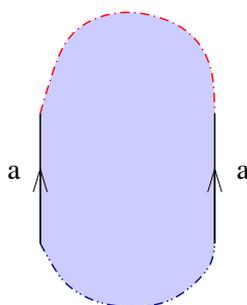


Se nel poligono ci sono solo coppie del secondo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 4 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1 a_1 \dots a_h a_h$, cioè una superficie U_h , e abbiamo finito. Nel caso che ci siano coppie del primo tipo continuiamo con il

Passo 5: Raggruppare le coppie del primo tipo.

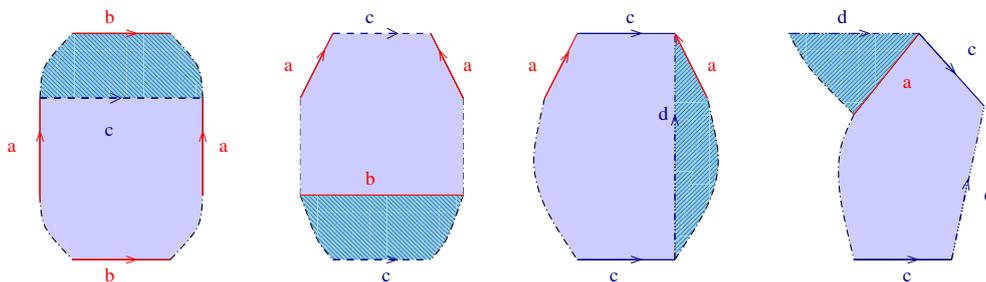
Supponiamo quindi che ci sia almeno una coppia del primo tipo. In tal caso ne deve esistere un'altra tale che queste due coppie si separano a vicenda.

Infatti, se così non fosse, ci troveremmo in una situazione come quella in figura, in cui tutti i lati nella parte rossa si identificano con lati nella parte rossa (in alto) e tutti i lati nella parte blu si identificano con lati nella parte blu (in basso).



Questa situazione non è possibile, perché in tal caso i due estremi di a non vengono identificati, in contraddizione con il passo 3.

Pertanto esistono due coppie del primo tipo che si separano a vicenda come in figura, e tali coppie possono essere raggruppate tagliando due volte in corrispondenza degli estremi finali dei lati.

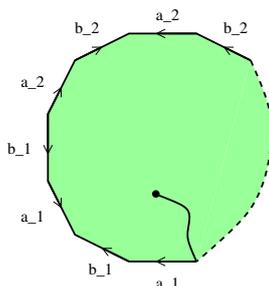


Se nel poligono compaiono solo coppie del primo tipo, dopo un numero finito di applicazioni del passo 5 otteniamo una superficie il cui poligono è del tipo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, cioè una superficie T_g , e abbiamo finito.

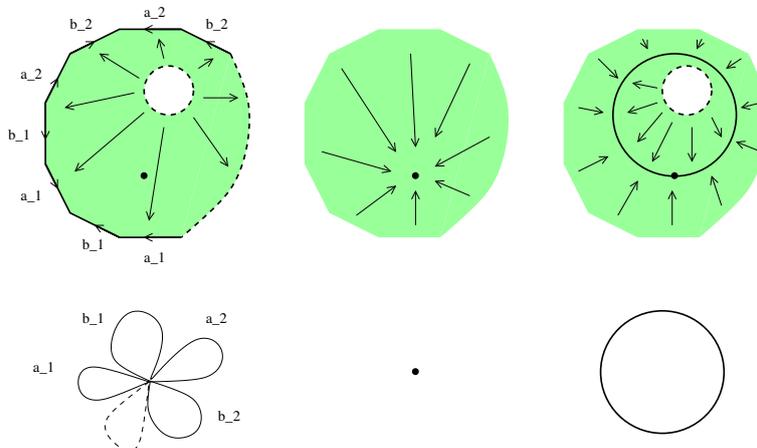
Nel caso in cui nel poligono compaiono coppie sia del primo che del secondo tipo, cioè che il poligono sia del tipo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots c_1 c_1 \dots$, possiamo applicare la Proposizione 1.19.

Abbiamo così concluso la dimostrazione della prima parte del teorema.

Calcoliamo ora i gruppi fondamentali delle superfici T_g e U_h . Già sappiamo che $\pi(\mathbb{S}^2, x) \simeq \{1\}$; consideriamo dunque la superficie T_g con $g \geq 1$.



Per applicare il teorema di Seifert-Van Kampen scegliamo un punto x_0 interno al poligono e un cammino δ che congiunge il punto P , vertice del poligono, con x_0 . Scegliamo poi come aperto U_1 la superficie T_g privata di un disco, e come aperto U_2 la superficie T_g meno il bordo del poligono.



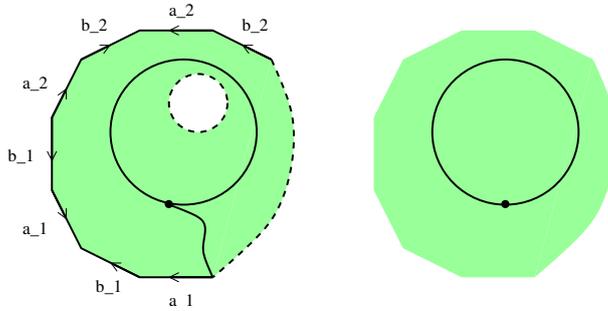
L'aperto U_1 ha il bordo del poligono, che è un bouquet di $2g$ circonferenze, come retratto di deformazione; detti $\alpha_i = \bar{\delta}a_i\delta$ e $\beta_i = \bar{\delta}b_i\delta$ e procedendo come nel caso della bottiglia di Klein abbiamo che

$$\pi(U_1, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \emptyset \rangle.$$

L'aperto U_2 è contraibile, quindi $\pi(U_2, x_0) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$. L'intersezione $U_1 \cap U_2$ si retrae su una circonferenza γ passante per x_0 , quindi

$$\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle \gamma \mid \emptyset \rangle.$$

Il cammino γ , in U_1 , è omotopicamente equivalente a $\bar{\delta}a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\delta$ e quindi a $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$. Invece, in U_2 , γ è omotopicamente equivalente al cammino banale, e quindi $R_S = \{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1\}$;



Pertanto si ha che

$$\pi(T_g, x_0) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

Del tutto analoga (e lasciata come esercizio) è la procedura per calcolare il gruppo fondamentale delle superfici U_h , che porta alla seguente conclusione:

$$\pi(U_h, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \dots \alpha_h^2 = 1 \rangle.$$

Per mostrare che i gruppi fondamentali che abbiamo calcolato non sono tra loro isomorfi, calcoliamo i loro abelianizzati; chiaramente

$$\text{Ab}(\pi(T_g, x_0)) = \mathbb{Z}^{2g};$$

invece $\text{Ab}(\pi(U_h, x_0)) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid [\alpha_i, \alpha_j] = 1, (\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_h)^2 = 1 \rangle$. Possiamo scrivere tale gruppo con una presentazione diversa:

$$\begin{aligned} \text{Ab}(\pi(U_h, x_0)) &= \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid [\alpha_i, \alpha_j] = 1, \alpha_0 = \alpha_1 \dots \alpha_h, \alpha_0^2 = 1 \rangle \\ &= \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid [\alpha_i, \alpha_j] = 1, \alpha_h = \alpha_{h-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} \alpha_0, \alpha_0^2 = 1 \rangle \\ &= \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1} \mid [\alpha_i, \alpha_j] = 1, \alpha_0^2 = 1 \rangle \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\text{Ab}(\pi(U_h, x_0)) = \mathbb{Z}^{h-1} \times \mathbb{Z}_2$$

Come prima cosa osserviamo che gli abelianizzati dei gruppi delle superfici orientabili non hanno torsione, mentre in quelli delle superfici non orientabili la torsione è presente. Tali gruppi non sono perciò isomorfi (si veda più avanti la Proposizione 6.7). Per concludere la dimostrazione utilizzeremo la seguente

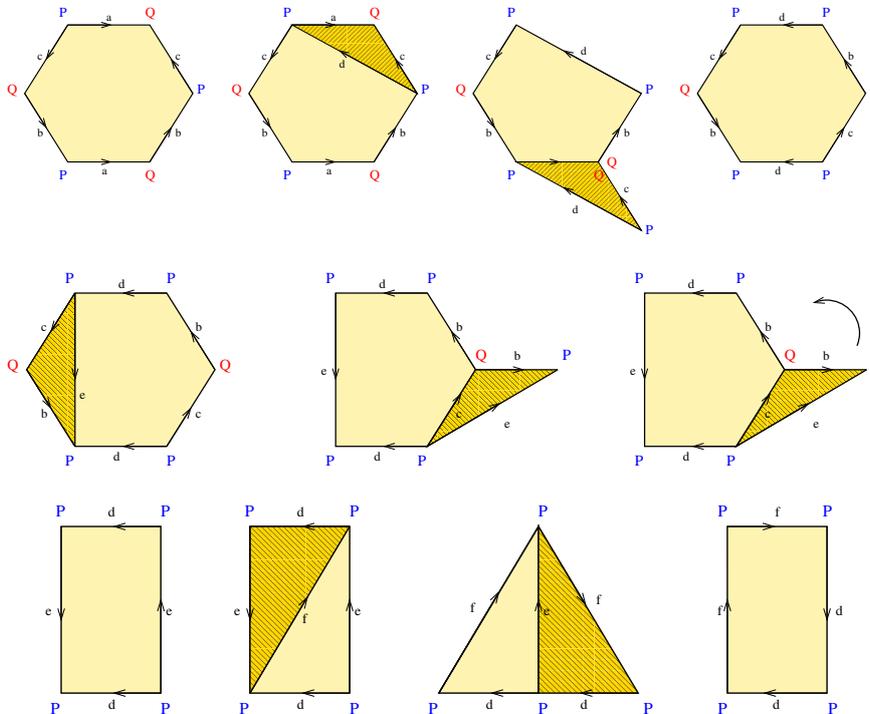
Proposizione 4.30. *Sia $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ un isomorfismo di gruppi. Allora $n = m$.*

Dimostrazione. Sia $H \subset \mathbb{Z}^n$ il sottogruppo dei pari, cioè degli elementi della forma $(2h_1, 2h_2, \dots, 2h_n)$ con $h_i \in \mathbb{Z}$. È semplice verificare che $\mathbb{Z}^n/H \simeq (\mathbb{Z}_2)^n$. Analogamente, indicato con K il sottogruppo dei pari di \mathbb{Z}^m troviamo che $\mathbb{Z}^m/H \simeq (\mathbb{Z}_2)^m$. Chiaramente, essendo φ e φ^{-1} morfismi di gruppi si ha $\varphi(H) \subset K$; e $\varphi^{-1}(K) \subset H$, e quindi $\varphi(H) = K$. Di conseguenza φ induce un isomorfismo $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}^n/H \rightarrow \mathbb{Z}^m/K$. Tali gruppi sono finiti, di cardinalità 2^n e 2^m rispettivamente, quindi $m = n$ \square

Da ciò segue che $\text{Ab}(\pi(T_g, x_0)) \not\simeq \text{Ab}(\pi(T_{g'}, x_0))$ se $g \neq g'$, quindi $\pi(T_g, x_0)$ e $\pi(T_{g'}, x_0)$ sono gruppi non isomorfi se $g \neq g'$, e quindi T_g e $T_{g'}$ sono superfici non omeomorfe se $g \neq g'$.

Applicando la Proposizione 4.30 ai gruppi $\text{Ab}(\pi(U_h, x_0))/\mathbb{Z}_2$ e $\text{Ab}(\pi(U_{h'}, x_0))/\mathbb{Z}_2$ concludiamo che $\text{Ab}(\pi(U_h, x_0)) \not\simeq \text{Ab}(\pi(U_{h'}, x_0))$ se $h \neq h'$, quindi $\pi(U_h, x_0)$ e $\pi(U_{h'}, x_0)$ sono gruppi non isomorfi se $h \neq h'$, e quindi U_h e $U_{h'}$ sono superfici non omeomorfe se $h \neq h'$. \square

Esempio 4.31. Classificare la superficie il cui poligono rappresentativo è $abca^{-1}cb$.



La superficie in esame è omeomorfa alla superficie U_2 .

In questo capitolo vedremo alcuni cenni sulla teoria dei rivestimenti. Intuitivamente un rivestimento è uno spazio topologico che localmente è un prodotto di un altro spazio topologico con uno spazio discreto, ma globalmente non è un prodotto. Attraverso la teoria dei rivestimenti è possibile calcolare alcuni gruppi fondamentali. In particolare dimostreremo che il gruppo fondamentale della circonferenza è isomorfo a \mathbb{Z} .

5.1 AZIONI DI GRUPPO

Definizione 5.1. Sia X un insieme e G un gruppo. Diremo che G agisce (a sinistra) su X se esiste un'applicazione $*$: $G \times X \rightarrow X$, che associa alla coppia (g, x) l'elemento $g * x$ di X in modo tale che

1. $1_G * x = x$ per ogni $x \in X$, con 1_G elemento neutro di G .
2. $h * (g * x) = (hg) * x$ per ogni $x \in X$ e per ogni $g, h \in G$.

In tal caso diremo che X è un G -insieme (sinistro). Analoghe definizioni si danno per l'azione a destra di un gruppo.

Esempi 5.2.

1. Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$; un'azione di gruppo è definita associando alla coppia (n, x) il numero reale $n * x = n + x$.
2. Analogamente, se $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}^2$ si può definire un'azione ponendo $(m, n) * (x, y) = (m + x, n + y)$.
3. Sia $G = \mathbb{Z}_2$ e $X = \mathbb{S}^n$; un'azione di G su X può essere definita ponendo $\pm 1 * \mathbf{x} = \pm \mathbf{x}$.
4. Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ agisce su \mathbb{R}^n per moltiplicazione.
5. Allo stesso modo $SO(n, \mathbb{R})$ agisce su \mathbb{S}^n .

Definizione 5.3. Fissato un punto $x \in X$, il sottogruppo $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$ è detto *stabilizzatore* o *sottogruppo di isotropia* del punto $x \in X$. L'insieme $G * x = \{g * x \mid g \in G\}$ è invece detto *orbita* di x . L'insieme delle orbite è denotato

con X/G ; è l'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza \sim definita ponendo $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g * x = y$. L'azione di G si dice *libera* se, per ogni $x \in X$, $g * x = x$ solo se $g = 1_G$.

Definizione 5.4. Se X è uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X , X viene detto un G -spazio se per ogni $g \in G$ l'applicazione $\theta_g : X \rightarrow X$ definita ponendo $\theta_g(x) = g * x$ risulta continua.

Proposizione 5.5. Se X è un G -spazio allora θ_g è un omeomorfismo per ogni $g \in G$.

Dimostrazione. Dalla definizione di azione segue che $\theta_{1_G}(x) = 1_G * x = x$ per ogni $x \in X$ e quindi $\theta_{1_G} = \text{Id}_X$. Per ogni $g \in G$

$$(\theta_g \circ \theta_{g^{-1}})(x) = g * (g^{-1} * x) = (gg^{-1}) * x = 1_G * x = \theta_{1_G}(x)$$

e, analogamente $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = \theta_{1_G}$. Pertanto θ_g è biunivoca, ammettendo come inversa $\theta_{g^{-1}}$. Poiché X è un G -spazio θ_g e la sua inversa sono continue, e quindi θ_g è un omeomorfismo. \square

Definizione 5.6. Sia X un G -spazio. L'azione di G si dice *propriamente discontinua* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U_x tale che, per ogni $g \neq 1_g$ si abbia $U_x \cap \theta_g(U_x) = \emptyset$.

Osservazione 5.7. E' equivalente richiedere che, per ogni $x \in X$ esista un intorno U_x tale che, per ogni $g \neq g' \in G$ si abbia $\theta_g(U_x) \cap \theta_{g'}(U_x) = \emptyset$.

Dimostrazione. Chiaramente la condizione enunciata implica quella della Definizione 5.6. Dal fatto che

$$\theta_g(U_x) \cap \theta_{g'}(U_x) = (\theta_g \circ \theta_{g^{-1}})(\theta_g(U_x) \cap \theta_{g'}(U_x)) = \theta_g(U_x \cap (\theta_{g^{-1}g'}(U_x))).$$

segue l'altra implicazione. \square

5.2 RIVESTIMENTI

Siano \tilde{X} e X spazi topologici connessi per archi.

Definizione 5.8. Lo spazio topologico \tilde{X} si dice *rivestimento* di X se esiste un'applicazione continua e suriettiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tale che ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto U uniformemente rivestito da p , cioè esistono aperti disgiunti $\{U_j\}_{j \in J}$ in \tilde{X} tali che

1. $p^{-1}(U) = \bigcup U_j$
2. $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ è un omeomorfismo $\forall j$

Definizione 5.9. L'applicazione p è detta *applicazione di rivestimento*. L'insieme $p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ è detto *fibra* su x .

Osservazione 5.10. Per ogni $x \in X$ la topologia indotta dalla topologia di \tilde{X} sulla fibra $p^{-1}(x)$ è la topologia discreta.

Esempi 5.11.

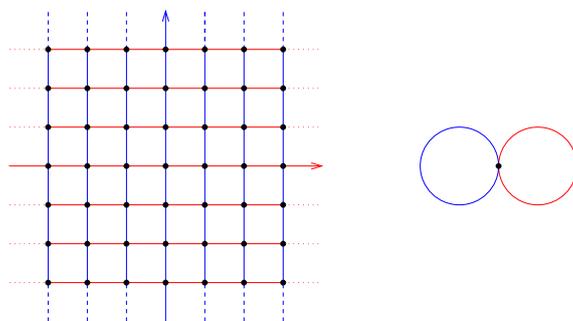
1. Ogni omeomorfismo è un rivestimento.
2. L'applicazione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ così definita: $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un rivestimento.
3. Ponendo coordinate polari nel piano \mathbb{R}^2 possiamo definire $p_n : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ in questo modo: $p_n(1, \theta) = (1, n\theta)$; è semplice mostrare che tali applicazioni sono rivestimenti per ogni intero positivo n .
4. Sia X l'unione a un punto delle circonferenze

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

e sia \tilde{X} il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 costituito dai punti che hanno almeno una coordinata intera. Sia poi $p : \tilde{X} \rightarrow X$ l'applicazione definita ponendo

$$p(x, y) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi - 2\pi x), \sin(2\pi x)) & y \text{ intero} \\ (-1 + \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) & x \text{ intero} \end{cases}$$



Altri esempi di rivestimenti si ottengono considerando azioni di gruppi.

Proposizione 5.12. Sia X un G -spazio; se l'azione di G su X è propriamente discontinua, allora $p : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che la proiezione sul quoziente $p : X \rightarrow X/G$ è un'applicazione aperta. Sia V un aperto di X ; allora

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(V)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(V)\} = \{x \in X \mid p(x) = p(y), \exists y \in V\} = \\ &= \{x \in X \mid x = g * y, \exists y \in V\} = \{x \in X \mid x \in g * V\} = \\ &= \bigcup_{g \in G} g * V = \bigcup_{g \in G} \theta_g(V). \end{aligned}$$

quindi $p^{-1}(p(V))$ è aperto in X e, per definizione di topologia quoziente, $p(V)$ è un aperto di X/G .

Sia $x \in X/G$, sia $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e sia $U_{\tilde{x}} \ni \tilde{x}$ un intorno di \tilde{x} che verifica la condizione di discontinuità propria; $p(U_{\tilde{x}})$ è un aperto e $p^{-1}(p(U_{\tilde{x}})) = \cup \theta_g(U_{\tilde{x}})$ è unione disgiunta di aperti.

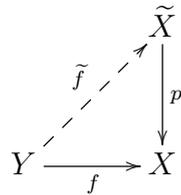
La restrizione di p , applicazione continua ed aperta, ad ognuno degli aperti $\theta_g(U_{\tilde{x}})$ è biunivoca; infatti $p(x) = p(y)$ se e solo se esiste $\bar{g} \neq 1_G$ tale che $\theta_{\bar{g}}(x) = y$, pertanto, se ciò accadesse per $x \neq y \in \theta_g(U_{\tilde{x}})$ avremmo $\theta_{\bar{g}}(\theta_g(U_{\tilde{x}})) \cap \theta_g(U_{\tilde{x}}) \neq \emptyset$, contraddicendo l'ipotesi che l'azione sia propriamente discontinua, e ciò mostra che la restrizione di p è iniettiva. La verifica della suriettività è lasciata al lettore. Perciò la restrizione di p ad ognuno degli aperti $\theta_g(U_{\tilde{x}})$ è un omeomorfismo e $U_x := p(U_{\tilde{x}})$ è un intorno di x uniformemente rivestito da p . \square

Esempi 5.13.

I primi tre esempi di azioni di gruppo in (5.2) danno luogo a rivestimenti $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$, $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$, $p_3 : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

5.3 SOLLEVAMENTI

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua. Un'applicazione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ che fa commutare il diagramma seguente, se esiste, è detta *sollevamento* di f .



Osservazione 5.14. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua; siano poi $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Condizione necessaria affinché esista un sollevamento \tilde{f} di f t.c. $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ è che

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Dimostrazione. Se il sollevamento esiste, la condizione è verificata, in quanto si ha $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$. \square

Esempio 5.15. Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ come al punto 2. dell'Esempio 5.11, e sia $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ l'identità. Utilizzando l'Osservazione 5.14 è immediato verificare che f non ammette sollevamenti.

Vedremo ora alcuni importanti risultati che riguardano l'esistenza e l'unicità di sollevamenti.

Lemma 5.16. (Unicità del sollevamento). Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, Y uno spazio connesso, $f : Y \rightarrow X$ un'applicazione continua e $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ due sollevamenti di f . Allora, se esiste un punto $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ si ha $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Dimostrazione. Sia $W \subset Y$ l'insieme dei punti su cui \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 coincidono. Mostriamo che tale insieme è aperto e chiuso in Y ; poiché $W \neq \emptyset$, in quanto contiene y_0 , si avrà $W = Y$ per la connessione di Y .

Sia $y \in Y$, e sia U un intorno di $f(y)$ uniformemente rivestito da p , la cui controimmagine si può quindi scrivere come unione disgiunta di aperti V_j ; siano V_1 e V_2 i due aperti che contengono rispettivamente $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$. Per continuità esiste un intorno N di y tale che $\tilde{f}_1(N) \subset V_1$ e $\tilde{f}_2(N) \subset V_2$.

Se $y \notin W$, allora $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e N è un intorno di y contenuto in W^c , che è quindi aperto.

Se $y \in W$, allora $V_1 = V_2$; dal fatto che $p\tilde{f}_1(y) = p\tilde{f}_2(y)$ e che p è un omeomorfismo su V_1 , quindi iniettiva, deduciamo che $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ su N , e quindi che W è aperto. \square

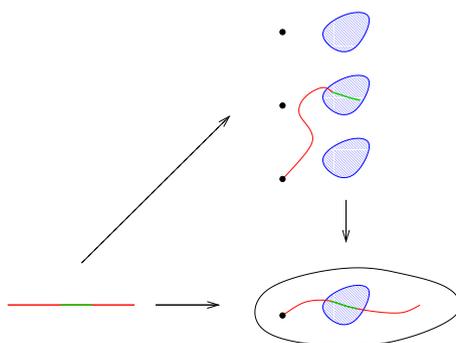
Lemma 5.17. (Sollevamento di cammini). Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino di punto iniziale $\alpha(0) = x_0$. Allora, fissato $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, esiste un unico sollevamento di α , $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ tale che $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Dimostrazione. Poiché X è coperto da aperti uniformemente rivestiti da p , esiste una famiglia di aperti $\{U_j\}_{j \in J}$ uniformemente rivestiti da p tali che $\{\alpha^{-1}(U_j)\}$ costituisce un ricoprimento di I .

Esprimendo $\alpha^{-1}(U_j)$ come unione di intervalli: si ottiene un nuovo ricoprimento aperto di I .

Poiché I è compatto possibile trovare un numero finito di tali intervalli che coprono I , e quindi una successione di punti $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ tali che per ogni k esiste $j_k \in J$ tale che $\alpha([t_k, t_{k+1}])$ è contenuto in U_{j_k} .

Costruiamo ora il sollevamento induttivamente su $[0, t_k]$. Per $k = 0$ poniamo $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$; supponiamo di aver definito $\tilde{\alpha}_k : [0, t_k] \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ e che tale sollevamento sia unico.



Per costruzione $\alpha([t_k, t_{k+1}])$ è contenuto in U_{j_k} , la cui controimmagine $p^{-1}(U_{j_k})$ è costituita da un'unione disgiunta di aperti W_j omeomorfi a U_{j_k} mediante p .

Sia W l'aperto tra i W_j che contiene $\tilde{\alpha}_k(t_k)$; possiamo definire $\tilde{\alpha}_{k+1} : [0, t_{k+1}] \rightarrow X$ nel seguente modo

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_k(t) & t \in [0, t_k] \\ (p|_W)^{-1}\alpha(t) & t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

La continuità dell'applicazione $\tilde{\alpha}_{k+1}$ segue dal lemma di incollamento, e l'unicità dal Lemma 5.16. \square

Notazione 5.18. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino di punto iniziale $\alpha(0) = x_0$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. L'unico sollevamento di α con punto iniziale \tilde{x}_0 sarà denotato con

$$\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha).$$

Chiaramente, se α è un cammino in X si ha $p(\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)) = \alpha$, mentre, se γ è un cammino in \tilde{X} si ha $\ell_{\gamma(0)}(p \circ \gamma) = \gamma$.

Corollario 5.19. Sia $\varepsilon_{x_0} : I \rightarrow X$ il cammino costante di punto base x_0 ; per ogni $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ si ha

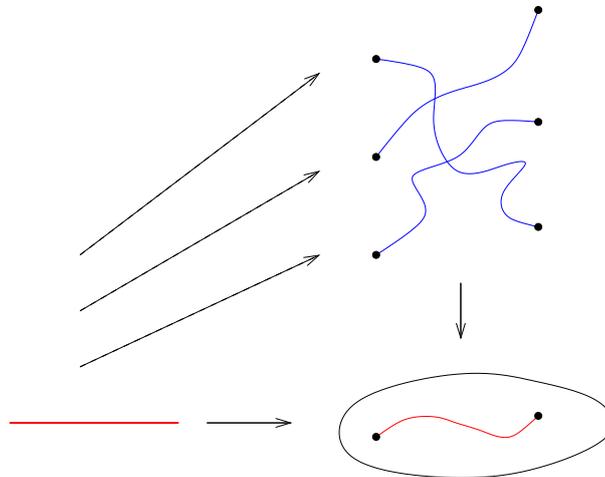
$$\ell_{\tilde{x}_0}(\varepsilon_{x_0}) = \varepsilon_{\tilde{x}_0}.$$

Sia $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 , sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e sia $\tilde{x}_1 = (\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha))(1)$. Allora

$$\overline{\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)} = \ell_{\tilde{x}_1}(\bar{\alpha}).$$

Corollario 5.20. Le fibre di p hanno tutte la stessa cardinalità; tale cardinalità è detta numero di fogli del rivestimento.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ e sia $\alpha : I \rightarrow X$ un arco che li unisce. Possiamo definire un'applicazione $\varphi : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$ associando a un punto $\tilde{x}_j \in p^{-1}(x)$ il punto $(\ell_{\tilde{x}_j}(\alpha))(1)$.



Allo stesso modo possiamo definire un'applicazione $\psi : p^{-1}(y) \rightarrow p^{-1}(x)$ associando a un punto $\tilde{y}_j \in p^{-1}(y)$ il punto $(\ell_{\tilde{y}_j}(\bar{\alpha}))(1)$.

Usando la seconda parte del Corollario 5.19 si verifica che φ e ψ sono l'inversa una dell'altra, e quindi gli insiemi $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ sono in biiezione. \square

In modo analogo al Lemma 5.17 si può dimostrare il seguente

Teorema 5.21. (Sollevamento delle omotopie). *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento.*

Data un'omotopia $F : Y \times I \rightarrow X$ e un'applicazione $\tilde{F}_0 : Y \times \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ che è un sollevamento di $F|_{Y \times \{0\}}$, allora esiste un unico sollevamento di F , $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ che, ristretto a $Y \times \{0\}$ coincide con \tilde{F}_0 .

Una conseguenza molto importante di tale teorema è il seguente:

Corollario 5.22. (Monodromia) *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento; siano $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ cammini omotopi di punto iniziale x_0 , e sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora*

$$\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha) \sim \ell_{\tilde{x}_0}(\beta).$$

In particolare $(\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha))(1) = (\ell_{\tilde{x}_0}(\beta))(1)$.

Dimostrazione. Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'omotopia di cammini tra α e β e sia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ l'unico sollevamento di F tale che $\tilde{F}(s, 0) = (\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha))(s)$.

Il cammino $\tilde{F}(0, t)$ è un sollevamento del cammino $F(0, t) = \alpha(t) = x_0$, e quindi, per il Corollario 5.19 è il cammino costante di punto base \tilde{x}_0 ; analogamente si ha $\tilde{F}(1, t) = \tilde{x}_1$. Il cammino $\tilde{F}(s, 1)$ è un sollevamento del cammino β di punto iniziale \tilde{x}_0 , quindi per l'unicità del sollevamento deve coincidere con $\ell_{\tilde{x}_0}(\beta)$. Pertanto \tilde{F} è un'omotopia (di cammini) tra $\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)$ e $\ell_{\tilde{x}_0}(\beta)$. \square

5.4 RIVESTIMENTI E GRUPPO FONDAMENTALE

Proposizione 5.23. *Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$; allora l'omomorfismo indotto $p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia $[\gamma] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tale che $p_*[\gamma] = [p \circ \gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$; ciò significa che $p \circ \gamma$ e ε_{x_0} sono cammini omotopi. Osserviamo ora che $\gamma = \ell_{\tilde{x}_0}(p \circ \gamma)$ e $\varepsilon_{\tilde{x}_0} = \ell_{\tilde{x}_0}(\varepsilon_{x_0})$, pertanto tali cammini sono omotopi per il Corollario 5.22; segue che $[\gamma] = [\varepsilon_{\tilde{x}_0}]$ è l'elemento neutro di $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. \square

Sia X un G -spazio (sinistro) tale che l'azione di G sia propriamente discontinua. Abbiamo visto che la proiezione sul quoziente $p : X \rightarrow X/G$ è un'applicazione di rivestimento. Vogliamo ora trovare una relazione tra il gruppo G e il gruppo fondamentale di X/G .

Osserviamo che, dato un punto $x_0 \in X/G$, la fibra sul punto x_0 è data dall'orbita

di un qualsiasi punto di essa. Sia \tilde{x}_0 uno di tali punti. Dato un elemento $[\alpha]$ del gruppo fondamentale $\pi(X/G, x_0)$, poiché l'azione di G è propriamente discontinua, esiste un unico $g_\alpha \in G$ tale che $\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)(1) = g_\alpha * \tilde{x}_0$.

Notiamo che, se $[\beta] = [\alpha]$, allora, per il Corollario 5.22, $\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)(1) = \ell_{\tilde{x}_0}(\beta)(1)$.

Possiamo pertanto definire un'applicazione $\varphi : \pi(X/G, x_0) \rightarrow G$ che ad $[\alpha]$ associa g_α .

Teorema 5.24. *Sia $x_0 \in X/G$, e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. L'applicazione $\varphi : \pi(X/G, x_0) \rightarrow G$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi, il cui nucleo è $p_*\pi(X, \tilde{x}_0)$.*

Dimostrazione. Dato un coppia α di punto base x_0 e un punto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, sia $\tilde{x}_1 = \ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)(1)$. Sia β un altro coppia di punto base x_0 . Allora

$$\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha * \beta) = \ell_{\tilde{x}_0}(\alpha) * \ell_{\tilde{x}_1}(\beta).$$

Infatti il secondo membro è un sollevamento di $\alpha * \beta$ di punto iniziale \tilde{x}_0 , e tale sollevamento è unico. Per la stessa ragione

$$\ell_{\tilde{x}_1}(\beta) = g_\alpha * \ell_{\tilde{x}_0}(\beta).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha][\beta]) * \tilde{x}_0 &= \ell_{\tilde{x}_0}(\alpha * \beta)(1) = (\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha) * \ell_{\tilde{x}_1}(\beta))(1) = (\ell_{\tilde{x}_1}(\beta))(1) \\ &= (g_\alpha * \ell_{\tilde{x}_0}(\beta))(1) = g_\alpha * (\ell_{\tilde{x}_0}(\beta)(1)) = g_\alpha * (g_\beta * \tilde{x}_0) = \\ &= (g_\alpha g_\beta) * \tilde{x}_0 = (\varphi([\alpha])\varphi([\beta])) * \tilde{x}_0. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che φ è suriettivo. Sia $g \in G$. Consideriamo un cammino γ da \tilde{x}_0 a $g * \tilde{x}_0$; $p \circ \gamma$ è un coppia di punto base x_0 e $\gamma = \ell_{\tilde{x}_0}(p \circ \gamma)$. Pertanto $\varphi([p \circ \gamma]) = g$. Sia $[\alpha] \in \text{Ker}(\varphi)$; ciò significa che $\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)$ è un coppia di punto base \tilde{x}_0 , quindi possiamo considerare la classe $[\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)] \in \pi(X, \tilde{x}_0)$, ed abbiamo $p_*([\ell_{\tilde{x}_0}(\alpha)]) = [\alpha]$. Viceversa, una classe in $p_*\pi(X, \tilde{x}_0)$ è del tipo $[p \circ \gamma]$, con $[\gamma] \in \pi(X, \tilde{x}_0)$. Poiché $\gamma = \ell_{\tilde{x}_0}(p \circ \gamma)$, si ha $\varphi([p \circ \gamma]) = 1_G$. \square

Corollario 5.25. *Sia X un G -spazio tale che l'azione di G sia propriamente discontinua. Sia $x_0 \in X/G$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora $p_*\pi(X, \tilde{x}_0)$ è un sottogruppo normale di $\pi(X/G, x_0)$ e $\pi(X/G, x_0)/p_*\pi(X, \tilde{x}_0) \simeq G$. In particolare, se X è semplicemente connesso, allora $\pi(X/G, x_0) \simeq G$.*

Corollario 5.26. *Applicando il Corollario 5.25 agli esempi 5.13 siamo in grado di calcolare i seguenti gruppi fondamentali:*

1. $\pi(\mathbf{S}^1, x) \simeq \mathbb{Z}$;
2. $\pi(T, x) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;
3. $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x) \simeq \mathbb{Z}_2$;

In questo capitolo, dopo i necessari preliminari di natura algebrica, vedremo un modo, diverso da quello utilizzato per il gruppo fondamentale, di associare ad uno spazio topologico dei gruppi (questa volta abeliani), che ne racchiudano alcune proprietà geometriche.

In particolare costruiremo, per ogni $q \geq 0$ gruppi abeliani liberi generati da particolari applicazioni continue a valori nello spazio topologico, definendo morfismi di bordo che collegano questi gruppi, e andremo a misurare la non esattezza del complesso di gruppi così costruito - cioè a cercare i cicli che non sono bordi. I gruppi introdotti a tale scopo sono detti gruppi di omologia singolare dello spazio topologico.

Mostreremo inoltre che a spazi topologici omotopicamente equivalenti corrispondono gruppi isomorfi, e studieremo infine i gruppi $H_0(X)$, che misura la connessione per archi di X , e $H_1(X)$, che si rivelerà essere strettamente legato al gruppo fondamentale.

6.1 GRUPPI ABELIANI E SUCCESSIONI ESATTE

Definizione 6.1. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Un sottoinsieme $\{g_i\}_{i \in I}$ è detto *sistema di generatori* per G se ogni elemento $g \in G$ si può scrivere come combinazione lineare finita a coefficienti in \mathbb{Z} dei g_i , cioè $g = \sum n_i g_i$ con $n_i \neq 0$ per un numero finito di $i \in I$. Un gruppo abeliano si dice *finitamente generato* se ammette un sistema di generatori costituito da un numero finito di elementi.

Definizione 6.2. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Un sottoinsieme $\{g_i\}_{i \in I}$ è detto *libero* se $\sum n_i g_i = 0$ se e solo se $n_i = 0$ per ogni $i \in I$. È evidente che un sottoinsieme di un sistema libero è anch'esso libero.

Definizione 6.3. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano. Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{g_i\}_{i \in I}$ è detto *base* per G se è libero ed è un sistema di generatori per G .

Un gruppo abeliano si dice *libero* se ammette una base. È immediato verificare che, se $\mathcal{B} = \{g_i\}_{i \in I}$ è una base per G allora ogni elemento $g \in G$ si scrive in modo unico come $g = \sum_{i \in I} n_i g_i$.

Esempio 6.4. Non tutti i gruppi abeliani ammettono una base: un esempio di tale situazione è dato dai gruppi ciclici $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, in cui non esistono sottoinsiemi liberi.

Proposizione 6.5. (*Estensione per linearità*): Sia G un gruppo abeliano libero di base $\mathcal{B} = \{g_i\}_{i \in I}$. Allora per ogni gruppo abeliano G' ed ogni applicazione $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow G'$ esiste un unico morfismo $\tilde{\varphi} : G \rightarrow G'$ tale che $\tilde{\varphi}|_{\mathcal{B}} = \varphi$.

Dimostrazione. Sia $g \in G$; g si scrive in modo unico sugli elementi della base $g = \sum m_i g_i$; definiamo quindi $\varphi(g) = \sum m_i \varphi(g_i)$. È immediato verificare che si tratta di un morfismo con le proprietà richieste, e che è unico. \square

Definizione 6.6. Sia G un gruppo abeliano; un elemento $g \in G$ si dice *di torsione* se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $ng = 0$. Denoteremo l'insieme degli elementi di torsione di G con $T(G)$; è immediato verificare che $T(G)$ è un sottogruppo di G , detto *sottogruppo di torsione*.

Proposizione 6.7. Siano G e G' gruppi abeliani.

a) Se φ è un morfismo di gruppi, allora $\varphi(T(G)) \subseteq T(G')$;

b) se φ è un isomorfismo allora $\varphi|_{T(G)} : T(G) \rightarrow T(G')$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $g \in T(G)$, e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $ng = 0$. Allora $n\varphi(g) = \varphi(ng) = \varphi(0) = 0$, e quindi $\varphi(g) \in T(G')$. Sia φ un isomorfismo, $g' \in T(G')$ e $n \in \mathbb{N}$ tale che $ng' = 0$; sia $g = \varphi^{-1}(g')$; allora $\varphi(ng) = n\varphi(g) = 0$, e quindi $ng = 0$ per l'iniettività di φ . Pertanto $\varphi(T(G)) = T(G')$, e ciò basta per concludere \square

Corollario 6.8. Sia $\varphi : G \rightarrow G'$ un isomorfismo di gruppi abeliani; allora φ induce un isomorfismo $\bar{\varphi} : G/T(G) \rightarrow G'/T(G')$.

Notazione 6.9. Essendo la notazione additiva più comune quando si lavora con gruppi abeliani, d'ora innanzi denoteremo il prodotto diretto di gruppi sarà chiamato *somma diretta* e denotato con il simbolo \oplus .

Diamo senza dimostrazione il seguente fondamentale risultato:

Teorema 6.10. Sia G un gruppo abeliano finitamente generato; allora $T(G)$ è finito, ed esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T(G)$,

Definizione 6.11. Una successione di gruppi abeliani e di morfismi di gruppi

$$H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K$$

si dice *esatta* in G se $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Una successione di gruppi abeliani e di morfismi di gruppi

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

si dice *esatta* se è esatta in G_n per ogni n .

Una successione *esatta breve* è una successione esatta del tipo

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

Osservazione 6.12. Una successione breve di gruppi abeliani e morfismi di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

è esatta se e solo se f è iniettiva, $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, g è suriettiva.

Lemma 6.13. Data una successione esatta breve di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

\xleftarrow{h} \xleftarrow{k}

i seguenti fatti sono equivalenti:

1. Esiste un morfismo $h : B \rightarrow A$ tale che $h \circ f = \text{Id}_A$;
2. Esiste un morfismo $k : C \rightarrow B$ tale che $g \circ k = \text{Id}_C$;
3. Esiste un isomorfismo $\varphi : B \rightarrow A \oplus C$ che fa commutare il diagramma seguente, dove i_A e p_C sono rispettivamente l'inclusione e la proiezione sul secondo addendo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & B & & & \\
 & & f \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow g & & \\
 0 & \longrightarrow & A & & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow i_A & \downarrow & \nearrow p_C & & \\
 & & & A \oplus C & & &
 \end{array}$$

Una successione siffatta è detta successione spezzante.

Dimostrazione. E' semplice mostrare che 3) \Rightarrow 1), 2); infatti basta prendere come $h : B \rightarrow A$ la composizione $p_A \circ \varphi$, dove p_A è la proiezione sul primo addendo, e come $k : C \rightarrow B$ la composizione $\varphi^{-1} \circ i_C$, ove $i_C : C \rightarrow A \oplus C$ è l'inclusione.

Mostriamo ora che 1) \Rightarrow 3). Definiamo $\varphi : B \rightarrow A \oplus C$ come $\varphi(b) = (h(b), g(b))$. Osserviamo che $B = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(h)$; infatti possiamo scrivere $b = b - f(h(b)) + f(h(b))$ ed è immediato verificare che $b - f(h(b)) \in \text{Ker}(h)$. Inoltre, se $b = f(a)$ e $h(b) = 0$ allora $a = h(f(a)) = 0$.

Sia ora $(a, c) \in A \oplus C$; per la suriettività di g esiste un elemento di B , che scriveremo come $f(a') + b'$, con $h(b') = 0$ tale che $g(f(a') + b') = c$. Osserviamo che $c = g(f(a') + b') = g(b') = g(f(a) + b')$, e che $h(f(a) + b') = a$. Pertanto $f(a) + b'$ è una controimmagine di (a, c) e φ è suriettiva.

Sia $b \in \text{Ker}(\varphi)$; poiché $g(b) = 0$, per l'esattezza della successione esiste $a \in A$ tale che $b = f(a)$; da $0 = h(b) = h(f(a)) = a$ abbiamo che $b = f(0) = 0$, e quindi φ è iniettiva.

Per mostrare che 2) \Rightarrow 3) consideriamo la mappa $\psi : A \oplus C \rightarrow B$ definita ponendo $\psi(a, c) = f(a) + k(c)$. Se $\psi(a, c) = 0$, allora $g(\psi(a, c)) = c = 0$, e anche $a = 0$, per l'iniettività di f . Sia ora $b \in B$; scriviamo $b = b - k(g(b)) + k(g(b))$;

osserviamo che $g(b - k(g(b))) = g(b) - g(b) = 0$, e quindi esiste $a \in A$ tale che $b - k(g(b)) = f(a)$ per l'esattezza della successione. Posto $c = g(b)$ notiamo che $b = \psi(a, c)$, e quindi ψ è un isomorfismo. \square

Osservazione 6.14. Una successione esatta breve di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tale che C è un gruppo libero è spezzante.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}_C = \{c_i\}_{i \in I}$ una base di C ; per ogni $i \in I$ si scelga $b_i \in g^{-1}(c_i)$, e si definisca $k : \mathcal{B}_C \rightarrow B$ in questo modo: $k(c_i) = b_i$, la si estenda poi ad un omomorfismo $k : C \rightarrow B$ come nella Proposizione 6.5. \square

6.2 COMPLESSI DI CATENE

Definizione 6.15. Un *complesso di catene* \mathcal{C} è un insieme $\{(C_q, \partial_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ con C_q gruppo abeliano, detto gruppo delle q -catene, e $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ morfismo di gruppi, detto morfismo di bordo, che sia autonullifico, cioè $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$.

Definizione 6.16. Il sottogruppo $Z_q(\mathcal{C}) = \text{Ker } \partial_q \subseteq C_q$ si dice gruppo dei q -cicli, mentre il sottogruppo $B_q(\mathcal{C}) = \text{Im } \partial_{q+1} \subseteq C_q$ si dice gruppo dei q -bordi.

Per la proprietà di autonullificità dell'operatore bordo, $B_q(\mathcal{C}) \subseteq Z_q(\mathcal{C})$; è quindi possibile formare il gruppo quoziente

$$H_q(\mathcal{C}) = \frac{Z_q(\mathcal{C})}{B_q(\mathcal{C})},$$

detto q -esimo gruppo di omologia del complesso \mathcal{C} .

Definizione 6.17. Siano $\mathcal{C} = \{(C_q, \partial_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C}' = \{(C'_q, \partial'_q)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ due complessi di catene. Un *morfismo di complessi di catene* $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ è una collezione $\{f_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ di morfismi $f_q : C_q \rightarrow C'_q$ che commutano con l'operatore bordo, tali cioè che $f_{q-1} \circ \partial_q = \partial'_q \circ f_q$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Osservazione 6.18. Se $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ è un morfismo di complessi di catene, allora è semplice verificare che $f_q(Z_q(\mathcal{C})) \subseteq Z_q(\mathcal{C}')$ e $f_q(B_q(\mathcal{C})) \subseteq B_q(\mathcal{C}')$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$, cioè f manda q -cicli in q -cicli e q -bordi in q -bordi.

Infatti, se $z \in Z_q(\mathcal{C})$, allora $\partial_q(z) = 0$, e quindi $f_{q-1}(\partial_q(z)) = 0$; per la commutatività del diagramma nella Definizione 6.17 si ha $\partial'_q(f_q(z)) = f_{q-1}(\partial_q(z)) = 0$, e quindi $f_q(z) \in Z_1(\mathcal{C}')$. Analoga è la verifica che $f_q(B_q(\mathcal{C})) \subseteq B_q(\mathcal{C}')$.

Dall'osservazione segue che è possibile definire dei morfismi

$$H_q(f) : H_q(\mathcal{C}) \rightarrow H_q(\mathcal{C}')$$

ponendo $H_q(f)([z]) = [f_q(z)]$. Infatti $f_q(z) \in Z_q(\mathcal{C}')$ e, se $[z] = [\bar{z}]$ si ha che i due cicli differiscono per un bordo: $z = \bar{z} + \partial_{q+1}(\sigma)$; quindi

$$f_q(z) = f_q(\bar{z}) + f_q \partial_{q+1}(\sigma) = f_q(\bar{z}) + \partial'_{q+1} f_{q+1}(\sigma)$$

e pertanto $[f_q(z)] = [f_q(\bar{z})]$.

Si verifica facilmente, utilizzando la definizione, che, se $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ e \mathcal{C}'' sono tre complessi di catene e $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ sono morfismi di complessi, allora $H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$. Inoltre, indicato con $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ il morfismo identico, si ha $H_q(\text{Id}_{\mathcal{C}}) = \text{Id}_{H_q(\mathcal{C})}$, cioè

Teorema 6.19. H_q è un funtore (covariante) dalla categoria dei complessi di catene e morfismi di complessi di catene alla categoria dei gruppi abeliani e morfismi di gruppi abeliani.

6.3 OMOLOGIA SINGOLARE

Vogliamo ora associare ad uno spazio topologico un complesso di catene che ne rifletta la geometria, per poter poi considerare i gruppi di omologia associati a tale complesso.

Definizione 6.20. In \mathbb{R}^q sia $E_0 = (0, \dots, 0)$ e siano E_i , per i da 1 a q , i punti con tutte le coordinate nulle, tranne l' i -esima, che vale 1. Sia poi

$$\Delta_q = \left\{ \sum_{i=0}^q \lambda_i E_i \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

Δ_q è detto q -simpleso standard.

Definizione 6.21. Sia X uno spazio topologico; si dice q -simpleso singolare in X un'applicazione continua $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$; si dice *supporto* di σ , e si indica con $|\sigma|$ l'immagine $\sigma(\Delta_q) \subset X$.

Definizione 6.22. Sia X uno spazio topologico; per ogni $q \geq 0$ si denoti con $S_q(X)$ il gruppo abeliano libero generato dai q -simplessi singolari in X . Per $q < 0$ poniamo $S_q(X) = \{0\}$. Tali gruppi sono detti gruppi delle q -catene singolari di X .

Vogliamo ora costruire un complesso di catene $\mathcal{S}(X)$ i cui gruppi siano gli $S_q(X)$; dobbiamo perciò definire un morfismo di bordo $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$. Per $q \leq 0$ tale morfismo sarà semplicemente il morfismo nullo. Per definire ∂_q per $q \geq 1$

introduciamo innanzitutto, per ogni $q \geq 1$, delle applicazioni $F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, per $i = 0, \dots, q$, definendole sui vertici di Δ_{q-1} ed estendendole linearmente

$$F_q^i(E_k) = \begin{cases} E_k & k < i \\ E_{k+1} & k \geq i \end{cases}$$

Tali applicazioni vengono detti *operatori faccia*.

Utilizzando tali operatori è possibile associare ad un q -simpleso singolare σ dei $(q-1)$ -simplessi singolari $\sigma^{(i)} \in S_{q-1}(X)$ in questo modo: $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_q^i$

$$\Delta_{q-1} \xrightarrow{F_q^i} \Delta_q \xrightarrow{\sigma} X$$

$\sigma^{(i)}$

La mappa $\sigma^{(i)}$ è cioè la restrizione di σ alla faccia di Δ_q opposta al vertice E_i .

Lemma 6.23. *Siano $i \neq j$ indici compresi tra 0 e q . Denotiamo con $\sigma^{(i,j)}$ la restrizione di σ alla faccia di codimensione due di Δ_q che non contiene i vertici E_i ed E_j . Allora*

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j = \begin{cases} \sigma^{(i,j)} & i > j \\ \sigma^{(i,j+1)} & i \leq j \end{cases}$$

Dimostrazione. Applicando le definizioni troviamo che, nel primo caso

$$(F_q^i \circ F_{q-1}^j)(E_k) = \begin{cases} E_k & k < j \\ E_{k+1} & j \leq k < i-1 \\ E_{k+2} & k \geq i-1 \end{cases}$$

mentre nel secondo

$$(F_q^i \circ F_{q-1}^j)(E_k) = \begin{cases} E_k & k < i \\ E_{k+1} & i \leq k < j \\ E_{k+2} & k \geq j \end{cases}$$

da segue immediatamente l'asserto. □

Dato un q -simpleso singolare σ , definiamo

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)},$$

e lo estendiamo per linearità ad un morfismo $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$:

$$\partial_q \left(\sum n_j \sigma_j \right) = \sum n_j \partial_q(\sigma_j).$$

Lemma 6.24. *I morfismi ∂_q sono tali che $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.*

Dimostrazione. E' sufficiente verificare l'affermazione sui semplici singolari. Sia $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. Utilizzando il Lemma 6.23 otteniamo

$$\begin{aligned}
 (\partial_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) &= \partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ F_q^i \right) = \sum_0^q (-1)^i \partial_{q-1}(\sigma \circ F_q^i) = \\
 &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j) = \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma^{(i,j+1)} + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \sigma^{(i,j)} = \\
 &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} \sigma^{(i,j)} + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \sigma^{(i,j)} = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Definizione 6.25. Il sottogruppo $Z_q(X) = \text{Ker } \partial_q \subseteq S_q(X)$ si dice gruppo dei q -cicli singolari, mentre il sottogruppo $B_q(X) = \text{Im } \partial_{q+1} \subseteq S_q(X)$ si dice gruppo dei q -bordi singolari.

Per la proprietà di autonullificità del morfismo di bordo, $B_q(X) \subseteq Z_q(X)$; è quindi possibile formare il gruppo quoziente

$$H_q(X) = \frac{Z_q(X)}{B_q(X)},$$

detto q -esimo gruppo di omologia singolare dello spazio topologico X .

Osservazione 6.26. Poiché un semplice singolare è un'applicazione continua e Δ_q è connesso per archi, se $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sono le componenti connesse per archi di X , allora

$$S_q(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} S_q(X_\alpha) \quad \text{e} \quad \delta_q(S_q(X_\alpha)) \subset S_{q-1}(X_\alpha),$$

pertanto avremo anche

$$H_q(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_q(X_\alpha).$$

Esempio 6.27. Calcoliamo i gruppi di omologia singolare di uno spazio topologico costituito da un solo punto: $X = \{x\}$.

Per ogni $q \geq 0$ esiste un'unica applicazione continua $\sigma_q : \Delta_q \rightarrow \{x\}$, quella costante, e quindi $S_q(X) = \mathbb{Z}\langle \sigma_q \rangle$ per ogni $q \geq 0$. Vediamo come agisce l'operatore bordo ∂_q . Per $q = 0$, essendo $S_{-1}(X) = \{0\}$ avremo $\partial_0 = 0$.

Per $q \geq 1$ abbiamo $S_q(X) = \mathbb{Z}$ e $S_{q-1}(X) = \mathbb{Z}$, e, per definizione

$$\partial_q(\sigma_q) = \sigma_{q-1} - \sigma_{q-1} + \sigma_{q-1} - \dots = \begin{cases} 0 & q \text{ dispari} \\ \sigma_{q-1} & q \text{ pari} \neq 0 \end{cases}$$

Quindi, se q è pari e non nullo avremo $\text{Im } \partial_{q+1} = \text{Ker } \partial_q = 0$, mentre se q è dispari avremo $\text{Im } \partial_{q+1} = \text{Ker } \partial_q = \mathbb{Z}$. In entrambi i casi $H_q(X) = 0$.

Resta da esaminare il caso $q = 0$; in questo caso abbiamo $\text{Im } \partial_1 = 0$ e $\text{Ker } \partial_0 = \mathbb{Z}$, e quindi $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Vediamo ora come ad un'applicazione continua tra spazi topologici sia possibile associare un morfismo di complessi di catene.

Definizione 6.28. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua; definiamo un il morfismo indotto sui complessi singolari $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ nel modo seguente: per ogni q sia $S_q(f) : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ così definito:

$$S_q(f) \left(\sum_1^k n_i \sigma_i \right) = \sum_1^k n_i (f \circ \sigma_i).$$

E' semplice verificare che quello appena definito è un morfismo di complessi di catene, cioè commutano i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{S_q(f)} & S_q(Y) \\ \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ S_{q-1}(X) & \xrightarrow{S_{q-1}(f)} & S_{q-1}(Y) \end{array}$$

Inoltre all'identità di X si associa l'identità di $\mathcal{S}(X)$, e alla composizione di applicazioni continue si associa la composizione di morfismi di complessi di catene.

Definizione 6.29. Data un'applicazione continua tra spazi topologici $f : X \rightarrow Y$, definiamo i morfismi indotti in omologia $H_q(f) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ nel modo seguente:

$$H_q(f) \left(\left[\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \right] \right) = [S_q(f) \left(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \right)] = \left[\sum_{i=1}^k n_i (f \circ \sigma_i) \right].$$

E' immediato verificare che all'identità di X si associa l'identità di $H_q(X)$, e alla composizione di applicazioni continue si associa la composizione di morfismi di gruppi, cioè

Teorema 6.30. H_q è un funtore (covariante) dalla categoria degli spazi topologici e applicazioni continue alla categoria dei gruppi abeliani e morfismi di gruppi abeliani.

Sussiste il seguente fondamentale risultato, analogo del Teorema 3.18 (per una dimostrazione si veda [3, Theorem 2.10]):

Teorema 6.31. (Teorema d'invarianza per omotopia). Siano $f, g : X \rightarrow Y$ applicazioni continue e omotope. Allora $H_q(f) = H_q(g)$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$.

Corollario 6.32. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Allora i morfismi di gruppi $H_q(f) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ sono isomorfismi per ogni $q \in \mathbb{Z}$.*

Corollario 6.33. *Sia X uno spazio topologico contraibile. Allora $H_q(X) \simeq \{0\}$ per ogni $q \neq 0$, e $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

6.4 SIGNIFICATO GEOMETRICO DI $H_0(X)$ E $H_1(X)$

Vedremo ora l'interpretazione geometrica dei gruppi $H_0(X)$ e $H_1(X)$; il primo misura la connessione (per archi) di uno spazio topologico:

Teorema 6.34. *Se X è uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Dalla successione del complesso singolare di X ,

$$\dots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

otteniamo che

$$H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X)}{B_0(X)}.$$

in quanto $Z_0(X) = \text{Ker } \partial_0 = S_0(X)$.

Consideriamo l'omomorfismo $\text{deg} : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, definito associando a una 0-catena $\sum_1^k n_i P_i$ il numero intero $\sum_1^k n_i$. Tale omomorfismo è evidentemente suriettivo, in quanto per ogni $n_0 \in \mathbb{Z}$, preso un qualsiasi $P_0 \in X$, si ha $\text{deg}(n_0 P_0) = n_0$. Mostriamo ora che $B_0(X)$ è il nucleo di tale omomorfismo.

Cominciamo col mostrare che $\text{Ker}(\text{deg}) \supseteq B_0(X)$.

Sia $\partial_1 s$ uno 0-bordo, con $s \in S_1(X)$, $s = \sum_1^k n_i \sigma_i$; i σ_i sono cammini in X , e il bordo di σ_i è $P_{1i} - P_{0i}$, con P_{0i} punto iniziale e P_{1i} punto finale del cammino σ_i . Allora

$$\text{deg}(\partial_1 s) = \text{deg} \left(\sum_1^k n_i \partial_1 \sigma_i \right) = \text{deg} \left(\sum_1^k n_i (P_{1i} - P_{0i}) \right) = \sum_1^k (n_i - n_i) = 0.$$

Osserviamo che, per questa parte della dimostrazione, l'ipotesi sulla connessione per archi di X non è stata usata.

Verifichiamo ora che $\text{Ker}(\text{deg}) \subseteq B_0(X)$.

Sia $s = \sum_1^k n_i P_i$ una 0-catena tale che $\sum_1^k n_i = 0$; fissiamo $Q \in X$ e, per ogni P_i che appare in s , consideriamo un cammino $\sigma_i : I \rightarrow X$ che abbia Q come punto iniziale e P_i come punto finale. Sia $s_1 = \sum_1^k n_i \sigma_i$; allora

$$\partial s_1 = \sum_1^k n_i \partial \sigma_i = \sum_1^k n_i P_i - \sum_1^k n_i Q = \sum_1^k n_i P_i,$$

e quindi $s_0 = \partial s_1 \in B_0(X)$. Abbiamo dimostrato che $\text{Ker}(\text{deg}) = B_0(X)$, quindi

$$H_0(X) = \frac{S_0(X)}{B_0(X)} \simeq \frac{S_0(X)}{\text{Ker}(\text{deg})} \simeq \text{Im}(\text{deg}) = \mathbb{Z}. \quad \square$$

Osservazione 6.35. La classe di un qualsiasi punto di uno spazio topologico X connesso per archi è un generatore di $H_0(X)$.

Osservazione 6.36. Combinando il Teorema 6.34 e l'Osservazione 6.26 possiamo concludere che uno spazio topologico X è connesso per archi se e solo se $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Spesso è conveniente utilizzare una versione leggermente modificata dell'omologia singolare, tale che tutti i gruppi di omologia di uno spazio contraibile siano banali; ciò si ottiene definendo i *gruppi di omologia ridotta*, $\tilde{H}_q(X)$ come i gruppi di omologia del complesso di catene $\tilde{\mathcal{S}}(X) = \{\tilde{S}_q(X), \tilde{\partial}_q\}$, ove

$$\tilde{S}_q(X) = \begin{cases} S_q(X) & \text{per } q \neq -1 \\ \mathbb{Z} & \text{per } q = -1 \end{cases}$$

$$\tilde{\partial}_q = \begin{cases} \partial_q & \text{per } q \neq 0 \\ \text{deg} & \text{per } q = 0 \end{cases}$$

Il complesso $\tilde{\mathcal{S}}(X)$ è detto *complesso singolare aumentato*.

$$\dots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Abbiamo osservato, nella dimostrazione del Teorema 6.34 che $B_0(X) \subset \text{Ker}(\text{deg})$, quindi $\tilde{\partial}_0 \circ \tilde{\partial}_1 = 0$. E' ovvio che $\tilde{H}_q(X) \simeq H_q(X)$ per $q \geq 1$. Per $q = 0$ abbiamo

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\text{Ker}(\text{deg})}{B_0(X)}.$$

Consideriamo la successione esatta breve

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\text{deg}) \longrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Tale successione è spezzante perché \mathbb{Z} è libero, quindi, per la Proposizione 6.13 $S_0(X) \simeq \text{Ker}(\text{deg}) \oplus \mathbb{Z}$; poiché $B_0(X) \subset \text{Ker}(\text{deg})$ si ha

$$H_0(X) \simeq \frac{S_0(X)}{B_0(X)} \simeq \frac{\text{Ker}(\text{deg})}{B_0(X)} \oplus \mathbb{Z} = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

In particolare, X è connesso per archi se e solo se $\tilde{H}_0(X)$ è il gruppo banale.

Andiamo ora a considerare il gruppo $H_1(X)$ e a vedere la sua relazione con il gruppo fondamentale.

Proposizione 6.37. Sia X uno spazio topologico, x_0 un suo punto, e siano $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ cappi di punto base x_0 tali che $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi(X, x_0)$; allora $[\alpha] = [\beta]$ in $H_1(X)$.

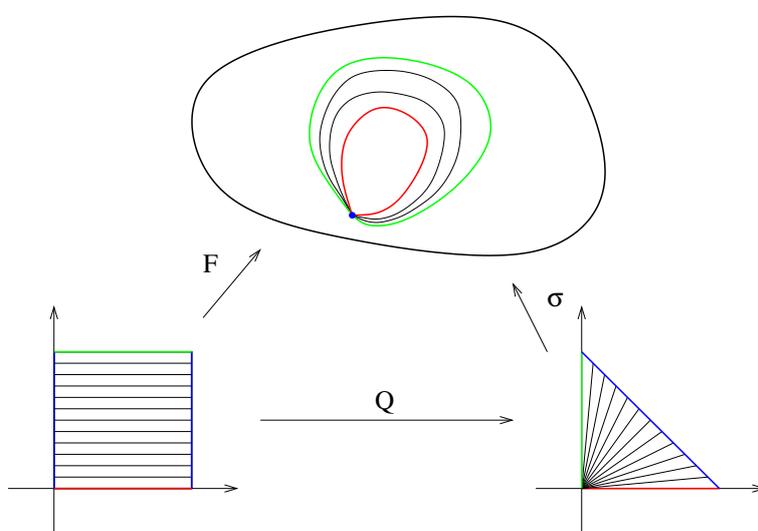
Dimostrazione. Definiamo un'applicazione $Q : I \times I \rightarrow \Delta_2$ in questo modo:

$$Q(s, t) = (1 - s)E_0 + s((1 - t)E_1 + tE_2);$$

tale applicazione è chiaramente continua, ed è semplice verificare che è biunivoca tra $I \times I \setminus (\{0\} \times I)$ e $\Delta_2 \setminus E_0$, mentre manda $\{0\} \times I$ in E_0 .

Sia $F : I \times I \rightarrow X$ un'omotopia di cammini tra α e β , cioè un'applicazione continua tale che $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(s, 1) = \beta(s)$ e $F(0, t) = F(t, 1) = x_0$.

Tale applicazione passa al quoziente rispetto a Q , e quindi esiste un'applicazione continua $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ tale che $\sigma \circ Q = F$.



Il bordo di σ è dato da

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma &= \sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \\ &= \sigma|_{E_1 E_2} - \sigma|_{E_0 E_2} + \sigma|_{E_0 E_1} = \\ &= \varepsilon_{x_0} - \beta + \alpha \end{aligned}$$

Osserviamo che il coppia ε_{x_0} può essere visto come bordo della due catena $\sigma_{x_0} : \Delta_2 \rightarrow X$ che manda ogni punto di Δ_2 in x_0 . Pertanto

$$\alpha = \beta + \partial_1(\sigma - \sigma_{x_0}),$$

e quindi $[\alpha] = [\beta]$ in $H_1(X)$. □

Corollario 6.38. *E' ben definita un'applicazione $\chi : \pi(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$, che associa alla classe di omotopia di un coppia α la classe di omologia del coppia stesso.*

Si può dimostrare che

Teorema 6.39 (di Hurewicz). *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e x_0 un suo punto. L'applicazione $\chi : \pi(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ è un omomorfismo suriettivo ed il suo nucleo è dato dal sottogruppo dei commutatori di $\pi(X, x_0)$.*

Corollario 6.40. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e x_0 un suo punto; allora il gruppo $H_1(X)$ è isomorfo all'abelianizzato del gruppo $\pi(X, x_0)$. In particolare si avrà $\pi(X, x_0) \simeq H_1(X)$ se e solo se $\pi(X, x_0)$ è abeliano,*

Osservazione 6.41. *Siano α e β cammini tali che $\alpha(1) = \beta(0)$. Allora $\alpha * \beta - \alpha - \beta \in Z_1(X)$ e $[\alpha * \beta - \alpha - \beta] = 0$ in $H_1(X)$.*

Dimostrazione. La prima asserzione è evidente, in quanto

$$\partial_1(\alpha * \beta - \alpha - \beta) = \beta(1) - \alpha(0) - (\alpha(1) - \alpha(0)) - (\beta(1) - \beta(0)) = 0.$$

Per mostrare la seconda, sia p la proiezione ortogonale del semplice Δ_2 sul lato $\langle E_1, E_2 \rangle$, sia $\gamma : \langle E_1, E_2 \rangle \rightarrow X$ il cammino definito ponendo

$$\gamma((1-t)E_1 + tE_2) = (\alpha * \beta)(t)$$

e sia $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$ la composizione: $\sigma = \gamma \circ p$. E' semplice verificare che $\partial_2(\sigma) = \alpha * \beta - \alpha - \beta$.

Corollario 6.42. *Sia $\gamma : I \rightarrow X$ un cappio, tale che $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$; allora $[\gamma] = [\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n]$ in $H_1(X)$.*

Teorema di Mayer-Vietoris, omologia di una coppia e applicazioni

In questo capitolo vedremo l'analogo del Teorema di Seifert-Van Kampen per l'omologia singolare: un risultato cioè che permette di calcolare i gruppi di omologia di uno spazio topologico a partire dall'omologia di due suoi sottospazi e della loro intersezione, e faremo diversi esempi del suo utilizzo.

Vedremo poi un nuovo complesso di catene, associato ad una coppia (X, A) , dove X è uno spazio topologico ed A un suo sottospazio, e l'omologia ad esso associata, detta *omologia della coppia*, particolarmente utile nello studio dei retratti. L'omologia della coppia verrà quindi utilizzata nell'ultima sezione per definire l'*omologia locale* e dimostrare il Teorema di invarianza della dimensione.

7.1 SUCCESIONE ESATTA DI MAYER-VIETORIS

Definizione 7.1. Una successione di complessi di catene e di morfismi di complessi di catene

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{C}''$$

si dice *esatta* in \mathcal{C} se, per ogni $q \in \mathbb{Z}$, $\text{Ker}(g_q) = \text{Im}(f_q)$.

Proposizione 7.2. (*Successione esatta lunga*) Sia

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{f} \mathcal{C} \xrightarrow{g} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta breve di complessi di catene.

Allora esistono omomorfismi $\delta_q : H_q(\mathcal{C}'') \rightarrow H_{q-1}(\mathcal{C}')$ tali che la successione

$$\dots \xrightarrow{H_q(f)} H_q(\mathcal{C}) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{H_{q-1}(f)} \dots \quad (7.3)$$

sia esatta.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{f_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{g_{q+1}} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial''_{q+1} & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f_q} & C_q & \xrightarrow{g_q} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_{q-1} & & \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial''_{q-1} & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{q-2} & \xrightarrow{f_{q-2}} & C_{q-2} & \xrightarrow{g_{q-2}} & C''_{q-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Vogliamo definire un omomorfismo $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C')$; un elemento di $H_q(C'')$ è una classe di equivalenza $[z''_q]$, dove $z''_q \in Z''_q \subset C''_q$.

La seconda riga è esatta, quindi g_q è suriettivo; pertanto esiste $c_q \in C_q$ tale che $g_q(c_q) = z''_q$; per la commutatività del quadrato

$$g_{q-1}(\partial_q(c_q)) = \partial''_q(g_q(c_q)) = 0,$$

e quindi $\partial_q(c_q) \in \text{Ker}(g_{q-1}) = \text{Im}(f_{q-1})$; pertanto esiste un unico $c'_{q-1} \in C'_{q-1}$ tale che $f_{q-1}(c'_{q-1}) = \partial_q(c_q)$. Inoltre

$$f_{q-2}(\partial'_{q-1}(c'_{q-1})) = \partial_{q-1}(f_{q-1}(c'_{q-1})) = \partial_{q-1}(\partial_q(c_q)) = 0,$$

quindi, per l'iniettività di f_{q-2} abbiamo $\partial'_{q-1}(c'_{q-1}) = 0$, cioè $c'_{q-1} \in Z'_{q-1}$ e individua una classe $[c'_{q-1}]$ in $H_{q-1}(C')$. Poniamo $\delta_q([z''_q]) = [c'_{q-1}]$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & c_q \in C_q & \xrightarrow{g_q} & z''_q \in C''_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q & & \\
 0 & \longrightarrow & c'_{q-1} \in C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & \partial_q(c_q) \in C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & 0 \in C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_{q-1} & & & & & & \\
 & & 0 \in C_{q-2} & & & & & &
 \end{array}$$

1) L'applicazione δ_q è ben definita.

Mostriamo innanzitutto che la definizione non dipende dalla scelta fatta della controimmagine c_q di z''_q via g_q .

Sia $\bar{c}_q \in C_q$ un'altra controimmagine di z_q'' ; allora $g_q(\bar{c}_q - c_q) = 0$, e quindi $\bar{c}_q - c_q \in \text{Ker}(g_q) = \text{Im}(f_q)$, perciò esiste $\bar{c}'_q \in C'_q$ tale che $\bar{c}_q = c_q + f_q(\bar{c}'_q)$. Ne segue che

$$\partial_q(\bar{c}_q) - \partial_q(c_q) = \partial_q(f_q(\bar{c}'_q)) = f_{q-1}(\partial'_q(\bar{c}'_q)),$$

e quindi l'elemento individuato in C_{q-1} partendo da \bar{c}_q differisce da quello individuato da c_q per il bordo $\partial'_q(\bar{c}'_q)$, e quindi individua la stessa classe in $H_q(C')$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{c}'_q \in C'_q & \xrightarrow{f_q} & c_q - \bar{c}_q \in C_q & \xrightarrow{g_q} & 0 \in C''_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q \\ 0 & \longrightarrow & \partial'_q(\bar{c}'_q) \in C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & \partial_q(c_q) - \partial_q(\bar{c}_q) \in C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & C''_{q-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mostriamo ora che la definizione non dipende dalla scelta del rappresentante della classe $[z_q'']$; sia \bar{z}_q'' tale che $[\bar{z}_q''] = [z_q'']$.

Poiché $[z_q''] = [\bar{z}_q'']$ si ha che $\bar{z}_q'' - z_q'' = \partial''_{q+1}(c'_{q+1})$; per la suriettività di g_{q+1} esiste $c_{q+1} \in C_{q+1}$ tale che $g_{q+1}(c_{q+1}) = c'_{q+1}$. Riscriviamo

$$\bar{z}_q'' - z_q'' = \partial''_{q+1}(g_{q+1}(c_{q+1})) = g_q(\partial_{q+1}(c_{q+1})).$$

Ora, poiché $\partial_q(\partial_{q+1}(c_{q+1})) = 0$, si vede che la definizione di δ_q non dipende dal rappresentante scelto.

$$\begin{array}{ccccccc} c_{q+1} \in C_{q+1} & \xrightarrow{g_{q+1}} & c'_{q+1} \in C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial''_{q+1} & & \\ \partial_{q+1}(c_{q+1}) \in C_q & \xrightarrow{g_q} & z_q'' - \bar{z}_q'' \in C''_q & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q & & \\ 0 \in C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

2) L'applicazione δ_q è un omomorfismo.

Siano $[z_q'']$ e $[\bar{z}_q'']$ due elementi di $H_q(C'')$; per trovare $\delta_q([z_q''])$ scegliamo una controimmagine c_q di z_q'' via g_q , ne prendiamo il bordo $\partial_q(c_q)$, troviamo l'unica controimmagine c'_{q-1} di $\partial_q(c_q)$ via f_{q-1} e ne consideriamo la classe: $\delta_q([z_q'']) = [c'_{q-1}]$. Analogamente per trovare $\delta_q([\bar{z}_q''])$ scegliamo una controimmagine \bar{c}_q di \bar{z}_q'' via g_q , ne prendiamo il bordo $\partial_q(\bar{c}_q)$, troviamo l'unica controimmagine \bar{c}'_{q-1} di $\partial_q(\bar{c}_q)$ via f_{q-1} , e ne consideriamo la classe: $\delta_q([\bar{z}_q'']) = [\bar{c}'_{q-1}]$.

Per trovare $\delta_q([z_q'' + \bar{z}_q''])$ dobbiamo innanzitutto scegliere una controimmagine di $z_q'' + \bar{z}_q''$ via g_q ; essendo g_q un omomorfismo possiamo scegliere $c_q + \bar{c}_q$ come controimmagine.

Dobbiamo ora considerare $\partial_q(c_q + \bar{c}_q) = \partial_q(c_q) + \partial_q(\bar{c}_q)$ e prenderne l'unica controimmagine via f_{q-1} . Ora è evidente che tale elemento è esattamente $c'_{q-1} + \bar{c}'_{q-1}$, e quindi

$$\delta_q([z''_q + \bar{z}''_q]) = [c'_{q-1} + \bar{c}'_{q-1}] = [c'_{q-1}] + [\bar{c}'_{q-1}] = \delta_q([z''_q]) + \delta_q([\bar{z}''_q]).$$

3) La successione 7.3 è esatta.

Mostriamo ora che la successione

$$\dots \xrightarrow{H_q(f)} H_q(\mathcal{C}) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(\mathcal{C}'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\mathcal{C}') \xrightarrow{H_{q-1}(f)} H_{q-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \dots$$

è esatta in $H_q(\mathcal{C}'')$, lasciando come esercizio l'esattezza in $H_q(\mathcal{C}')$ e in $H_q(\mathcal{C})$.

Mostriamo innanzitutto che $\text{Im}(H_q(g)) \subseteq \text{Ker}(\delta_q)$.

Sia $[z''_q] = H_q(g)([z_q]) = [g_q(z_q)]$; ciò significa che esiste $c_{q+1} \in C_{q+1}$ tale che $z''_q + \partial_{q+1}(c_{q+1}) = g_q(z_q)$.

Per trovare $\delta_q([z''_q]) = \delta_q([z''_q + \partial_{q+1}(c_{q+1})])$ possiamo quindi scegliere come rappresentante della classe $[z''_q]$ l'elemento $z''_q + \partial_{q+1}(c_{q+1})$, e come controimmagine di tale elemento via g_q l'elemento z_q , che è un ciclo, quindi $\partial_q(z_q) = 0$ e $\delta_q([z''_q]) = 0$.

Mostriamo ora che $\text{Ker}(\delta_q) \subseteq \text{Im}(H_q(g))$.

Sia $[z''_q] \in \text{Ker} \delta_q$; ciò significa che esiste $c_q \in C_q$ tale che $g_q(c_q) = z''_q$ e, denotata con c'_{q-1} l'unica controimmagine di $\partial_q(c_q)$ via f_{q-1} , esiste $c'_q \in C'_q$ tale che $c'_{q-1} = \partial'_q c'_q$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & c'_q \in C'_q & \xrightarrow{f_q} & c_q \in C_q & \xrightarrow{g_q} & z''_q \in C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial''_q & & \\ 0 & \longrightarrow & c'_{q-1} = \partial'_q(c'_q) \in C'_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & \partial_q(c_q) \in C_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & c''_{q-1} \in C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per la commutatività del quadrato a sinistra

$$\partial_q(f_q(c'_q)) = f_{q-1}(c'_q) = \partial_q(c_q),$$

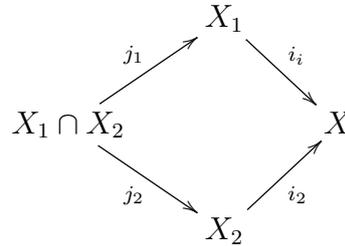
e quindi $\partial_q(f_q(c'_q) - c_q) = 0$, cioè $z_q = c_q - f_q(c'_q)$ è un ciclo, quindi individua una classe $[z_q] \in H_q(\mathcal{C})$. Possiamo quindi considerare

$$H_q(g)([z_q]) = [g_q(z_q)] = [g_q(c_q - f_q(c'_q))] = [g_q(c_q)] = [z''_q];$$

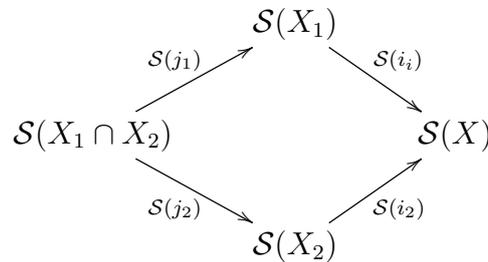
e quindi $[z''_q] \in \text{Im}(H_q(g))$. □

Definizione 7.4. Siano $\mathcal{C} = \{C_q, \partial_q\}$ e $\mathcal{C}' = \{C'_q, \partial'_q\}$ due complessi di catene; si dice *somma diretta* di \mathcal{C} e \mathcal{C}' il complesso di catene $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}' = \{C_q \oplus C'_q, \partial_q \oplus \partial'_q\}$ ove $\partial_q \oplus \partial'_q : C_q \oplus C'_q \rightarrow C_{q-1} \oplus C'_{q-1}$ è l'omomorfismo che manda la coppia (c, c') nella coppia $(\partial_q c, \partial'_q c')$.

Sia X uno spazio topologico, e siano X_1, X_2 due suoi sottospazi; il diagramma commutativo dato dalle inclusioni



induce un diagramma di complessi di catene



Possiamo considerare le seguenti successione esatte brevi di gruppi

$$0 \longrightarrow S_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi_q} S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) \xrightarrow{\psi_q} \langle S_q(X_1), S_q(X_2) \rangle \longrightarrow 0,$$

dove $\langle S_q(X_1), S_q(X_2) \rangle$ è il sottogruppo di $S_q(X)$ generato da $S_q(X_1)$ e $S_q(X_2)$, $\varphi_q = (S_q(j_1), -S_q(j_2))$, $\psi_q = S_q(i_1) + S_q(i_2)$. E' immediato verificare che $\varphi = \{\varphi_q\}$ e $\psi = \{\psi_q\}$ sono morfismi di complessi di catene, e inducono una successione esatta breve di complessi

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}(X_1) \oplus \mathcal{S}(X_2) \xrightarrow{\psi} \mathcal{S}\{X_1, X_2\} \longrightarrow 0,$$

dove $\mathcal{S}\{X_1, X_2\} = (\langle S_q(X_1), S_q(X_2) \rangle, \partial_q)$. Per la Proposizione 7.2 esiste quindi una successione esatta lunga associata alla successione breve precedente. In tale successione non compaiono però i gruppi $H_q(X) = H_q(\mathcal{S}(X))$, ma i gruppi $H_q(\mathcal{S}\{X_1, X_2\})$. Il teorema successivo fornisce una condizione sufficiente affinché tali gruppi siano isomorfi.

Teorema 7.5. (Mayer-Vietoris) Se $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$ allora è esatta la successione lunga

$$\longrightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\Phi_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\Psi_q} H_q(X) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow$$

ove $\Phi_q = (H_q(j_1), -H_q(j_2))$, $\Psi_q = H_q(i_1) + H_q(i_2)$ e δ_q è come nella Proposizione 7.2.

Osservazione 7.6. Lo stesso risultato vale considerando l'omologia ridotta.

Esempio 7.7. Siano X e Y due spazi topologici, e siano $x \in X$ e $y \in Y$ punti che hanno intorni contraibili U_x e U_y . Sia $X \vee Y$ lo spazio topologico ottenuto identificando x e y nello spazio topologico $X \sqcup Y$. Allora

$$\tilde{H}_q(X \vee Y) \simeq \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y).$$

Infatti, considerando $X_1 = X \cup U_y$ e $X_2 = Y \cup U_x$, dalla successione di Mayer-Vietoris per l'omologia ridotta si ha

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X \vee Y) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

e quindi, poiché $X_1 \cap X_2$ è contraibile, sono esatte la successioni brevi

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X \vee Y) \rightarrow 0;$$

Poiché X_1 è omotopicamente equivalente ad X ed X_2 è omotopicamente equivalente a Y segue la tesi.

Esempio 7.8. Calcoliamo i gruppi di omologia ridotta della sfera \mathbf{S}^n . Vogliamo mostrare che

$$\tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) = \{0\} \quad \text{per } q \neq n \quad (7.9)$$

$$\tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) = \mathbb{Z} \quad \text{per } q = n \quad (7.10)$$

L'enunciato è vero per $n = 0$ perché \mathbf{S}^0 è costituita da due punti e per $q = 0$, in quanto \mathbf{S}^n è connessa per archi se $n \geq 1$. Sia $0 < \varepsilon \ll 1$ e siano

$$X_1 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n \mid x_{n+1} > -\varepsilon\},$$

$$X_2 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{S}^n \mid x_{n+1} < \varepsilon\}.$$

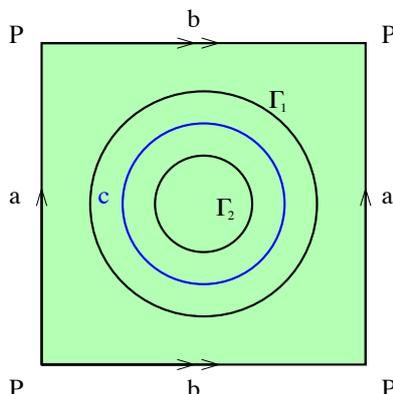
I sottospazi X_1 e X_2 sono omeomorfi a dischi di dimensione n , e quindi contraibili; l'intersezione si retrae su $\mathbf{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\} \simeq \mathbf{S}^{n-1}$, e quindi dalla successione di Mayer-Vietoris otteniamo

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow 0.$$

da cui segue che $\tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) \simeq \tilde{H}_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$. Possiamo concludere osservando che

$$\begin{cases} \tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) \simeq \tilde{H}_{q-n}(\mathbf{S}^0) \simeq \{0\} & q > n \\ \tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) \simeq \tilde{H}_0(\mathbf{S}^{n-q}) \simeq \{0\} & q < n \\ \tilde{H}_q(\mathbf{S}^n) \simeq \tilde{H}_0(\mathbf{S}^0) \simeq \mathbb{Z} & q = n \end{cases}$$

Esempio 7.11. Calcoliamo i gruppi di omologia ridotta del toro.



Sia X_1 il disco di bordo Γ_1 , e X_2 il complementare del disco di bordo Γ_2 . Il sottospazio X_1 è omeomorfo ad un disco, e quindi tutti i suoi gruppi di omologia ridotta sono nulli.

Il sottospazio X_2 ha il bordo del toro come retratto di deformazione; il bordo del toro è omeomorfo all'unione a un punto delle circonferenze a e b , e quindi

$$\tilde{H}_0(X_2) = \tilde{H}_2(X_2) = \{0\}$$

$$\tilde{H}_1(X_2) = \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle$$

L'intersezione $X_1 \cap X_2$ ha una circonferenza c come retratto di deformazione, quindi

$$\tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) = \tilde{H}_2(X_1 \cap X_2) = \{0\}$$

$$\tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}\langle c \rangle$$

Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris abbiamo

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \dots$$

da cui, per $q \geq 3$

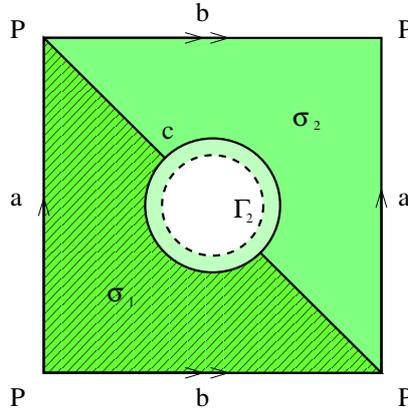
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow 0$$

otteniamo $\tilde{H}_q(X) = \{0\}$. Vediamo ora i termini più bassi della successione.

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_2(X) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_2(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}\langle c \rangle \xrightarrow{(H_1(j_1), H_1(-j_2))} \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle \longrightarrow \dots$$

L'omomorfismo δ_1 è iniettivo, quindi $\tilde{H}_2(X) \simeq \text{Im } \delta_1 = \text{Ker}(H_1(j_1), H_1(-j_2))$. $\tilde{H}_1(X_1) = \{0\}$, quindi $H_1(j_1)$ è l'omomorfismo nullo (infatti c in X_1 è bordo di un disco). In X_2 la regione $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ in figura è tale che $\partial_2 \sigma = c + a - b - a + b$



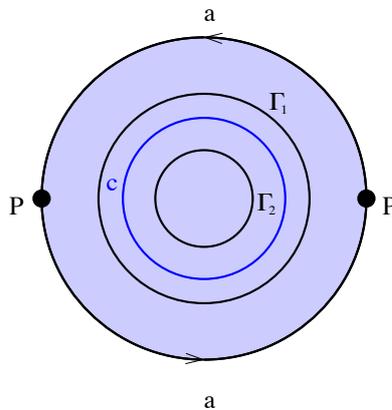
perciò $[c] = [a - b - a + b] = [0]$, e quindi anche $H_1(j_2)$ è l'omomorfismo nullo. Segue che δ_1 è un isomorfismo e $\tilde{H}_2(X) \simeq \mathbb{Z}$. Consideriamo ora il tratto seguente della successione:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \\ &\dots \longrightarrow \mathbb{Z}\langle c \rangle \xrightarrow{(H_1(j_1), H_1(-j_2))} \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle \longrightarrow \tilde{H}_1(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo già mostrato che $(H_1(j_1), H_1(-j_2))$ è l'omomorfismo nullo, e pertanto $\tilde{H}_1(X) \simeq \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle$. Quindi abbiamo mostrato che i gruppi di omologia ridotta del toro sono

$$\tilde{H}_q(T) \simeq \begin{cases} \{0\} & q \neq 1, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 1 \\ \mathbb{Z} & q = 2 \end{cases} .$$

Esempio 7.12. Calcoliamo ora i gruppi di omologia ridotta del piano proiettivo reale



Sia X_1 il disco di bordo Γ_1 , e X_2 il complementare del disco di bordo Γ_2 . Il sottospazio X_1 è omeomorfo ad un disco, e quindi tutti i suoi gruppi di omologia

ridotta sono nulli.

Il sottospazio X_2 ha il bordo di $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ come retratto di deformazione; il bordo di $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ è omeomorfo alla circonferenza a , e quindi

$$\tilde{H}_0(X_2) = \tilde{H}_2(X_2) = \{0\}$$

$$\tilde{H}_1(X_2) = \mathbb{Z}\langle a \rangle$$

L'intersezione $X_1 \cap X_2$ ha una circonferenza c come retratto di deformazione, quindi

$$\tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) = \tilde{H}_2(X_1 \cap X_2) = \{0\}$$

$$\tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z}\langle c \rangle$$

Dalla successione esatta di Mayer-Vietoris abbiamo

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \dots$$

da cui, per $q \geq 3$

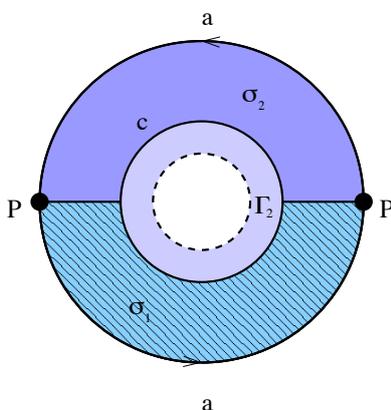
$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_q(X) \longrightarrow 0$$

otteniamo $\tilde{H}_q(X) = \{0\}$. Vediamo ora i termini più bassi della successione.

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_2(X) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_2(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}\langle c \rangle \xrightarrow{(H_1(j_1), H_1(-j_2))} \mathbb{Z}\langle a \rangle \longrightarrow \dots$$

L'omomorfismo δ_1 è iniettivo, quindi $\tilde{H}_2(X) \simeq \text{Im } \delta_1 = \text{Ker}(H_1(j_1), H_1(-j_2))$. $\tilde{H}_1(X_1) = \{0\}$, quindi $H_1(j_1)$ è l'omomorfismo nullo (infatti c in X_1 è bordo di un disco). In X_2 la regione $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ in figura è tale che $\partial_2 \sigma = c + a + a$,



perciò $[c] = [-2a]$, e quindi $-H_1(j_2)$ è l'omomorfismo che manda $[c]$ in $[2a]$; in particolare tale omomorfismo è iniettivo; segue che δ_1 è l'omomorfismo nullo e

$$\tilde{H}_2(X) \simeq \{0\}.$$

Consideriamo ora il tratto seguente della successione:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{Z}\langle c \rangle \xrightarrow{(H_1(j_1), H_1(-j_2))} \mathbb{Z}\langle a \rangle \xrightarrow{H_1(i_1+i_2)} \tilde{H}_1(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Abbiamo già mostrato che $(H_1(j_1), H_1(-j_2))$ è l'omomorfismo che manda $[c]$ in $[2a]$, pertanto

$$\tilde{H}_1(X) \simeq \frac{\mathbb{Z}\langle a \rangle}{\text{Ker } H_1(i_1+i_2)} \simeq \frac{\mathbb{Z}\langle a \rangle}{\text{Im}(H_1(j_1), H_1(-j_2))} \simeq \frac{\mathbb{Z}\langle a \rangle}{\mathbb{Z}\langle 2a \rangle} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Quindi abbiamo mostrato che i gruppi di omologia ridotta del piano proiettivo reale sono

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \simeq \begin{cases} \{0\} & q \neq 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & q = 1 \end{cases}.$$

7.2 OMOLOGIA DI UNA COPPIA E RETRAZIONI

Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un suo sottospazio; chiameremo (X, A) *coppia* di spazi topologici. Possiamo considerare i complessi singolari $\mathcal{S}(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$ e $\mathcal{S}(A) = \{S_q(A), \partial_q\}$. L'inclusione $i : A \rightarrow X$ induce per ogni q morfismi iniettivi $S_q(i) : S_q(A) \rightarrow S_q(X)$ così definiti:

$$S_q(i) \left(\sum_{j=1}^k n_j \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^k n_j (i \circ \sigma_j).$$

Per ogni q possiamo considerare il gruppo quoziente

$$S_q(X, A) = \frac{S_q(X)}{S_q(A)},$$

detto gruppo delle q -catene relative di X modulo A .

E' possibile costruire un omomorfismo di bordo $\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A)$ che rende $\{S_q(X, A), \bar{\partial}_q\}$ un complesso di catene ponendo $\bar{\partial}_q([s]) = [\partial_q(s)]$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_q(A) & \xrightarrow{S_q(i)} & S_q(X) & \xrightarrow{\pi_q} & S_q(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \bar{\partial}_q & & \\ 0 & \longrightarrow & S_{q-1}(A) & \xrightarrow{S_{q-1}(i)} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & S_{q-1}(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La definizione è ben posta perché, se $s' = s + s_A$, con $s_A \in S_q(A)$, allora $\partial_q(s_A) \in S_{q-1}(A)$ e quindi $[\partial_q(s)] = [\partial_q(s') + \partial_q(s_A)] = [\partial_q(s')]$. Il complesso

$$\mathcal{S}(X, A) = \{S_q(X, A), \bar{\partial}_q\}$$

è detto *complesso (singolare) relativo* o *complesso (singolare) della coppia* (X, A) ; l'omologia del complesso $\mathcal{S}(X, A)$,

$$H_q(X, A) := H_q(\mathcal{S}(X, A)),$$

viene detta *omologia relativa* di X modulo A o anche *omologia della coppia* (X, A) . Vediamo ora di dare una descrizione più geometrica dei gruppi $H_q(X, A)$.

Definizione 7.13. Chiamiamo gruppo dei q -cicli relativi di X modulo A il gruppo

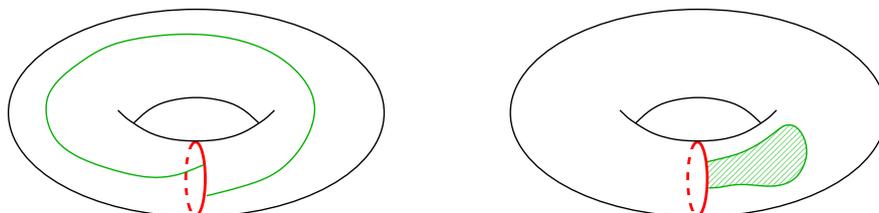
$$Z_q(X, A) = \{s \in S_q(X) \mid \partial_q s \in S_{q-1}(A)\},$$

e gruppo dei q -bordi relativi di X modulo A il gruppo

$$B_q(X, A) = \{s \in S_q(X) \mid s = \partial_{q+1} s' + s_A, \quad s' \in S_{q+1}(X), s_A \in S_q(A)\}.$$

E' immediato verificare che $Z_q(X) \subseteq Z_q(X, A)$ e $B_q(X) \subseteq B_q(X, A)$.

Esempio 7.14. Sia X il toro e A la circonferenza rossa in figura.



Nella figura a sinistra, l'1-simplesso verde non è un ciclo, ma è un ciclo relativo, perché il suo bordo è contenuto in A . Nella figura a destra l'1-simplesso verde non è un bordo, ma è un bordo relativo, perché è un bordo a meno di un 1-simplesso contenuto in A .

Dalla definizione segue che $B_q(X, A) \subseteq Z_q(X, A)$, ed è quindi possibile formare il gruppo quoziente.

Teorema 7.15. Il gruppo quoziente dei q -cicli relativi modulo i q -bordi relativi è isomorfo al q -esimo gruppo di omologia relativa della coppia (X, A) :

$$H_q(X, A) \simeq \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}.$$

Dimostrazione. Il gruppo di omologia della coppia è definito come

$$H_q(X, A) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_q}{\text{Im } \bar{\partial}_{q+1}},$$

Osserviamo innanzitutto che $\pi_q(Z_q(X, A)) = \text{Ker}(\bar{\partial}_q)$. Se $s \in Z_q(X, A)$ allora $\bar{\partial}_q[s] = [\partial_q s] = [0]$ perché $\partial_q s \in S_{q-1}(A)$. D'altra parte, se $\bar{\partial}_q[s] = 0$, allora $[\partial_q s] = 0$, cioè $\partial_q s \in S_{q-1}(A)$.

Il nucleo del morfismo suriettivo $\pi_q|_{Z_q(X, A)} : Z_q(X, A) \rightarrow \text{Ker}(\bar{\partial}_q)$ è costituito dagli $s \in Z_q(X, A)$ tali che $[s] = 0$, cioè da $S_q(A)$. Pertanto, per il primo teorema di isomorfismo

$$\text{Ker } \bar{\partial}_q \simeq \frac{Z_q(X, A)}{S_q(A)}.$$

Osserviamo ora che $\pi_q(B_q(X, A)) = \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$. Se $s \in B_q(X, A)$; allora $[s] \in \text{Im } \bar{\partial}_{q+1}$; infatti $s = \partial_{q+1}s' + s_A$, e quindi $[s] = [\partial_{q+1}s'] = \bar{\partial}_{q+1}[s']$. D'altra parte, se $[s] = \bar{\partial}_{q+1}[s']$, allora $[s] = [\partial_{q+1}s']$, cioè $s - s' \in S_q(A)$.

Il nucleo del morfismo suriettivo $\pi_q|_{B_q(X, A)} : B_q(X, A) \rightarrow \text{Im}(\bar{\partial}_q)$ è costituito dagli $s \in B_q(X, A)$ tali che $[s] = 0$, cioè da $S_q(A)$. Pertanto, per il primo teorema di isomorfismo

$$\text{Im } \bar{\partial}_{q+1} \simeq \frac{B_q(X, A)}{S_q(A)},$$

da cui, per il terzo teorema d'isomorfismo abbiamo la tesi. □

La successione esatta breve di complessi di catene

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(A) \xrightarrow{\mathcal{S}(i)} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\mathcal{S}(\pi)} \mathcal{S}(X, A) \longrightarrow 0$$

induce una successione esatta lunga in omologia:

$$\dots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H_1(X, A) \xrightarrow{\delta_1} H_0(A) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X) \xrightarrow{H_0(\pi)} H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

detta *successione lunga di omologia della coppia* (X, A) .

Esempio 7.16. Sia x_0 un punto di uno spazio topologico X ; allora i gruppi di omologia della coppia (X, x_0) sono isomorfi ai gruppi di omologia ridotta di X : $H_q(X, x_0) \simeq \tilde{H}_q(X)$.

Infatti, considerando la successione esatta lunga della coppia (X, x_0) :

$$\dots \longrightarrow H_q(\{x_0\}) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(\{x_0\}) \longrightarrow \dots$$

vediamo che, se $q \geq 2$ abbiamo $H_q(X) \simeq H_q(X, \{x_0\})$ in quanto $H_q(\{x_0\}) = H_{q-1}(\{x_0\}) = 0$. Vediamo ora la situazione per $q = 0, 1$; la porzione di successione esatta lunga da considerare è la seguente:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{H_1(\pi)} H_1(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\delta_1} H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X) \xrightarrow{H_0(\pi)} H_0(X, \{x_0\}) \longrightarrow 0$$

Sia K un insieme che parametrizza le componenti connesse di X , e sia $X_{\bar{k}}$ la componente che contiene x_0 .

Per il Teorema 6.34 abbiamo $H_0(\{x_0\}) \simeq \mathbb{Z}\langle [x_0] \rangle$, mentre $H_0(X) \simeq \bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z}^{(k)}$, dove come generatore di $\mathbb{Z}^{(k)}$ si può prendere qualsiasi punto della componente connessa X_k . Da questa descrizione risulta evidente che il morfismo $H_0(i)$ è iniettivo.

Ne segue che δ_1 è il morfismo nullo, e quindi $H_1(X, \{x_0\}) \simeq H_1(X)$; inoltre abbiamo una successione esatta breve

$$0 \longrightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X) \xrightarrow{H_0(\pi)} H_0(X, \{x_0\}) \longrightarrow 0$$

Tale successione è spezzante, in quanto l'omomorfismo $h : H_0(X) \rightarrow H_0(\{x_0\})$ che manda il generatore di $\mathbb{Z}^{(k)}$ nello zero se $k \neq \bar{k}$ e il generatore di $\mathbb{Z}^{(\bar{k})}$ in $[x_0]$ è tale che $h \circ H_0(i) = \text{Id}_{H_0(\{x_0\})}$. Pertanto $H_0(X) \simeq H_0(X, \{x_0\}) \oplus \mathbb{Z}\langle [x_0] \rangle$.

Analogamente è possibile provare la seguente

Proposizione 7.17. $H_0(X, A)$ è il gruppo abeliano libero generato dalle componenti connesse di X che non intersecano A .

La seguente proposizione descrive l'omologia dei retratti, e può essere utile per stabilire che un sottospazio A non è un retratto dello spazio ambiente X .

Proposizione 7.18. Sia $A \subset X$ un retratto. Allora

$$H_q(X) \simeq H_q(A) \oplus H_q(X, A). \quad (7.19)$$

Dimostrazione. Poiché A è retratto di X abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \text{Id}_A & \end{array}$$

dal quale otteniamo in omologia il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_q(A) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X) & \xrightarrow{H_q(r)} & H_q(A) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \text{Id}_{H_q(A)} & \end{array}$$

da cui deduciamo che $H_q(r) \circ H_q(i) = \text{Id}_{H_q(A)}$; in particolare $H_q(i)$ è iniettiva e $H_q(r)$ è suriettiva. Questo ci permette di dividere la successione lunga di omologia della coppia (X, A)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \searrow & & & & \nearrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_q(A) & \xrightarrow{H_q(i)} & H_q(X) & \xrightarrow{H_q(\pi)} & H_q(X, A) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

in successioni esatte brevi e spezzanti.

$$0 \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(\pi)} H_q(X, A) \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{H_q(r)}$

Per la Proposizione 6.13 possiamo dunque concludere che

$$H_q(X) \simeq H_q(A) \oplus H_q(X, A). \quad \square$$

Esempio 7.20. Per ogni n intero non negativo sia $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera di raggio unitario. Se $k < n$ allora \mathbf{S}^k non è retracts di \mathbf{S}^n .

Infatti, se \mathbf{S}^k fosse retracts di \mathbf{S}^n , per $q = k$, dalla Proposizione 7.18 otterremmo

$$0 \simeq H_k(\mathbf{S}^n) \simeq H_k(\mathbf{S}^k) \oplus H_k(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^k) \simeq \mathbb{Z} \oplus H_k(\mathbf{S}^n, \mathbf{S}^k),$$

un'evidente contraddizione.

Esempio 7.21. Calcoliamo l'omologia della coppia $(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1})$; ricordando che $H_q(\mathbf{D}^n) = 0$ per $q \geq 1$, dalla successione esatta della coppia otteniamo, per $q \geq 2$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_q(\mathbf{D}^n) & \longrightarrow & H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbf{D}^n) & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

E quindi, per $q \geq 2$, $H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \simeq H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1})$. Perciò, ricordando l'Esempio 7.8, se $q \geq 2$ abbiamo

$$H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \{0\} & q \neq n \\ \mathbb{Z} & q = n \end{cases}.$$

Consideriamo ora i termini di indice più basso della successione esatta lunga della coppia $(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1})$

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow H_0(\mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(\mathbf{D}^n) \longrightarrow H_0(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

Vogliamo studiare la mappa $H_0(i) : H_0(\mathbf{S}^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathbf{D}^n)$; se $n \geq 2$ abbiamo $H_0(\mathbf{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}\langle [P] \rangle$, dove $[P]$ è la classe di un punto.

La mappa $H_0(i)$ manda tale classe nella classe individuata da $[P]$ in $H_0(\mathbf{D}^n)$; \mathbf{D}^n è connesso per archi, e quindi $H_0(\mathbf{D}^n) \simeq \mathbb{Z}$, generato dalla classe di un punto. Pertanto $H_0(i)$ è un isomorfismo e $H_1(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) = H_0(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) = 0$.

Diverso è il caso $n = 1$; infatti $H_0(\mathbf{S}^0) \simeq \mathbb{Z}\langle [P] \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle [Q] \rangle$, dove $P = (-1, 0)$ e $Q = (0, 1)$; i punti P e Q individuano la stessa classe in $H_0(\mathbf{D}^1) \simeq \mathbb{Z}$, quella del generatore, quindi $H_0(i) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ è il morfismo che associa a (h, k) la somma $h + k$, e quindi ha come nucleo $\text{Ker } \delta = \{(h, -h)\} \simeq \mathbb{Z}$; perciò in questo caso $H_1(\mathbf{D}^1, \mathbf{S}^0) = \mathbb{Z}$ e $H_0(\mathbf{D}^1, \mathbf{S}^0) = 0$. Riassumendo

$$H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \simeq \begin{cases} \{0\} & q \neq n \\ \mathbb{Z} & q = n \end{cases}.$$

7.3 OMOLOGIA LOCALE E INVARIANZA DELLA DIMENSIONE

Definizione 7.22. Un morfismo di coppie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subset B$.

Dato un morfismo di coppie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ possiamo considerare gli omomorfismi $S_q(f) : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ e $S_q(f) : S_q(A) \rightarrow S_q(B)$; essendo

$$S_q(f)(S_q(A)) \subset S_q(B)$$

risultano definiti omomorfismi $\bar{S}_q : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$. È semplice verificare che $\{\bar{S}_q(f)\}$ è un morfismo di complessi di catene, e che quindi esso induce un omomorfismo $H_q(f) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$.

Sia (X, A) una coppia di spazi, e sia $W \subset A$; abbiamo un'inclusione di coppie $i : (X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$, che induce omomorfismi

$$H_q(i) : H_q(X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow H_q(X, A).$$

Definizione 7.23. Si dice che $i : (X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$ è una *escissione*, o che W si può escindere, se $H_q(i)$ è un isomorfismo per ogni q .

Una condizione sufficiente per poter escindere un sottospazio è la seguente:

Teorema 7.24. (di escissione) Se (X, A) è una coppia di spazi e $W \subset A$ è tale che $\bar{W} \subset \overset{\circ}{A}$, allora W si può escindere.

Sia X uno spazio topologico in cui ogni punto è un sottoinsieme chiuso (un tale spazio topologico si dice spazio T_1).

Definizione 7.25. Sia $x \in X$ un punto. Si dicono *gruppi di omologia locale* di X in x i gruppi di omologia della coppia $(X, X \setminus \{x\})$.

Il nome dato a tali gruppi è giustificato dalla seguente

Proposizione 7.26. *Sia V un intorno di x ; allora l'inclusione di coppie $(V, V \setminus \{x\}) \hookrightarrow (X, X \setminus \{x\})$ induce isomorfismi $H_q(V, V \setminus \{x\}) \simeq H_q(X, X \setminus \{x\})$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\overline{X \setminus V} = X \setminus \overset{\circ}{V} \subset X \setminus \{x\} = (X \setminus \overset{\circ}{\{x\}}),$$

e quindi $X \setminus V$ si può escindere dalla coppia $(X, X \setminus \{x\})$ per il Teorema 7.24. \square

Lemma 7.27. (Lemma dei cinque). *Dato il diagramma commutativo con righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

se h_1, h_2, h_4 e h_5 sono degli isomorfismi, allora anche h_3 è un isomorfismo.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che h_3 è iniettivo; sia $a_3 \in A_3$ tale che $h_3(a_3) = 0$. Per la commutatività del terzo quadrato

$$h_4(f_3(a_3)) = g_3(h_3(a_3)) = 0,$$

e quindi $f_3(a_3) = 0$ perché h_4 è un isomorfismo.

La successione è esatta in A_3 , e $a_3 \in \text{Ker}(f_3)$, quindi esiste $a_2 \in A_2$ tale che $f_2(a_2) = a_3$; per la commutatività del secondo quadrato

$$g_2(h_2(a_2)) = h_3(f_2(a_2)) = 0,$$

quindi $h_2(a_2) \in \text{Ker}(g_2)$ e, per l'esattezza della riga inferiore, esiste $b_1 \in B_1$ tale che $g_1(b_1) = h_2(a_2)$.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 = h_1^{-1}(b_1) \in A_1 & \xrightarrow{f_1} & a_2 \in A_2 & \xrightarrow{f_2} & a_3 \in A_3 & \xrightarrow{f_3} & f_3(a_3) \in A_4 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 \\ b_1 \in B_1 & \xrightarrow{g_1} & h_2(a_2) \in B_2 & \xrightarrow{g_2} & 0 \in B_3 & \xrightarrow{g_3} & 0 \in B_4 \end{array}$$

Sia $a_1 = h_1^{-1}(b_1)$; per la commutatività del primo quadrato si ha

$$h_2(f_1(a_1)) = g_1(h_1(a_1)) = g_1(b_1) = h_2(a_2);$$

poiché h_2 è un isomorfismo si ha $f_1(a_1) = a_2$. Infine, per l'esattezza in A_2 della riga superiore si ha $a_3 = f_2(f_1(a_1)) = 0$.

Mostriamo ora che h_3 è suriettivo. Sia $b_3 \in B_3$; sia $b_4 = g_3(b_3)$ e sia $a_4 = h_4^{-1}(b_4)$. Per la commutatività del quarto quadrato e per l'esattezza della riga inferiore $h_5(f_4(a_4)) = g_4(h_4(a_4)) = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_2 \in A_2 & \xrightarrow{f_2} & a'_3, a_3 \in A_3 & \xrightarrow{f_3} & a_4 = h_4^{-1}(b_4) \in A_4 & \xrightarrow{f_4} & 0 \in A_5 \\
 \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\
 b_2 \in B_2 & \xrightarrow{g_2} & b_3, b'_3 \in B_3 & \xrightarrow{g_3} & b_4 = g_3(b_3) \in B_4 & \xrightarrow{g_4} & 0 \in B_5
 \end{array}$$

Per l'iniettività di h_5 si ha $f_4(a_4) = 0$, e quindi, per l'esattezza della riga superiore esiste $a'_3 \in A_3$ tale che $f_3(a'_3) = a_4$. Sia $b'_3 = h_3(a'_3)$; allora

$$g_3(b'_3) = g_3(h_3(a'_3)) = h_4(f_3(a'_3)) = h_4(a_4) = b_4,$$

e quindi $b_3 - b'_3 \in \text{Ker}(g_3)$. Per l'esattezza della riga inferiore esiste $b_2 \in B_2$ tale che $g_2(b_2) = b_3 - b'_3$. Sia $a_2 = h_2^{-1}(b_2)$ e sia $a_3 = f_2(a_2)$; si ha che

$$h_3(a_3 + a'_3) = h_3(f_2(a_2)) + b'_3 = g_3(h_2(a_2)) + b'_3 = b'_3 + b_3 - b'_3 = b_3.$$

Abbiamo quindi trovato una controimmagine di b_3 . □

Esempio 7.28. Calcoliamo i gruppi di omologia locale di \mathbb{R}^n ; per comodità scegliamo come punto l'origine. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{S}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{D}^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

dove tutti i morfismi sono inclusioni. Le inclusioni verticali inducono l'inclusione di coppie $(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Considerando le successioni esatte delle coppie $(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1})$, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e i morfismi indotti dalle inclusioni otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_q(\mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_q(\mathbf{D}^n) & \longrightarrow & H_q(\mathbf{D}^n, \mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbf{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbf{D}^n) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & H_q(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

Poiché \mathbf{S}^{n-1} è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e \mathbf{D}^n è un retratto di deformazione di \mathbb{R}^n tutte le frecce verticali tranne quella centrale sono isomorfismi.

Per il Lemma 7.27 anche quella centrale è un isomorfismo e dunque, ricordando l'Esempio 7.21 abbiamo

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}.$$

Corollario 7.29. (*Teorema di invarianza della dimensione*). Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ due aperti omeomorfi. Allora $m = n$.

Dimostrazione. Sia $\varphi : U \rightarrow V$ l'omeomorfismo, sia $\mathbf{x} \in U$ e $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$. Allora, utilizzando la Proposizione 7.26 e l'Esempio 7.28, otteniamo

$$\mathbb{Z} \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{\mathbf{x}\}) \simeq H_n(V, V \setminus \{\mathbf{y}\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{y}\}),$$

da cui la tesi. □

Parte II
Analisi Complessa

In questo capitolo, dopo aver brevemente richiamato la definizione e le prime proprietà dei numeri complessi, introdurremo la nozione di differenziabilità per funzioni di una variabile complessa (olomorfia) e vedremo come tale nozione sia molto più restrittiva della differenziabilità della stessa funzione pensata come funzione di due variabili reali. Mostreremo poi che le serie di potenze definiscono funzioni olomorfe all'interno del disco di convergenza, e introdurremo, mediante le loro serie, la funzione esponenziale ed alcune altre funzioni.

8.1 RICHIAMI SUI NUMERI COMPLESSI

Il campo \mathbb{C} dei numeri complessi è costituito dalle coppie ordinate $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ con le operazioni

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

È immediato verificare che \mathbb{C} è un gruppo abeliano rispetto alla somma, con elemento neutro $(0, 0)$, in cui l'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$, che $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto, con elemento neutro $(1, 0)$, in cui l'inverso di (a, b) è $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$ e che valgono le proprietà distributive della somma rispetto al prodotto.

Denotando con i la coppia $(0, 1)$ possiamo scrivere il numero complesso (a, b) come $a + ib$ tale scrittura è detta *forma algebrica* del numero complesso (a, b) ; notiamo che $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Dato il numero complesso $\alpha = a + ib$ chiameremo il numero reale a *parte reale* di α , e la denoteremo con $\Re \alpha$; chiameremo il numero reale b *parte immaginaria* di α e la denoteremo con $\Im \alpha$. Chiameremo *coniugato* del numero complesso α il numero complesso

$$\bar{\alpha} = \Re \alpha - i \Im \alpha.$$

Chiaramente si ha

$$\Re \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \qquad \Im \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}.$$

Altre proprietà di immediata verifica sono le seguenti:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \quad \overline{(\overline{\alpha})} = \alpha \quad (8.1)$$

Definiamo il *modulo* di un numero complesso α come

$$|\alpha| = \sqrt{(\Re \alpha)^2 + (\Im \alpha)^2}.$$

E' semplice verificare che

$$|\alpha|^2 = \alpha \overline{\alpha}, \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad \text{se } \alpha \neq 0 \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}. \quad (8.2)$$

Dato un numero complesso $\alpha = a + ib$, denotate con $\rho = |\alpha|$ e ϑ le coordinate polari del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$a = \rho \cos \vartheta \quad b = \rho \sin \vartheta,$$

e quindi possiamo scrivere

$$\alpha = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Tale scrittura è detta *forma trigonometrica* del numero complesso α , e ϑ è detto *argomento* di α .

Sia ϑ un numero reale. Definiamo

$$e^{i\vartheta} := \cos \vartheta + i \sin \vartheta; \quad (8.3)$$

è chiaro che, con questa definizione, $e^{i\vartheta}$ è un numero complesso di modulo uno, e che $e^{i(\vartheta+2k\pi)} = e^{i\vartheta}$. Dato un numero complesso $\alpha = a + ib$, denotate con ρ e ϑ le coordinate polari del punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\alpha = \rho e^{i\vartheta}.$$

Tale scrittura è detta *forma esponenziale* del numero complesso α .

Lemma 8.4. *Siano ϑ, φ due numeri reali. Allora*

$$e^{i(\vartheta+\varphi)} = e^{i\vartheta} e^{i\varphi}.$$

Dimostrazione. Per definizione

$$e^{i(\vartheta+\varphi)} = \cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi);$$

utilizzando le formule di addizione per seno e coseno otteniamo che l'espressione precedente è uguale a

$$\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi + i(\sin \vartheta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \vartheta).$$

D'altra parte l'espressione $e^{i\vartheta}e^{i\varphi}$ è, per definizione

$$e^{i\vartheta}e^{i\varphi} = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

e, svolgendo il prodotto, abbiamo la tesi. □

Sia ora $\alpha = a + ib$ un numero complesso. Definiamo

$$e^\alpha := e^a e^{ib}. \tag{8.5}$$

Utilizzando il Lemma 8.4 è semplice mostrare che

Lemma 8.6. *Siano α, β due numeri complessi. Allora*

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Proposizione 8.7. *Sia $\alpha \neq 0$ un numero complesso, di modulo ρ e argomento ϑ , e n un intero positivo. Allora l'equazione $z^n = \alpha$ ha n radici, date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Dimostrazione. Scriviamo $z = \rho_z e^{i\varphi}$; allora $z^n = \rho_z^n e^{in\varphi}$; uguagliando modulo e argomento si z^n e α troviamo

$$\begin{aligned} \rho_z^n &= \rho \\ n\varphi &= \vartheta + 2k\pi \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

8.2 FUNZIONI COMPLESSE. CONTINUITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione; dare una funzione f siffatta equivale a dare due funzioni $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, posto $z = x + iy$ si abbia

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Poiché la topologia che consideriamo su \mathbb{C} è la topologia euclidea indotta dall'identificazione di \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , in virtù della proprietà universale del prodotto la funzione f è continua se e solo se sono continue le funzioni u e v .

In analogia con il caso reale, per quanto riguarda la differenziabilità, possiamo dare la seguente

Definizione 8.8. Sia $z \in \Omega$. La funzione f si dice *differenziabile* in z se esiste un numero complesso $f'(z)$ tale che, per $h \rightarrow 0$,

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(|h|).$$

Equivalentemente f si dice differenziabile in z se esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Osservazione 8.9. Poiché la definizione è formalmente identica a quella del caso reale si mantengono tutte le proprietà formali, quali le formule per derivare somme, prodotti, quozienti e funzioni composte.

Proposizione 8.10. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tale che $u, v \in C^1(\Omega)$. Allora f è differenziabile in z se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tali condizioni sono dette equazioni di Cauchy-Riemann.

Dimostrazione. Sia v un numero complesso di modulo uno; condizione necessaria affinché esista finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

è che, per ogni v tale che $|v| = 1$ esista finito il limite

$$D_v f(z) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z+rv) - f(z)}{r},$$

e si vede facilmente che, in tal caso, si ha $D_v f(z) = f'(z)v$. Notiamo che, scegliendo $v = 1$ abbiamo che $D_1 f(z) = f'_x$, mentre, scegliendo $v = i$ abbiamo $D_i f(z) = f'_y$; pertanto troviamo che

$$\begin{cases} f'(z) &= u_x + iv_x \\ if'(z) &= u_y + iv_y \end{cases}$$

Moltiplicando per i la seconda equazione e sommando troviamo che

$$u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0,$$

da cui seguono le equazioni di Cauchy-Riemann.

Supponiamo ora che valgano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Posto $h = a + ib$; i rapporti incrementali per u e v si scrivono come:

$$\begin{aligned} u(z+h) - u(z) &= u_x a + u_y b + o(|h|) = u_x a - v_x b + o(|h|); \\ v(z+h) - v(z) &= v_x a + v_y b + o(|h|) = v_x a + u_x b + o(|h|), \end{aligned}$$

ove le ultime uguaglianze derivano dalle condizioni di Cauchy-Riemann. Sommando ora i due rapporti incrementali (il secondo moltiplicato per i) otteniamo il rapporto incrementale di f

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= (u_x + iv_x)a + (iu_x - v_x)b + o(|h|) \\ &= (u_x + iv_x)(a + ib) + o(|h|). \\ &= (u_x + iv_x)h + o(|h|) \end{aligned}$$

e quindi f è differenziabile in z e $f'(z) = u_x + iv_x$. □

Definizione 8.11. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è differenziabile in ogni punto di Ω . Indicheremo le funzioni olomorfe su Ω con $\mathcal{O}(\Omega)$.

Un altro modo di esprimere le condizioni di Cauchy-Riemann è il seguente: osservando che

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}$$

possiamo introdurre gli operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, così definiti:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

È immediato verificare che

Osservazione 8.12. Una funzione f verifica le condizioni di Cauchy-Riemann se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Quali condizioni deve soddisfare una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ per poter essere la parte reale di una funzione olomorfa? Assumiamo che esista una funzione $f = u + iv$ olomorfa in Ω e che $u, v \in C^2(\Omega)$. Dalle condizioni di Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

derivando la prima uguaglianza rispetto ad x e la seconda rispetto ad y troviamo che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e la stessa condizione vale per v , con analogo procedimento. Una funzione di classe C^2 che soddisfa tale condizione è detta *armonica*. La condizione di armonicità è anche sufficiente su un dominio semplicemente connesso, come mostra il seguente risultato.

Proposizione 8.13. Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica su un dominio semplicemente connesso Ω . Allora esiste una funzione armonica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, unica a meno di una costante, tale che $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia una funzione olomorfa.

Dimostrazione. Consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = -u_y dx + u_x dy.$$

Tale forma è chiusa; infatti

$$d\omega = -u_{yy} dy \wedge dx + u_{xx} dx \wedge dy = 0.$$

Poiché il dominio Ω è semplicemente connesso, ω , essendo chiusa, è anche esatta, cioè esiste una funzione $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega = dv = v_x dx + v_y dy$.

Pertanto $v_x = -u_y$ e $v_y = u_x$, cioè $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann, ed è quindi una funzione olomorfa. \square

8.3 SERIE DI POTENZE

Sia $\{f_n(z)\}$, con $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una successione di funzioni.

Definizione 8.14. Si dice che $\{f_n(z)\}$

- converge puntualmente ad f in Ω se per ogni $z \in \Omega$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$.
- converge uniformemente ad f in Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ si ha $\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Sia ora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$, con $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una serie di funzioni.

Definizione 8.15. Si dice che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$

- converge puntualmente in Ω se per ogni $z \in \Omega$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge.
- converge assolutamente in Ω se per ogni $z \in \Omega$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge.
- converge uniformemente in Ω se la successione delle somme parziali converge uniformemente in Ω .

Proposizione 8.16 (Test di Weierstrass). *Sia $\{f_n(z)\}$ una successione di funzioni definite in Ω , e siano M_n numeri reali tali che $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in \Omega$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge assolutamente e uniformemente in Ω .*

Definizione 8.17. Se le ipotesi della Proposizione 8.16 sono soddisfatte, si dice che la serie converge totalmente in Ω

Teorema 8.18 (Hadamard). *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze, e sia*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

1. Se $|z - z_0| < R$ allora la serie converge assolutamente, e per $R_1 < R$ la serie converge uniformemente in $|z - z_0| \leq R_1$.
2. Se $|z - z_0| > R$ la serie diverge.

R si dice raggio di convergenza della serie di potenze.

Osservazione 8.19. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie di potenze, e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ la sua serie derivata. Allora i raggi di convergenza delle due serie sono uguali.

Dimostrazione. Riscriviamo la serie derivata come $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$ e osserviamo che

$$\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|(n+1)a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}},$$

da cui l'asserto. \square

Teorema 8.20. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R positivo. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ è olomorfa in $|z-z_0| < R$ e $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$.

Dimostrazione. Assumiamo, senza perdita di generalità, che $z_0 = 0$. Sia $z \in B_0(R)$ e sia δ un numero reale positivo tale che $\overline{B_z(\delta)} \subset B_0(R)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{z+h-z} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} \frac{\left(\frac{z+h}{z}\right)^n - 1}{\left(\frac{z+h}{z}\right) - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z+h}{z}\right)^j = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j \end{aligned}$$

Mostriamo che la serie appena scritta converge uniformemente in $B_z(\delta)$, utilizzando il criterio di Weierstrass. Osserviamo innanzitutto che

$$|z+h| \leq |z| + |h| < |z| + \delta.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \left| a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j \right| &\leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z|^{n-1-j} (|z| + \delta)^j \\ &\leq |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} (|z| + \delta)^{n-1} \\ &= n|a_n| (|z| + \delta)^{n-1}. \end{aligned}$$

Vogliamo utilizzare il criterio di Weierstrass con $M_n = n|a_n|(|z| + \delta)^{n-1}$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge perché la serie derivata converge assolutamente nel cerchio di convergenza, cui appartiene il punto $z + z/|z|\delta$. Possiamo quindi calcolare il limite del rapporto incrementale nel modo seguente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} (z+h)^j = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Abbiamo con ciò mostrato che f è differenziabile in z e che la sua derivata è la serie derivata. \square

8.4 ESTENSIONE COMPLESSA DI ALCUNE FUNZIONI NOTEVOLI

Esempio 8.21. Definiamo

$$e^z := \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad (8.22)$$

per il Teorema 8.20 tale funzione è olomorfa su \mathbb{C} ; osserviamo innanzitutto che la funzione definita in 8.22 è tale che $(e^z)' = e^z$, in quanto la derivata della serie è la serie derivata. Pertanto, dato $w \in \mathbb{C}$ la funzione $g_w(z) = e^{w-z}e^z$ è costante, in quanto $g'(z) = 0$; ponendo $z = 0$ si trova che $g_w(z) = e^w$. Presi α e $\beta \in \mathbb{C}$, posto $w = \alpha + \beta$ e $z = \beta$ si ottiene

$$e^{\alpha+\beta} = g_w(z) = e^\alpha e^\beta.$$

Osserviamo ora che, per $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} &= \sum_0^{+\infty} (i)^n \frac{\vartheta^n}{n!} = \sum_0^{+\infty} (i)^{2k} \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!} + \sum_0^{+\infty} (i)^{2k+1} \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_0^{+\infty} (-)^k \frac{\vartheta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_0^{+\infty} (-)^k \frac{\vartheta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \vartheta + i \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Pertanto la definizione dell'esponenziale complesso data in 8.22 coincide con quella data in 8.3 e 8.5 e la giustifica.

La funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi i$, in quanto

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

e assume tutti i valori complessi tranne lo zero. Infatti, data l'equazione

$$e^z = \alpha,$$

Riscrivendola come

$$e^x e^{iy} = |\alpha| e^{i \arg \alpha};$$

troviamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = \ln |\alpha| \\ y = \arg \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni di $e^z = \alpha$ sono $z_k = \ln |\alpha| + i(\arg \alpha + 2k\pi)$.

Esempio 8.23. Le funzioni complesse $\sin z$ e $\cos z$ sono definite come

$$\sin z = \sum_0^{+\infty} (-)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (8.24)$$

$$\cos z = \sum_0^{+\infty} (-)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (8.25)$$

In modo analogo a quanto fatto nell'esempio precedente si mostra che

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

e quindi che

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (8.26)$$

Le funzioni seno e coseno complesse sono periodiche di periodo 2π , assumono tutti i valori complessi, e si annullano solo nei punti dove si annullano le corrispondenti funzioni reali. Verifichiamolo per il coseno, considerando l'equazione

$$\cos z = \alpha;$$

e, utilizzando la prima delle 8.26, riscriviamola come

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\alpha;$$

raccogliendo e^{-iz} possiamo riscrivere l'equazione come

$$e^{-iz}(e^{2iz} - 2\alpha e^{iz} + 1) = 0.$$

Il primo fattore non è mai nullo; il secondo fattore è un'equazione di secondo grado in e^{iz} , ed ha quindi due soluzioni

$$e^{iz} = \begin{cases} \alpha_1 & = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \alpha_2 & = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{cases}$$

Notiamo che α_1 e α_2 sono diversi da zero, quindi entrambe le equazioni ammettono soluzioni. Da

$$e^{iz} = \alpha_j,$$

riscrivendola come

$$e^{ix} e^{-y} = |\alpha_j| e^{i \arg \alpha_j};$$

troviamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = -\ln |\alpha_j| \\ x = \arg \alpha_j + 2k\pi \end{cases}$$

Le soluzioni di $\cos z = \alpha$ sono dunque $z_{jk} = \arg \alpha_j + 2k\pi - i \ln |\alpha_j|$, che, per $\alpha = 0$ si riducono a $z_k = \mp \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Con semplici calcoli si possono esprimere parte reale ed immaginaria di $\cos z$ e $\sin z$ come segue:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \qquad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Esempio 8.27. Le funzioni tangente e cotangente complessa non sono definite estendendo a \mathbb{C} la serie di potenze reale, perché in tal modo il cerchio di convergenza avrebbe raggio finito, ma come quoziente delle funzioni seno e coseno:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

Esempio 8.28. La funzioni iperboliche complesse sono definite come segue:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esempio 8.29. Definendo logaritmo di un numero complesso α un numero complesso z tale che $e^z = \alpha$, ricordando l'esempio 8.21, abbiamo che 0 non ha un logaritmo, mentre ogni altro numero complesso ne ha infiniti, cioè

$$z_k = \ln |\alpha| + i(\arg \alpha + 2k\pi).$$

Si potrebbe pensare che, come ad esempio nel caso dell'arcotangente reale, si tratti di un'infinità numerabile di funzioni diverse, e sia possibile sceglierne una definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ad esempio ponendo

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad \arg z \in [0, 2\pi),$$

ma è facile convincersi che tale funzione non è continua nei punti del semiasse reale positivo; infatti, se $z \in \mathbb{R}^+$ abbiamo

$$\log z = \ln z \quad \text{ma} \quad \lim_{\vartheta \rightarrow 2\pi} \log(z e^{i\vartheta}) = \ln z + i2\pi.$$

Non c'è un problema particolare con i punti del semiasse reale positivo: il problema nasce se l'insieme di definizione contiene una curva chiusa che circonda l'origine. È possibile definire un logaritmo continuo su Ω connesso tale che $0 \notin \Omega$ se e solo se, dato $z_0 \in \Omega$ e indicata con j l'inclusione $j : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha che $j_* : \pi(\Omega, z_0) \rightarrow \pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}, z_0)$ è l'omomorfismo nullo.

Definiamo la funzione logaritmo principale, $\text{Log } z : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \arg z \qquad \arg z \in (-\pi, \pi).$$

Attenzione: le proprietà formali del logaritmo reale non valgono per il logaritmo principale; ad esempio

$$\operatorname{Log}(-1+i)^2 = \operatorname{Log}(2e^{i\frac{3\pi}{2}}) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2}.$$

$$2\operatorname{Log}(-1+i) = 2\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) = \ln 2 + i\frac{3\pi}{2}.$$

9.1 INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

In questa sezione vogliamo definire l'integrale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lungo una curva contenuta in Ω . Cominciamo col definire l'integrale di una funzione continua a valori complessi definita su un intervallo di \mathbb{R} .

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua: scriviamo $f(t) = u(t) + iv(t)$, e definiamo

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

Proposizione 9.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt; \quad (9.2)$$

$$\int_a^b \Re f(t)dt = \Re \left(\int_a^b f(t)dt \right) \quad \int_a^b \Im f(t)dt = \Im \left(\int_a^b f(t)dt \right) \quad (9.3)$$

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (9.4)$$

Se esiste F derivabile su in $[a, b]$ tale che $f = F'$ allora

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (9.5)$$

Se $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ è di classe C^1 , invertibile con inversa di classe C^1 , allora

$$\int_c^d f(s)ds = \int_a^b f(\theta(t))\theta'(t)dt \quad (9.6)$$

Dimostrazione. Le prime due proprietà seguono immediatamente dalla definizione, la quarta dal Teorema fondamentale del calcolo e l'ultima dalla regola di sostituzione per l'integrale di Riemann. Dimostriamo la (9.4). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^{i\alpha} \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^+.$$

In particolare avremo che

$$e^{i\alpha} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt = \Re \left(\int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt \right)$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| e^{i\alpha} \int_a^b f(t) dt \right| = \Re \left(\int_a^b e^{i\alpha} f(t) dt \right) = \\ &= \int_a^b \Re (e^{i\alpha} f(t)) dt \leq \int_a^b |e^{i\alpha} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt, \end{aligned}$$

e la (9.4) è così dimostrata. \square

Definizione 9.7. Sia $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una *curva regolare* in \mathbb{C} è un'applicazione $\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}$ di classe \mathcal{C}^1 tale che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$. La curva si dice *regolare a tratti* se è continua su J e di classe \mathcal{C}^1 con $\gamma'(t) \neq 0$ su J meno un numero finito di punti.

Data una curva regolare $\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}$, un intervallo \tilde{J} e un'applicazione $\theta : \tilde{J} \rightarrow J$ di classe \mathcal{C}^1 , invertibile con inversa di classe \mathcal{C}^1 , possiamo considerare la curva regolare data da $\tilde{\gamma}(t) := \gamma \circ \theta : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{C}$, che chiameremo *riparametrizzazione* di γ .

Sia $\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e $[a, b] \subset J$; per ogni suddivisione S di J del tipo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ consideriamo il numero reale

$$\ell(\gamma, S) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|;$$

geometricamente $\ell(\gamma, S)$ è la lunghezza di una poligonale inscritta in $\gamma([a, b])$ con i vertici in $\gamma(t_i)$.

Definizione 9.8. La lunghezza della curva γ tra $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ è definita come

$$\ell(\gamma) = \sup_S \ell(\gamma, S).$$

Teorema 9.9. Sia $\gamma : J \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e $[a, b] \subset J$; allora

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Sia ora $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua, con Ω aperto che contiene il supporto di γ . Definiamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt;$$

È semplice verificare, utilizzando la (9.6) che la definizione appena data non dipende dalla parametrizzazione della curva. Inoltre vale la seguente

Proposizione 9.10. L'integrale di una funzione lungo una curva regolare gode delle seguenti proprietà:

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz; \quad (9.11)$$

$$\int_{\gamma} \Re f(z) dz = \Re \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) \quad \int_{\gamma} \Im f(z) dz = \Im \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) \quad (9.12)$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{\gamma} |f(z)| \ell(\gamma); \quad (9.13)$$

Se $\text{supp}(\gamma) \subset \Omega$ aperto ed esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $f = F'$ allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad (9.14)$$

Dimostrazione. Le prime due proprietà e l'ultima seguono dalle analoghe proprietà viste nella Proposizione 9.1. Per dimostrare la (9.13) utilizziamo la (9.4) e il Teorema 9.9:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{\gamma} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \max_{\gamma} |f(z)| \ell(\gamma) \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 9.15. Quanto visto finora per l'integrazione lungo curve regolari si estende al caso delle curve regolari a tratti: l'integrale di una funzione lungo una curva regolare a tratti è la somma degli integrali della funzione lungo i tratti regolari della curva. D'ora in avanti, per curva intenderemo curva regolare a tratti.

Esempio 9.16. Sia $f(z) = (z - a)^n$, con n intero nonnegativo; tale funzione ha come primitiva la funzione $F(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$, olomorfa su tutto \mathbb{C} ; pertanto l'integrale di f lungo qualsiasi curva chiusa è nullo.

Se $n \leq -2$ vale la stessa conclusione per l'integrale lungo qualsiasi curva chiusa che non passa per a .

Calcoliamo direttamente l'integrale di $f(z) = (z-a)^{-1}$ lungo una circonferenza γ di raggio unitario centrata in a parametrizzata nel modo seguente: $\gamma(\vartheta) = a + e^{i\vartheta}$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}} d\vartheta = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i.$$

9.2 IL TEOREMA DI CAUCHY - VERSIONE LOCALE

Teorema 9.17 (Goursat). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, e sia R un rettangolo contenuto in Ω . Allora

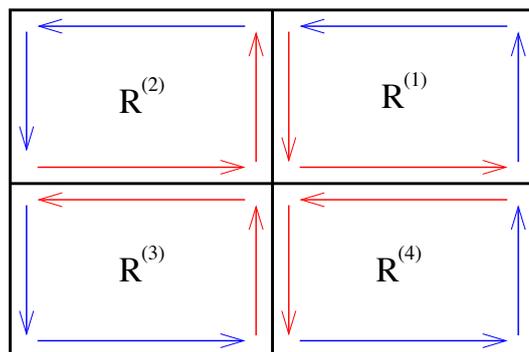
$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0,$$

ove con ∂R si denota il bordo del rettangolo, parametrizzato con lunghezza d'arco e percorso in senso antiorario.

Dimostrazione. Per ogni rettangolo $R' \subset \Omega$, definiamo

$$\eta(R') = \left| \int_{\partial R'} f(z) dz \right|;$$

suddividiamo il rettangolo R in quattro rettangoli uguali, $R^{(1)}, \dots, R^{(4)}$; chiaramente l'integrale di f sul bordo di R è uguale alla somma degli integrali di f sui bordi dei quattro rettangoli, perchè i lati comuni sono percorsi in verso opposto.



Pertanto per uno dei quattro rettangoli – chiamiamolo R_1 – si avrà

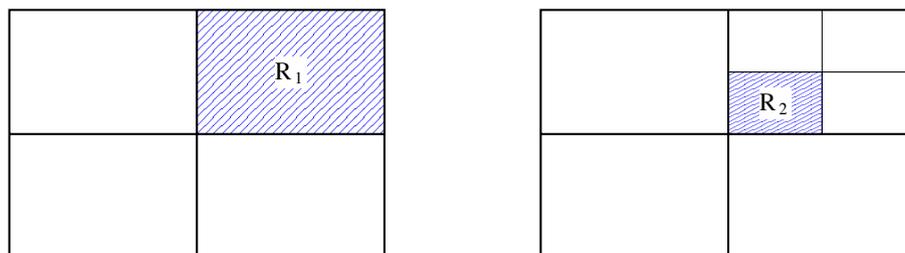
$$\eta(R_1) \geq \eta(R)/4.$$

Prendiamo ora il rettangolo R_1 , suddividiamolo in quattro rettangoli uguali e ripetiamo il ragionamento, trovando un rettangolo R_2 tale che

$$\eta(R_2) \geq \frac{\eta(R_1)}{4} \geq \frac{\eta(R)}{16}.$$

Continuando in questo modo costruiamo una successione di rettangoli $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ tali che

$$\eta(R_n) \geq \frac{\eta(R)}{4^n}. \tag{9.18}$$



L'intersezione $\bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$ è non vuota perché gli R_j sono compatti, ed è costituita da un solo punto perché il diametro dei rettangoli tende a zero. Sia $z^* = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$; la funzione f è olomorfa in z^* , quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \varepsilon |z - z^*| \tag{9.19}$$

se $|z - z^*| < \delta$, e ciò accade per ogni punto di R_n , se $n \gg 0$. Per la (9.14) - si veda l'esempio 9.16 - si ha che

$$\int_{\partial R_n} (f(z^*) + (z - z^*)f'(z^*))dz = 0.$$

Pertanto

$$\eta(R_n) = \left| \int_{\partial R_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)] dz \right|$$

da cui, utilizzando la 9.18, la 9.13, e la 9.19 otteniamo

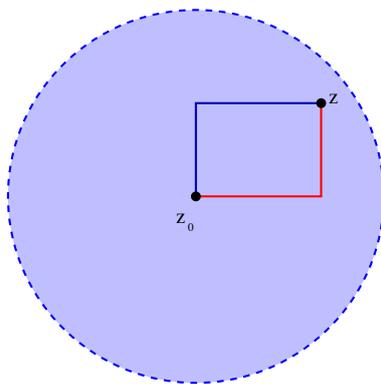
$$\eta(R_n) \leq \varepsilon \operatorname{diam}(R_n) \ell(\partial R_n) \leq \varepsilon \frac{\operatorname{diam}(R)}{2^n} \frac{\ell(\partial R)}{2^n} = \varepsilon \frac{K}{4^n}.$$

Pertanto $\eta(R) \leq \varepsilon K$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. \square

Corollario 9.20 (Teorema di Cauchy - versione locale). *Sia D un disco aperto, sia $f \in \mathcal{O}(D)$ e sia γ una curva chiusa il cui supporto è contenuto in D . Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Sia z_0 il centro del disco; preso $z \in D$, sia R il rettangolo con i lati paralleli agli assi i cui vertici opposti sono z_0 e z , sia ∂R^- la curva da z_0 a z costituita dal lato orizzontale del rettangolo che passa per z_0 e dal lato verticale del rettangolo che passa per z , e sia ∂R^+ la curva da z_0 a z costituita dal lato verticale del rettangolo che passa per z_0 e dal lato orizzontale del rettangolo che passa per z .



Definiamo

$$F(z) = \int_{\partial R^-} f(w) dw$$

Calcoliamo la derivata parziale di F rispetto a y nel punto z

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(z + ri) - F(z)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_z^{z+ir} f(w) dw,$$

dove l'integrale è sul segmento che unisce z a $z + ir$; parametrizzando tale segmento come $\gamma(t) = z + it$ troviamo che

$$\begin{aligned} \int_z^{z+ir} f(w)dw &= \int_0^r if(z+it)dt = i \left(\int_0^r u(z+it)dt + i \int_0^r v(z+it)dt \right), \\ &= ri(u(z+ir_0) + iv(z+ir_1)) \end{aligned}$$

dove $0 \leq r_0, r_1 \leq r$ e l'ultima uguaglianza è ottenuta utilizzando il Teorema del valor medio. Al tendere di r a zero anche r_0 e r_1 tendono a zero, e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = if(z).$$

Usiamo ora il Teorema 9.17 per ottenere che

$$F(z) = \int_{\partial R^+} f(w)dw$$

e utilizziamo tale espressione per calcolare la derivata parziale rispetto a x

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(z+r) - F(z)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_z^{z+r} f(w)dw;$$

con ragionamento analogo al precedente troviamo che quest'ultima espressione è uguale a $f(z)$. Segue che

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0$$

e quindi F è olomorfa per l'Osservazione 8.12. Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = f,$$

quindi F è una primitiva di f e concludiamo per la (9.14). □

Corollario 9.21. *Sia D un disco aperto, sia $f \in \mathcal{O}(D)$ e siano γ_1, γ_2 curve con lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, il cui supporto è contenuto in D . Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Le ipotesi del Teorema 9.17 possono essere indebolite, nel modo seguente:

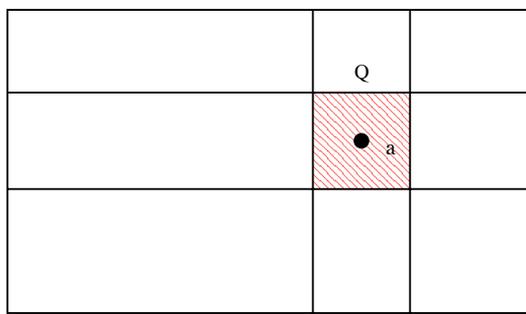
Teorema 9.22. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, tale che

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)f(z) = 0$$

per ogni i , e sia R un rettangolo contenuto in Ω il cui bordo è contenuto in $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Dimostrazione. A meno di suddividere il rettangolo R in più rettangoli, possiamo assumere che esso contenga solo uno dei punti a_i , che indicheremo con a . Dividiamo il rettangolo in otto rettangoli e un quadrato Q centrato in a , come in figura.



Applicando il Teorema 9.17 agli otto rettangoli esterni otteniamo che l'integrale di f sul bordo esterno di R è uguale all'integrale sul bordo di Q .

Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $|f(z)(z - a)| < \varepsilon$ se $|z - a| < \delta$. Dato ε scegliamo Q in modo tale che sia contenuto nel disco centrato in a e di raggio δ , e quindi, per tutti i suoi punti valga $|f(z)(z - a)| < \varepsilon$. Sia $l(Q)$ la lunghezza del lato di Q . Si ha

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)dz \right| \leq \varepsilon 4l(Q) \max_{|z-a| < \delta} \frac{1}{|z-a|} = 8\varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

Utilizzando Il Teorema 9.22 e modificando opportunamente la dimostrazione del Corollario 9.20 si può mostrare che

Corollario 9.23. Sia D un disco aperto, sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ tale che

$$\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)f(z) = 0$$

per ogni i e sia γ una curva chiusa il cui supporto è contenuto in $D \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Allora

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

9.3 INDICE DI UN PUNTO RISPETTO A UNA CURVA

Definizione 9.24. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$. Si dice *indice* di $z \in \Omega$ rispetto a γ il numero

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Lemma 9.25. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$. Sia $\text{Ind}_\gamma(z)$ l'indice di $z \in \Omega$ rispetto a γ . Allora $\text{Ind}_\gamma(z)$ è un numero intero.

Dimostrazione. Per definizione di integrale lungo una curva, si ha:

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Per provare che l'indice è un numero intero utilizzeremo il fatto che $e^{2\pi i \alpha} = 1$ se e solo se α è un numero intero. Definiamo perciò

$$g(h) = \int_a^h \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

e $\varphi(h) = e^{g(h)}$ e mostriamo che $\varphi(b) = 1$. La derivata di φ è data da

$$\varphi' = e^g \frac{\gamma'}{\gamma - z} = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z};$$

pertanto si ha che

$$\frac{\varphi}{\gamma - z} = \frac{\varphi'}{\gamma'}. \tag{9.26}$$

Derivando la (9.26), e riutilizzandola, otteniamo:

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z} \right)' = \frac{\varphi'(\gamma - z) - \varphi \gamma'}{(\gamma - z)^2} = \frac{\varphi'}{\gamma - z} - \frac{\varphi}{\gamma - z} \frac{\gamma'}{\gamma - z} = 0,$$

e quindi $\varphi/(\gamma - z)$ è costante. Da

$$\frac{\varphi(h)}{\gamma(h) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{1}{\gamma(a) - z}$$

otteniamo

$$\varphi(h) = \frac{\gamma(h) - z}{\gamma(a) - z},$$

e quindi $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$ poiché γ è chiusa. □

Lemma 9.27. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia γ una curva il cui supporto è contenuto in Ω e sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che la sua restrizione al supporto di γ sia continua. Allora la funzione

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw$$

è olomorfa in $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$.

Dimostrazione. Cominciamo a mostrare che f è continua. Sia z_0 un punto di $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$, e sia δ la distanza di z_0 dal supporto di γ . Si prenda ora $z \in B_{z_0}(\delta/2)$. Chiaramente per un tale z si ha $|z - \gamma(t)| > \delta/2$ per ogni t . Per cui, se $w \in \text{supp}(\gamma)$

$$\left| \frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right| = \left| \frac{g(w)(z - z_0)}{(w - z)(w - z_0)} \right| < \frac{2}{\delta^2} \max_{\gamma} |g(w)| |z - z_0|$$

Pertanto

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \int_{\gamma} \left(\frac{g(w)}{w - z} - \frac{g(w)}{w - z_0} \right) dw \right| \leq \frac{2}{\delta^2} |z - z_0| \max_{\gamma} |g(w)| \ell(\gamma).$$

e il secondo membro tende a 0 per z che tende a z_0 .

Consideriamo ora il rapporto incrementale di f , che, con semplici passaggi algebrici possiamo scrivere come

$$r(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)(w - z_0)} dw;$$

la funzione $r(z)$ è continua per la parte già dimostrata del lemma, applicata alla funzione $g(w)/(w - z_0)$, che è continua su $\text{supp}(\gamma)$, quindi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = r(z_0) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z_0)^2} dw,$$

e la funzione f è olomorfa in z_0 . □

Corollario 9.28. Sia γ una curva chiusa e sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$. La funzione $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ è continua su Ω .

Corollario 9.29. $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ è una funzione costante sulle componenti connesse di Ω .

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\text{Ind}_{\gamma}(z)$ è continua a valori nello spazio discreto \mathbb{Z} . □

Osservazione 9.30. Sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$ l'indice vale zero. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$, per $|z| \gg 0$ e per $w \in \text{supp}(\gamma)$ si ha

$$\left| \frac{1}{w-z} \right| < \varepsilon,$$

e quindi $2\pi i \text{Ind}_\gamma(z) < \varepsilon \ell(\gamma)$.

Esempio 9.31. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\vartheta) = a + re^{i\vartheta}$ la circonferenza di centro a e raggio r ; come nell'esempio 9.16 possiamo calcolare l'indice del centro di γ :

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}} d\vartheta = 1.$$

Grazie al Corollario 9.29 e all'Osservazione 9.30 abbiamo quindi

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & |z-a| < r \\ 0 & |z-a| > r \end{cases}$$

9.4 FORMULA INTEGRALE E APPLICAZIONI

Teorema 9.32 (Formula integrale di Cauchy, versione locale). *Sia D un disco aperto, sia $f \in \mathcal{O}(D)$ e sia γ una curva chiusa il cui supporto è contenuto in D . Allora, per ogni $z \notin \text{supp}(\gamma)$,*

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w-z};$$

tale funzione è olomorfa in $D \setminus \{z\}$ e $\lim_{w \rightarrow z} (w-z)F(w) = 0$, quindi, per il Corollario 9.23 si ha

$$0 = \int_\gamma F(w)dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z} dw,$$

da cui si deduce che

$$f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Ricordando che

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

segue la tesi. □

Osservazione 9.33. Se esistono un numero finito di punti $a, \dots, a_n \in D$ tali che $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, e $\lim_{z \rightarrow a_i} (z - a_i)f(z) = 0$ per ogni i la tesi del Teorema 9.32 è vera purché $z \neq a_i$.

Singularità eliminabili

Teorema 9.34. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in \Omega$ un suo punto e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, tale che $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$. Allora esiste un'unica funzione $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$.

Dimostrazione. Sia γ una circonferenza centrata in a e contenuta in Ω . La funzione

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

è olomorfa nel disco aperto di bordo γ per il Lemma 9.27, e coincide con f in tutti i punti $\neq a$ per la formula integrale, e quindi, ponendo

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ g(z) & z = a \end{cases}$$

si ottiene l'estensione cercata. □

Definizione 9.35. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in \Omega$ un suo punto e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$, tale che $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$. Si dice che f ha una *singularità eliminabile* in a .

Esempio 9.36. La funzione $\frac{\cos z - 1}{z}$ ha una singularità eliminabile nell'origine.

Teorema di Weierstrass

Teorema 9.37. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Allora esiste un intorno $B_{z_0}(r)$ di z_0 tale che, in tale intorno $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

dove γ è il bordo di $\overline{B_{z_0}(r)}$.

Dimostrazione. Sia D un disco aperto centrato in z_0 tale che la sua chiusura sia contenuta in Ω , sia γ il suo bordo e sia r il suo raggio. Utilizziamo la formula integrale di Cauchy per $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} dw = \quad (9.38)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} dw. \quad (9.39)$$

Osserviamo ora che $|w - z_0| = r$, mentre $|z - z_0| < r$, perciò $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$ e la (9.39) si può riscrivere come

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw.$$

Poiché la serie converge uniformemente e f è limitata su γ possiamo integrare termine a termine

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right\} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

e il teorema è dimostrato. □

Corollario 9.40. Una funzione olomorfa è C^∞ .

Formula delle derivate

Corollario 9.41. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$; allora se $\overline{B_{z_0}(r)} \subset \Omega$ e γ è il bordo di $\overline{B_{z_0}(r)}$ si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 9.37; infatti, derivando la serie, otteniamo $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. □

Maggiorazione di Cauchy

Corollario 9.42. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e γ il bordo di un disco chiuso centrato in z_0 e contenuto in Ω . Sia r il raggio di tale disco e $M = \max_{\gamma} |f|$. Allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Dimostrazione. Utilizzando la formula delle derivate, otteniamo

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M\ell(\gamma)}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n} \quad \square$$

Teorema di Liouville

Teorema 9.43. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Se f è limitata, allora è costante.

Dimostrazione. Supponiamo che esista una costante K tale che $|f(z)| < K$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Sia γ_r una circonferenza centrata nell'origine di raggio r . Applicando la maggiorazione di Cauchy per ogni $n \geq 1$ otteniamo, per ogni $r > 0$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!K}{r^n};$$

poiché la disuguaglianza è vera per ogni r necessariamente $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$ e $f(z) = f(0)$. \square

Corollario 9.44. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Se la parte reale (o la parte immaginaria) di f è limitata, allora è costante.

Dimostrazione. Si applichi il Teorema 9.43 alla funzione $F(z) = e^{f(z)}$ (alla funzione $F(z) = e^{-if(z)}$ rispettivamente). \square

Teorema fondamentale dell'algebra

Corollario 9.45. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado positivo. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $p(z)$ non abbia zeri, e consideriamo la funzione $f(z) = 1/p(z)$, che è quindi olomorfa su tutto \mathbb{C} . Per $|z| \rightarrow \infty$ si ha che $|f(z)| \rightarrow 0$, quindi f è limitata. Per il Teorema 9.43 f è costante, contraddicendo le ipotesi. \square

Teorema di Morera

Teorema 9.46. Sia $D \subset \mathbb{C}$ un disco aperto, e sia $f \in \mathcal{C}(D)$ tale che, per ogni rettangolo $R \subset D$ si abbia

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

Allora f è olomorfa in D .

Dimostrazione. La dimostrazione del Corollario 9.20 può essere ripetuta, fornendo l'esistenza di una primitiva olomorfa F di f . Per il Teorema 9.37 ogni punto di D ha un intorno tale che in esso F si può scrivere come serie di potenze; f è quindi uguale alla serie derivata, ed è pertanto olomorfa. \square

Il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy

10.1 CATENE OMOLOGHE

Siano $\gamma_i : J \rightarrow \mathbb{C}$ curve chiuse regolari a tratti. Una somma formale finita a coefficienti interi $\gamma = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$ è detta *catena*. Si definisce

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

È possibile analogamente definire l'indice di un punto rispetto ad una catena:

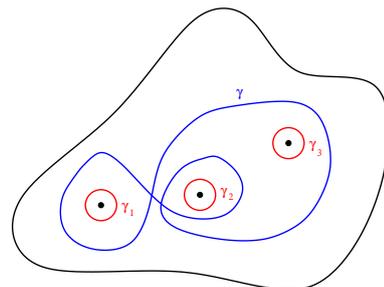
$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \sum_{i=1}^n m_i \text{Ind}_{\gamma_i}(z).$$

Definizione 10.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia γ una catena il cui supporto è contenuto in Ω . La catena γ si dice *omologa a zero in Ω* , e si scrive $\gamma \sim_{\Omega} 0$ se per ogni punto $z \notin \Omega$ si ha $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$. Si dice che due catene γ ed η sono omologhe in Ω se $\gamma - \eta \sim_{\Omega} 0$.

Osservazione 10.2. Si può dimostrare che $\gamma \sim_{\Omega} 0$ se e solo se la classe $[\gamma] \in H_1(\Omega)$ è banale.

Proposizione 10.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia γ una catena tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$. Siano z_1, \dots, z_n punti di Ω , siano D_i , per $i = 1, \dots, n$, dischi centrati in z_i , la cui chiusura è contenuta in Ω e a due a due disgiunti e siano γ_i , per $i = 1, \dots, n$, le circonferenze bordo dei dischi D_i . Siano $m_i = \text{Ind}_{\gamma}(z_i)$, per $i = 1, \dots, n$ e denotiamo con Ω' l'aperto $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Allora $\gamma \sim_{\Omega'} \sum m_i \gamma_i$.

Dimostrazione. Se $z \notin \Omega$, allora $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ perché $\gamma \sim_{\Omega} 0$, e $\text{Ind}_{\gamma_i}(z) = 0$ perché z non è contenuto nei cerchi di bordo γ_i .
 Se invece $z = z_i$ allora $\text{Ind}_{\gamma_j}(z_i) = \delta_{ij}$, mentre $\text{Ind}_{\gamma}(z_i) = m_i$. □



10.2 IL TEOREMA DI CAUCHY - DIMOSTRAZIONE DI DIXON

Lemma 10.4. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}.$$

Allora g è una funzione continua.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$; per la continuità di f' , dato $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $|f'(\xi) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$ se $|\xi - z_0| < \delta$. Assumiamo, a meno di restringerci, che il disco $B_{z_0}(\delta)$ sia contenuto in Ω . Presi z, w in tale disco si ha

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(z_0, z_0) &= \frac{1}{w - z} (f(w) - f(z) - f'(z_0)(w - z)) = \\ &= \frac{1}{w - z} \left(\int_z^w f'(\xi) d\xi - \int_z^w f'(z_0) d\xi \right) \end{aligned}$$

Calcoliamo gli integrali lungo il segmento che congiunge z a w , parametrizzandolo come $\xi(t) = (1 - t)z + tw$ (e quindi $d\xi = (w - z)dt$).

$$\begin{aligned} g(z, w) - g(z_0, z_0) &= \frac{1}{w - z} \int_0^1 (f'(\xi(t)) - f'(z_0))(w - z) dt \\ &= \int_0^1 (f'(\xi(t)) - f'(z_0)) dt \end{aligned}$$

Quindi,

$$|g(z, w) - g(z_0, z_0)| \leq \int_0^1 |f'(\xi(t)) - f'(z_0)| dt < \varepsilon$$

se $(z, w) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$. □

Teorema 10.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, γ una catena tale che $\gamma \sim_\Omega 0$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora

i) Teorema dell'integrale nullo:

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

ii) Formula integrale: per ogni $z \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$ si ha

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Dimostrazione. Definiamo $g : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Tale funzione è continua per il Lemma 10.4; inoltre, per w_0 fissato, $g(z, w_0)$ è una funzione olomorfa.

Sia $\Omega' \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei punti che hanno indice zero rispetto a γ ; Ω' è un'unione di componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$, e quindi è aperto. Inoltre, per ipotesi, $\Omega^c \subset \Omega'$; in particolare $\mathbb{C} = \Omega \cup \Omega'$. Sia $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw & z \in \Omega \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw & z \in \Omega' \end{cases}.$$

Nell'intersezione $\Omega \cap \Omega'$ le due espressioni sono uguali; infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \end{aligned}$$

Per il Lemma 9.27, h è olomorfa in Ω' ; dimostriamo che è olomorfa anche in Ω . Sia $z \in \Omega$, dia D un disco aperto centrato in z e contenuto in Ω e sia R un rettangolo contenuto in D . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} h(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \left(\int_{\gamma} g(z, w) dw \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial R} g(z, w) dz \right) dw = 0 \end{aligned}$$

per il Teorema di Goursat (9.17). Perciò h è olomorfa in D per il Teorema di Morera (9.46). Quindi h è olomorfa in $\Omega \cup \Omega' = \mathbb{C}$, cioè è una funzione intera.

Per $|z| \gg 0$ si ha $|w - z| \geq |z| - |w|$ e inoltre $z \in \Omega'$; pertanto

$$|h(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \right| \leq \max_{\gamma} \left(\frac{|f(w)|}{|z| - |w|} \right) \ell(\gamma), \quad (10.6)$$

e quindi h tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$, ed è perciò limitata, e dunque costante per il Teorema 9.43. Ancora dalla (10.6) si deduce ora che $h \equiv 0$.

Sia $z \in \Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$. Da

$$0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z)$$

si deduce la (ii). Sia ora z_0 un punto di $\Omega \setminus \text{supp}(\gamma)$, e sia $F(z) = f(z)(z - z_0)$. Applicando la (ii) a F otteniamo

$$0 = F(z_0) \text{Ind}_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(w - z_0)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) dw,$$

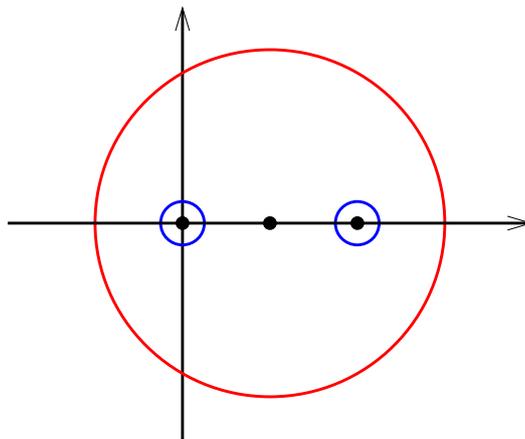
e il teorema è dimostrato. □

Esercizio 10.7. Si calcoli

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z - 1)z^2} dz,$$

ove $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ è la curva di equazione $\gamma(\vartheta) = 1/2 + e^{i\vartheta}$.

Osserviamo che la funzione integranda è olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, e che la curva γ è omologa in Ω alla catena $\gamma_1 + \gamma_2$, con γ_1 e γ_2 circonferenze di raggio $r < 1/2$ centrate in 0 e 1, rispettivamente.



Definiamo le seguenti funzioni:

$$g(w) = \frac{\cos(\pi w)}{(w-1)}, \quad h(w) = \frac{\cos(\pi w)}{w^2}.$$

Possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)z^2} dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-1} dz;$$

utilizzando la formula delle derivate e la formula integrale, scriviamo

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2} dz = 2\pi i g'(0) \quad \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-1} dz = 2\pi i h(1)$$

Calcolando $h(1) = -1$,

$$g'(z) = \frac{-\pi \sin(\pi z)(z-1) - \cos(\pi z)}{(z-1)^2},$$

e quindi $g'(0) = -1$ troviamo che

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)z^2} dz = 2\pi i(-1-1) = -4\pi i.$$

 Altre applicazioni della formula integrale

11.1 SUCCESSIONI DI FUNZIONI OLOMORFE

Teorema 11.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se la successione converge puntualmente a f e uniformemente sui compatti di Ω allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$, e sia $\overline{B_{z_0}(R)}$ un disco chiuso centrato in z_0 e contenuto in Ω , di bordo γ_R . Sia ora $z \in B_{z_0}(R/2)$. Per la formula integrale di Cauchy, abbiamo che

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(w)}{w-z} dw.$$

Poiché la successione f_n converge uniformemente sui compatti e avendo scelto z tale che $|w-z| \geq R/2$ la successione delle funzioni integrande converge uniformemente su γ_R per ogni z fissato in $B_{z_0}(R/2)$ e possiamo passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Dalla formula integrale di Cauchy segue il Teorema di Weierstrass, che asserisce che f è scrivibile come serie di potenze con centro z_0 , e quindi f è olomorfa in tale punto. \square

Esempio 11.2. Consideriamo la serie di funzioni $\sum \frac{1}{n^z}$ e mostriamo che, per $\Re(z) > 1$ definisce una funzione olomorfa. Ogni termine

$$f_n(z) = \frac{1}{n^z} = e^{-z \log n}$$

è una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} ; poiché

$$|f_n(z)| = |e^{-z \log n}| = |e^{-x \log n} e^{iy \log n}| = |e^{-x \log n}| = n^{-x},$$

per ogni $c > 1$, se $x \geq c$ abbiamo $|f_n(z)| \leq n^{-c}$ e la serie

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^c}$$

converge. Perciò, per il Test di Weierstrass (8.16) la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ converge assolutamente e uniformemente e definisce quindi una funzione olomorfa.

11.2 SERIE DI LAURENT

Definizione 11.3. Una *serie di Laurent* (o serie bilatera di potenze) è una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$; diciamo che la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente (uniformemente) in Ω se le due serie

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m} \left(\frac{1}{z^m} \right) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

convergono assolutamente (uniformemente) in Ω .

Teorema 11.4. Sia A la corona circolare: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$ e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, con Ω aperto che contiene A ; allora in A la funzione f si può scrivere come una serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

che converge assolutamente e uniformemente in $r < s \leq |z - z_0| \leq S < R$. I coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw & n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw & n < 0 \end{cases},$$

ove γ_R e γ_r sono rispettivamente le circonferenze di raggio R ed r centrate in z_0 .

Dimostrazione. Il bordo $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r$ di A è omologo a zero in Ω . Applicando la formula integrale di Cauchy 10.5 ii) a un punto z nell'interno di A otteniamo

$$f(z) = f(z)(\text{Ind}_{\gamma_R}(z) - \text{Ind}_{\gamma_r}(z)) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw \right)$$

Il primo integrale è trattato come nella dimostrazione del Teorema 9.37, e fornisce la parte positiva della serie di Laurent. Il secondo è trattato in maniera simile:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw &= - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0) - (z-z_0)} dw = \\
 &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-z_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw =
 \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $|w-z_0| = r$, mentre $|z-z_0| > r$, perciò $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$ e quindi l'ultima espressione può essere riscritta come

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^m dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n+1} dw$$

Poiché la serie converge uniformemente e f è limitata su γ_r possiamo integrare termine a termine

$$- \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{\gamma_r} \left\{ \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right\} (z-z_0)^n dw$$

e il teorema è dimostrato. □

11.3 SINGOLARITÀ ISOLATE DI FUNZIONI OLOGOMORFE

Definizione 11.5. Sia D un disco aperto centrato in z_0 , e sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus z_0)$. Una tale f si dice avere una *singolarità isolata* nel punto z_0 .

Abbiamo già incontrato le singolarità eliminabili, come le singolarità isolate con la proprietà che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0) = 0$; è immediato vedere che f ha una singolarità eliminabile in z_0 se e solo se tutti i termini negativi del suo sviluppo di Laurent sono nulli. Il prossimo risultato fornisce una condizione sufficiente affinché una singolarità isolata sia di questo tipo.

Proposizione 11.6. Sia Ω un aperto che contiene z_0 , e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus z_0)$; se esistono un disco chiuso \bar{D} centrato in z_0 e $K > 0$ tale che $|f(z)| < K$ in $\bar{D} \setminus z_0$, allora f ha una singolarità eliminabile in z_0 .

Dimostrazione. Consideriamo lo sviluppo di Laurent di f in una corona circolare centrata in z_0 e contenuta in \bar{D} ; sia γ_r la circonferenza più piccola che definisce la corona circolare. I coefficienti della parte negativa dello sviluppo sono dati da

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-m+1}} dw,$$

e quindi si ha

$$|a_{-m}| \leq \frac{K}{2\pi} r^{m-1} \ell(\gamma_r) = Kr^m,$$

e tale diguguaglianza sussiste per ogni $r > 0$, pertanto tutti i termini della parte negativa dello sviluppo di Laurent di f sono nulli. \square

Poli

Definizione 11.7. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $\sum a_n(z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di f in un intorno di z_0 ; diremo che z_0 è uno zero di ordine m per f , o che l'ordine di f in z_0 è m se equivalentemente

- $a_m \neq 0$ e $a_n = 0$ se $n < m$;
- $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$ esiste finito e non nullo.

Definizione 11.8. Sia z_0 una singolarità isolata per una funzione f olomorfa in un intorno di z_0 . Diremo che f ha un *polo* di ordine $m > 0$ in z_0 , o che l'ordine di f in z_0 è $-m$ se equivalentemente

- $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ se $n > m$;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m$ esiste finito e non nullo.

Un polo di ordine uno è detto *polo semplice*.

Esempio 11.9. La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(\cos z - 1)^2}$$

ha un polo di ordine tre nell'origine.

Osservazione 11.10. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$; allora f ha uno zero di ordine m in $z_0 \in \Omega$ se e solo se la funzione $1/f(z)$ ha un polo di ordine m in z_0 .

Definizione 11.11. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $S \subset \Omega$ sottoinsieme discreto di Ω e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$, con poli nei punti di S ; una tale funzione è detta *meromorfa* in Ω , e si scrive $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Esempio 11.12. Siano $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ due polinomi; allora $f(z) = q(z)/p(z)$ è una funzione meromorfa su \mathbb{C} .

Esempio 11.13. Una funzione meromorfa può essere anche definita da una serie che converge uniformemente; per esempio consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

Tale funzione è meromorfa su \mathbb{C} , ha poli semplici negli interi ed è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Mostriamo che f è meromorfa con poli semplici negli interi in ogni disco centrato nell'origine. Sia $R > 0$ e sia $N > 2R$; scriviamo $f(z) = g(z) + h(z)$ con

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{z}{z^2 - n^2} \quad h(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}$$

La funzione g si scrive come quoziente di polinomi, ed è perciò meromorfa su \mathbb{C} , con poli semplici negli interi n tali che $|n| < N$.

Mostriamo ora che la funzione $h(z)$ è olomorfa nel disco centrato dell'origine di raggio R utilizzando il Teorema 11.1. Per $|z| < R$ e $n > N$ abbiamo

$$\left| \frac{z}{z^2 - n^2} \right| < \frac{R}{n^2 - R^2} = \frac{R}{n^2(1 - (R/n)^2)} < \frac{4R}{3n^2};$$

per il Test di Weierstrass (8.16) la serie che definisce h converge uniformemente in $|z| < R$, e quindi h è olomorfa in tale disco per il Teorema 11.1.

Singolarità essenziali

Definizione 11.14. Sia z_0 una singolarità isolata per una funzione f olomorfa in un intorno di z_0 , e sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ la sua serie di Laurent in una corona circolare centrata in z_0 . Il punto z_0 è detto *singolarità essenziale* se $a_n \neq 0$ per infiniti $n < 0$.

Esempio 11.15. La funzione

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

ha una singolarità essenziale nell'origine.

Il prossimo risultato descrive il comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità essenziale.

Teorema 11.16 (Casorati -Weierstrass). *Sia z_0 una singolarità essenziale per f , e sia D un disco centrato in z_0 tale che $f \in \mathcal{O}(D \setminus z_0)$. Allora $f(D \setminus z_0)$ è denso in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $\delta > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $|f(z) - \alpha| \geq \delta$ per ogni $z \in D \setminus z_0$. Consideriamo la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha};$$

tale funzione è olomorfa e limitata in $D \setminus z_0$, quindi, per la Proposizione 11.6 la funzione g ha una singolarità eliminabile in z_0 , quindi può essere estesa ad una funzione olomorfa su D .

Sia $m \geq 0$ il primo coefficiente non nullo dello sviluppo di g in serie di potenze in un intorno di z_0 . Se $m = 0$ allora la funzione $1/g(z)$ è olomorfa, mentre, se $m > 0$ la funzione $1/g(z)$ ha un polo di ordine m . Pertanto $f(z) - \alpha$, e quindi f , ha al più un polo in z_0 , contraddicendo le ipotesi. \square

Corollario 11.17. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e biunivoca, con inversa olomorfa; allora $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. A meno di una traslazione possiamo assumere che $f(0) = 0$. Sia $h(w) = f(1/w)$ per $w \neq 0$. Mostriamo che h non può avere una singolarità essenziale nell'origine.

Dalle ipotesi segue che f è un'applicazione aperta. Dato $\delta > 0$ l'immagine via f del disco $B_0(1/\delta)$ è un intorno aperto dell'origine, quindi esiste $c > 0$ tale che $f(B_0(1/\delta)) \supseteq B_0(c)$. Pertanto, se $|z| > 1/\delta$ allora $|f(z)| > c$. Perciò $|h(w)| > c$ se $|w| < \delta$, e quindi l'origine non può essere una singolarità essenziale per h per il Teorema 11.16.

Sia $f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n z^n$; allora $h(w) = \sum_0^{+\infty} a_n (1/w)^n$; poichè l'origine non è una singolarità essenziale per h esiste m tale che $a_n = 0$ per $n > m$, e quindi $f(z)$ è un polinomio. Se f avesse due radici distinte non potrebbe essere biunivoca, quindi $f(z)$ è del tipo $f(z) = az^n$, ma per $n > 1$ tale funzione non è iniettiva, quindi concludiamo che $f(z) = az$. \square

Comportamento all'infinito

Definizione 11.18. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto che contiene il complementare di un sottoinsieme limitato di \mathbb{C} - diremo che un tale aperto è un *intorno di ∞* - e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione; diciamo che f ha una singolarità isolata (risp. è olomorfa) in ∞ se la funzione $g(w) = f(1/w)$ ha una singolarità isolata (risp. è olomorfa) in 0; diciamo che f ha un polo o una singolarità essenziale in ∞ se g ha un polo o una singolarità essenziale in 0. Se g ha una singolarità eliminabile in 0 diremo che f è olomorfa in ∞ .

12.1 TEOREMA DEI RESIDUI

Sia Ω un aperto di \mathbb{C} , z_0 un suo punto, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus z_0)$ e

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

la sue serie di Laurent centrata in z_0 .

Definizione 12.1. Il residuo di f in z_0 è il coefficiente a_{-1} della serie di Laurent di f centrata in z_0 :

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) := a_{-1}.$$

Lemma 12.2. Sia Ω un aperto di \mathbb{C} , z_0 un suo punto, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus z_0)$, e γ una circonferenza centrata in z_0 tale che $\operatorname{supp}(\gamma) \subset \Omega$. Allora

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Poiché la serie di Laurent di f converge uniformemente sulla circonferenza γ è possibile integrarla termine a termine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$$

Concludiamo quindi ricordando che (Cf. l'Esempio 9.16)

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad \square$$

Definizione 12.3. Sia Ω un intorno di ∞ , sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e sia $g(w) = f(1/w)$. Si definisce

$$\operatorname{Res}_{\infty}(f) = \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right).$$

Osservazione 12.4. Dalla definizione notiamo che il residuo all'infinito di f può essere non nullo anche se f è olomorfa in ∞ . Si veda anche il Corollario 12.10.

Lemma 12.5. Sia Ω un intorno di ∞ , sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e sia γ una circonferenza centrata nell'origine il cui supporto sia contenuto in Ω . Allora

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz;$$

Dimostrazione. Con la sostituzione $w = 1/z$ si ha

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}} -\frac{g(w)}{w^2} dw = \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right) = \operatorname{Res}_\infty(f),$$

ove $\bar{\gamma}$ è l'immagine di γ per l'inversione $w = 1/z$, ed è quindi percorsa in senso orario, e la seconda uguaglianza è vera perché l'unica eventuale singolarità di $g(w)/w^2$ all'interno di $\bar{\gamma}$ è l'origine per le ipotesi fatte su f . \square

Teorema 12.6 (Dei Residui). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ e sia γ una catena in Ω , tale che $z_i \notin \operatorname{supp}(\gamma)$ e $\gamma \sim_\Omega 0$. Allora

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}_{z_i}(f).$$

Dimostrazione. Siano γ_i circonferenze bordo di dischi D_i centrati in z_i , la cui chiusura è contenuta in Ω e a due a due disgiunti e sia $m_i = \operatorname{Ind}_\gamma(z_i)$. Per la Proposizione 10.3 abbiamo che $\gamma \sim_\Omega \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$, quindi per il Teorema di Cauchy e il Lemma 12.2 abbiamo che

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Ind}_\gamma(z_i) \operatorname{Res}_{z_i}(f). \quad \square$$

Dal Lemma 12.5 e dal Teorema dei Residui si deduce immediatamente che

Corollario 12.7. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\})$ e sia γ una circonferenza centrata nell'origine che racchiude tutti i punti singolari di f ; allora

$$\operatorname{Res}_\infty(f) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j}(f) = 0.$$

12.2 CALCOLO DEI RESIDUI

In questa sezione vedremo alcune tecniche per il calcolo dei residui.

Lemma 12.8. Se f ha un polo semplice in z_0 e g è olomorfa in z_0 allora

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0}(f).$$

Dimostrazione. Scrivendo f e g in serie come

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

troviamo che la serie del prodotto delle due funzioni è del tipo

$$f(z)g(z) = \frac{a_{-1}b_0}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

per concludere basta osservare che $g(z_0) = b_0$. □

Esempio 12.9. Calcolare il residuo in $z = 1$ di

$$h(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

Siano

$$f(z) = \frac{1}{z - 1} \quad g(z) = \frac{z^2}{z + 1};$$

f ha un polo semplice in $z = 1$, mentre g è olomorfa in tale punto. Il residuo di f in 1 è evidentemente 1, pertanto, per il Lemma 12.8

$$\operatorname{Res}_1(h) = \operatorname{Res}_1(fg) = g(1) \operatorname{Res}_1(f) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Corollario 12.10. Se f ha uno zero semplice all'infinito allora il residuo all'infinito è uguale a

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -zf(z).$$

Dimostrazione. Sia $g(w) = f(1/w)$. Per ipotesi il limite $\lim_{w \rightarrow 0} g(w)/w$ esiste finito e non nullo (Cf. Definizione 11.7), quindi $g(w)/w^2$ ha un polo semplice nell'origine. Per il Lemma 12.8, (applicato all'estensione olomorfa di $g(w)/w$) abbiamo

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{g(w)}{w^2} \right) = \operatorname{Res}_0 \left(-\frac{1}{w} \right) \lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = - \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z). \quad \square$$

Lemma 12.11. Se f è olomorfa in z_0 e ha ivi uno zero semplice ($f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) \neq 0$) allora $1/f$ ha un polo semplice in z_0 e

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione. Le ipotesi su f si traducono nel fatto che nella sua serie di potenze centrata in z_0 si ha $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Possiamo quindi scrivere

$$f(z) = a_1(z - z_0) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n = a_1(z - z_0)(1 + h(z)),$$

con $h(z)$ olomorfa in z_0 e tale che $h(z_0) = 0$. Posto $g(z) = 1/(1 + h(z))$ si ha che g è olomorfa in z_0 e $g(z_0) = 1$. Scriviamo ora

$$\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{g(z)}{a_1(z - z_0)}$$

e applichiamo il Lemma 12.8, ottenendo

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{a_1};$$

per concludere basta osservare che $f'(z_0) = a_1$. □

Esempio 12.12. Calcolare il residuo in $z = \pi$ di

$$h(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

La funzione $f(z) = \sin z$ è olomorfa in π e ha ivi uno zero semplice in quanto $f'(\pi) = \cos(\pi) \neq 0$, quindi

$$\operatorname{Res}_{\pi} \left(\frac{1}{\sin z}\right) = \frac{1}{\cos(\pi)} = -1.$$

Lemma 12.13. Se f ha un polo di ordine m in z_0

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}).$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere lo sviluppo di Laurent di f come

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n;$$

quindi avremo che

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n+m}$$

e quindi

$$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z - z_0) + \dots$$

□

Esempio 12.14. Calcolare il residuo in $z = 1$ di

$$h(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}.$$

La funzione h ha un polo doppio in 1; usiamo il Lemma 12.13, ottenendo che

$$\text{Res}_1(h) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 h(z)]^{(1)} = \left(\frac{z^2}{z+1} \right)' (1);$$

Calcolando la derivata

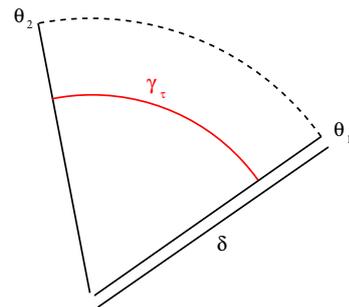
$$\left(\frac{z^2}{z+1} \right)' = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2},$$

troviamo che il residuo cercato è $3/4$.

Lemma 12.15 (di Jordan). *Sia Ω un aperto, e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus z_0)$; sia $\delta > 0$ tale che $\overline{B_{z_0}(\delta)} \subset \Omega$, sia $S = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta \text{ e } \vartheta_1 \leq \arg(z - z_0) \leq \vartheta_2\}$ e si supponga che esista finito $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = b$.*

Allora, se $\tau \leq \delta$, denotato con γ_τ l'arco di raggio τ come in figura, si ha

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\gamma_\tau} f(z) dz = ib(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$



Dimostrazione. Possiamo supporre che $z_0 = 0$. La serie di Laurent di $zf(z)$ è del tipo $b + \sum_1^{+\infty} a_n z^n$, cioè

$$f(z) = \frac{b}{z} + \eta(z)$$

dove $\eta(z)$ è una funzione olomorfa. Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\gamma_\tau} f(z) dz = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{b}{\tau e^{i\vartheta}} i\tau e^{i\vartheta} d\vartheta + \int_{\gamma_\tau} \eta(z) dz;$$

il primo dei due integrali vale $ib(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. Mostriamo che il secondo tende a zero per $\tau \rightarrow 0$. Sia $M = \max_{B_\delta(0)} |\eta(z)|$.

$$\left| \int_{\gamma_\tau} \eta(z) dz \right| \leq \max_{\gamma_\tau} |\eta(z)| \ell(\gamma_\tau) \leq M(\vartheta_2 - \vartheta_1)\tau,$$

da cui la tesi. □

12.3 APPLICAZIONI AL CALCOLO DI INTEGRALI INDEFINITI

Applicazione 12.16. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione restrizione di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, che sia olomorfa in $\{\Im m(z) \geq 0\}$, salvo al più per un numero finito di poli z_1, \dots, z_n contenuti in $\{\Im m(z) > 0\}$. Supponiamo inoltre che esistano K e $a > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+a}} \quad \text{se } |z| \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f).$$

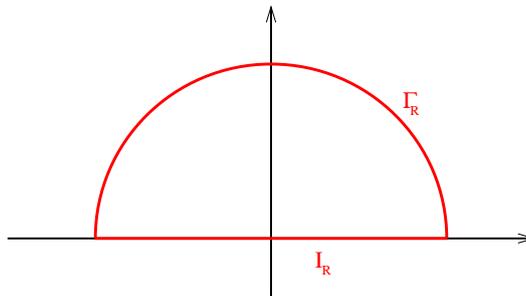
Osserviamo che, per le ipotesi fatte su f , esistono finiti i limiti

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_b^R f(x) dx,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Consideriamo l'intervallo $I_R = [-R, R] \subset \mathbb{R}$ e la semicirconferenza Γ_R di raggio R centrata nell'origine e giacente nel semipiano superiore, come in figura. Consideriamo la curva chiusa regolare a tratti Γ ottenuta percorrendo I_R nel verso delle ascisse crescenti e poi Γ_R in senso antiorario, per $R \gg 0$ tale che tutti i poli di f giacciono nell'interno di Γ .



e utilizziamo il teorema dei residui, ottenendo

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f) &= \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{I_R} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

Per concludere è ora sufficiente mostrare che $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$, e ciò segue dal fatto che

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{K}{R^{1+a}} \ell(\Gamma_R) = \frac{\pi K}{R^a}.$$

Esercizio 12.17. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Le radici quarte di -1 sono i numeri complessi $\omega_j = e^{\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{2}}$, per $j = 0, \dots, 3$. Pertanto la funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ è olomorfa sull'asse reale, e nel semipiano superiore ha due poli, $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $\omega_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Inoltre

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^4} \quad \text{se } |z| \rightarrow +\infty,$$

quindi, come nell'applicazione 12.16 otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i (\text{Res}_{\omega_0}(f) + \text{Res}_{\omega_1}(f)).$$

Calcoliamo il residuo di f in ω_0 ; per il Lemma 12.11 applicato a $z^4 + 1$ abbiamo che

$$\text{Res}_{\omega_0}(f) = \frac{1}{4\omega_0^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}};$$

analogamente, per ω_1 troviamo che

$$\text{Res}_{\omega_1}(f) = \frac{1}{4\omega_1^3} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Quindi il valore dell'integrale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

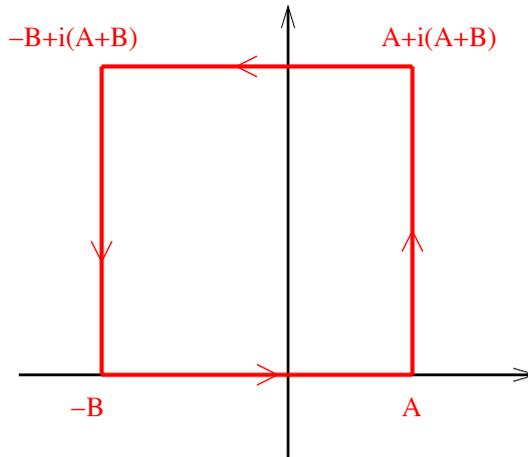
Applicazione 12.18. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione restrizione di una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, che sia olomorfa in $\{\Im m(z) \geq 0\}$, salvo al più per un numero finito di poli z_1, \dots, z_n contenuti in $\{\Im m(z) > 0\}$. Supponiamo inoltre che esista K e tale che

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|} \quad \text{se } |z| \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f(z)e^{iz}).$$

Consideriamo il circuito quadrato come in figura, con A, B abbastanza grandi in modo che il quadrato contenga tutti i poli di f che giacciono nel semipiano superiore:



Poniamo $T = A + B$; sul lato superiore L^+ , parametrizzato come $z = -x + iT$, con $x \in [-A, B]$ abbiamo

$$\left| \int_{L^+} e^{iz} f(z) dz \right| = \left| \int_{-A}^B -e^{-ix-T} f(-x + iT) dx \right| \leq e^{-T} \frac{K}{T} \ell(L^+) = K e^{-T},$$

quindi l'integrale sul lato superiore tende a zero per $T \rightarrow +\infty$.

Sul lato destro L_d , parametrizzato come $z = A + iy$, con $y \in [0, T]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{L^d} e^{iz} f(z) dz \right| &= \left| i \int_0^T e^{-y+iA} f(A + iy) dy \right| \leq \int_0^T |e^{-y+iA}| |f(A + iy)| dy \\ &\leq \frac{K}{A} \int_0^T e^{-y} dy = \frac{K}{A} (1 - e^{-T}). \end{aligned}$$

Sul lato sinistro vale una stima analoga (con B a denominatore), quindi anche gli integrali sui lati verticali tendono a zero per $A, B \rightarrow +\infty$. Pertanto

$$2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f(z)e^{iz}) = \int_Q f(z)e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx.$$

Osservando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx,$$

ci rendiamo conto dell'utilità di quanto appena visto per il calcolo di integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx \quad \text{oppure} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx$$

Esercizio 12.19. Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

Sia $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$; tale f soddisfa le ipotesi di 12.18, pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f(z)e^{iz});$$

Sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = I_1 + iI_2.$$

Osserviamo che I_1 è nullo perché l'integranda è dispari, e che $I_2 = 2I$ perché l'integranda è pari. Inoltre l'unico polo presente nel semipiano superiore è nel punto $z_1 = i$. Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \pi \text{Res}_{z_1}(f(z)e^{iz}).$$

Scrivendo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i} \frac{1}{z-i}$$

e utilizzando il Lemma 12.8 otteniamo

$$\text{Res}_{z_1}(f(z)e^{iz}) = \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2},$$

e finalmente

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Osservazione 12.20. Nella situazione dell'Applicazione 12.18, se la funzione f ha poli semplici sull'asse reale, che coincidono con zeri di $\sin x$ o $\cos x$ può essere ancora possibile calcolare l'integrale, usando il Lemma di Jordan. Ne vediamo ora un esempio.

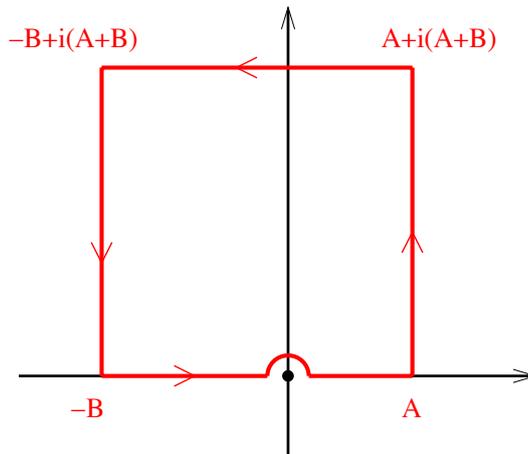
Esercizio 12.21. Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Sia $f(z) = \frac{1}{z}$; tale f soddisfa le ipotesi dell'Osservazione 12.20; inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + iI_2.$$

Osservando che I_1 è nullo perché l'integranda è dispari, e utilizzando il circuito dell'Applicazione 12.18, modificato come in figura,



otteniamo che

$$i \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + i \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0,$$

γ_ε è la semicirconferenza centrata in 0 di raggio ε e la somma degli integrali è nulla perché e^{iz}/z è olomorfa all'interno del circuito. Calcoliamo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, utilizzando il Lemma di Jordan, osservando che $b = 1$, $\vartheta_1 = \pi, \vartheta_2 = 0$, e ottenendo così:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Applicazione 12.22. Sia $Q(x, y) = \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$ una funzione razionale tale che $h(x, y)$ non si annulla nei punti della circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$, e sia

$$f(z) = \frac{Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz}.$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}_{z_i}(f),$$

ove gli z_i sono i poli di f all'interno della circonferenza unitaria. Infatti, osservando che

$$f(e^{i\vartheta}) = \frac{Q(\cos \vartheta, \sin \vartheta)}{ie^{i\vartheta}}$$

segue immediatamente che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} Q(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta.$$

Esercizio 12.23. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{3 - \cos \vartheta}.$$

La funzione integranda è del tipo sopra descritto, con $Q(x, y) = \frac{1}{3-x}$; consideriamo perciò la funzione

$$f(z) = \frac{1}{3 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz} = \frac{2z}{6z - z^2 - 1} \frac{1}{iz} = \frac{2i}{z^2 - 6z + 1}.$$

Il denominatore di f si annulla in $z_{1,2} = 3 \mp 2\sqrt{2}$; solo il punto $z_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ giace all'interno della circonferenza di raggio unitario, ed è un polo semplice per f . Per calcolare il residuo in tale punto, utilizzando il Lemma 12.11 calcoliamo la derivata di $g = 1/f$ e valutiamola in tale punto.

$$g'(z) = \frac{2z - 6}{2i} \quad g'(z_1) = \frac{-4\sqrt{2}}{2i} = -\frac{2\sqrt{2}}{i}.$$

Avremo perciò

$$\text{Res}_{z_1}(f) = \frac{1}{g'(z_1)} = -\frac{i}{2\sqrt{2}},$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{3 - \cos \vartheta} d\vartheta = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

12.4 APPLICAZIONI AL CALCOLO DI SOMME DI SERIE

Vogliamo ora mostrare come sia possibile utilizzare il Teorema dei Residui per calcolare la somma di serie numeriche del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$$

L'idea è la seguente: supponiamo che f sia una funzione olomorfa su \mathbb{C} , salvo per singolarità isolate, e tale che $f(n) = a_n$ per ogni intero n ; sia t la funzione

$$t(z) := \frac{\pi}{\tan(\pi z)};$$

tale funzione è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, con poli semplici negli interi, e i suoi residui nei punti di \mathbb{Z} valgono 1 (verificare!). Allora la somma dei residui di $f(z)t(z)$ negli interi è esattamente la somma della serie; con ulteriori ipotesi su f è possibile utilizzare il Teorema dei Residui per calcolare tale somma.

Teorema 12.24. *Sia $r(z)$ una funzione razionale senza poli nei numeri interi tale che*

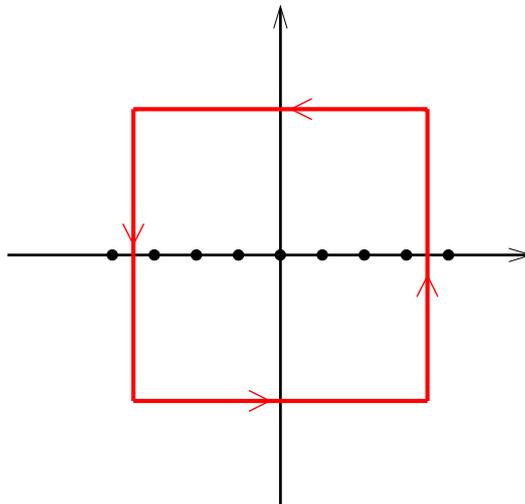
$$|r(z)| \leq \frac{K}{|z|^{1+a}} \quad \text{se } |z| \rightarrow +\infty.$$

per qualche $K, a > 0$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(n) = - \sum \text{Res}(r(z)t(z))$$

dove la somma a secondo membro è fatta sui poli di r .

Dimostrazione. Per ogni intero $m > 1$ si consideri il circuito quadrato Γ_m , centrato nell'origine e di lato $2m + 1$.



Sia $m \gg 0$ tale che tutti i poli di r siano contenuti in Γ_m . Osserviamo che, per n intero, poiché r è olomorfa e t ha un polo semplice con residuo $+1$, per il Lemma 12.8 si ha $\text{Res}_n(r(z)t(z)) = r(n)$. Allora, per il Teorema dei Residui si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} r(z)t(z)dz = \sum_{n=-m}^m r(n) + \sum \text{Res}(r(z)t(z)),$$

dove l'ultima somma è sui poli di r . Per mostrare la tesi è quindi sufficiente mostrare che $\int_{\Gamma_m} r(z)t(z) \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$. Con semplici passaggi algebrici possiamo scrivere

$$t(z) = i\pi \frac{1 + e^{-2\pi iz}}{1 - e^{-2\pi iz}} = i\pi \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1}.$$

Sul lato verticale γ_m^1 del quadrato $z = m + \frac{1}{2} + iy$, utilizzando la seconda espressione troviamo che

$$|t(z)| = \pi \left| \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \right| = \pi \tanh(\pi y) < \pi.$$

La stessa stima può essere ottenuta sul lato verticale γ_m^3 utilizzando la prima espressione per $t(z)$.

Sul lato orizzontale γ_m^2 del quadrato $z = x + i(m + \frac{1}{2})$, e quindi $|e^{-2\pi iz}| = |e^{-2\pi ix}| |e^{\pi(2m+1)}| = e^{\pi(2m+1)}$, pertanto, su γ_m^2 , utilizzando la prima espressione di $t(z)$ otteniamo

$$|t(z)| \leq \pi \frac{e^{\pi(2m+1)} + 1}{e^{\pi(2m+1)} - 1} = \pi \coth(\pi m + \pi/2) < \pi \coth\left(\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$$

Analoga stima si ottiene sul lato γ_m^4 . Possiamo quindi concludere che

$$\int_{\Gamma_m} r(z)t(z)dz \leq 2\pi \frac{4K(2m+1)}{m^{a+1}},$$

e il secondo membro tende a zero per $m \rightarrow +\infty$. □

Esercizio 12.25. Sia a reale positivo. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Sia $r(z) = 1/(z^2 + a^2)$; i poli di r sono nei punti $\mp ia$; utilizzando il Lemma 12.8 si calcolano

$$\text{Res}_{ia}(r(z)t(z)) = \text{Res}_{-ia}(r(z)t(z)) = -\frac{\pi}{2a}(\coth \pi a).$$

Poiché $r(-n) = r(n)$ per la 12.24 abbiamo che

$$\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} (\coth \pi a),$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} (\coth \pi a) - \frac{1}{2a^2}.$$

Esercizio 12.26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La funzione $r(z) = 1/z^2$ non soddisfa le ipotesi di 12.24, perché ha un polo doppio nell'origine. Possiamo comunque considerare il circuito Γ_m , come nella dimostrazione di 12.24, e l'integrale su di esso di $r(z)t(z)$ va ancora a zero per $m \rightarrow \infty$. Per il Teorema dei Residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} r(z)t(z) = 2 \sum_{n=1}^m r(n) + \text{Res}_0(r(z)t(z)).$$

Dobbiamo quindi calcolare $\text{Res}_0(r(z)t(z))$; la funzione $r(z)t(z)$ ha un polo di ordine tre nell'origine. utilizziamo il Lemma 12.13 per calcolarne il residuo

$$\text{Res}_0(r(z)t(z)) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} \right]^{(2)}.$$

Calcolando la derivata seconda

$$\left[\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} \right]^{(2)} = 2\pi^2 \frac{\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)} = 2\pi^2 \frac{\pi z - \frac{(\pi z)^3}{2} - \pi z + \frac{(\pi z)^3}{6} + o(z^3)}{(\pi z)^3 + o(z^3)},$$

troviamo che

$$\text{Res}_0(r(z)t(z)) = -\frac{\pi^2}{3},$$

e quindi possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zeri di funzioni olomorfe (e meromorfe)

13.1 PRINCIPIO D'IDENTITÀ

Teorema 13.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identicamente nulla e $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f . Allora $Z(f)$ non ha punti di accumulazione in Ω .*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in Z(f)$ uno zero di ordine m e sia $\delta > 0$ tale che $B_{z_0}(\delta) \subset \Omega$; in $B_{z_0}(\delta)$ possiamo sviluppare f come serie di potenze centrata in z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n;$$

La funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & z \neq z_0 \\ a_m & z = z_0 \end{cases}$$

è olomorfa in Ω , e non è nulla in $z = z_0$; pertanto non è nulla in un intorno di z_0 , e quindi z_0 è uno zero isolato di f . In particolare ciò mostra che, se z_0 è uno zero non isolato per f , allora f dev'essere identicamente nulla in un intorno di z_0 .

Sia $A \subset \Omega$ l'insieme dei punti di accumulazione di $Z(f)$ in Ω ; per la continuità di f , chiaramente si ha $A \subset Z(f)$. Un punto di A è uno zero non isolato di f , quindi, se $z_0 \in A$, allora f è identicamente nulla in un intorno di z_0 . In particolare A è un insieme aperto.

Essendo un insieme di punti di accumulazione è immediato verificare che A è anche chiuso; pertanto se A fosse non vuoto, coinciderebbe con Ω e f sarebbe identicamente nulla, contro le ipotesi fatte. \square

Corollario 13.2 (Principio d'identità). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, e siano $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se esiste $S \subset \Omega$ tale che $f|_S = g|_S$ e S ha un punto di accumulazione in Ω , allora $f \equiv g$ in Ω .*

Corollario 13.3. *Se Ω è connesso e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $1/f \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Definizione 13.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; sia z_0 in Ω , e sia $\sum a_n (z - z_0)^n$ la serie di Laurent di f centrata in z_0 ; sia a_m il primo coefficiente non nullo di tale serie. Allora si dice che l'ordine di f in z_0 è m .*

13.2 PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO

Teorema 13.5 (Principio dell'argomento). *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e γ una catena in Ω tale che $\gamma \sim_{\Omega} 0$; sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ con un numero finito di zeri e di poli in Ω , nessuno dei quali appartenga a $\text{supp}(\gamma)$. Allora*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{ord}_{z_i}(f),$$

ove la somma è sui poli e gli zeri di f .

Dimostrazione. Siano z_1, \dots, z_n i punti in cui f ha uno zero o un polo. Siano γ_i circonferenze bordo di dischi D_i centrati in z_i , la cui chiusura è contenuta in Ω e a due a due disgiunti, sia $m_i = \text{Ind}_{\gamma}(z_i)$ e $\Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Per la Proposizione 10.3 abbiamo che $\gamma \sim_{\Omega'} \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$, quindi per il Teorema di Cauchy (10.5), essendo $f'/f \in \mathcal{O}(\Omega')$ abbiamo che

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Basta dunque mostrare che

$$\text{ord}_{z_i}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Res}_{z_i} \left(\frac{f'}{f} \right),$$

dove la seconda uguaglianza segue dal Teorema dei Residui.

Scriviamo f in serie di Laurent in un intorno di z_i , e denotiamo con m il suo ordine in tale punto.

$$f(z) = a_m(z - z_i)^m \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{m+n}(z - z_i)^n \right) = a_m(z - z_i)^m (1 + g(z)),$$

con g olomorfa in un intorno di z_i e tale che $g(z_i) = 0$. Osserviamo che, se φ e ψ sono due funzioni, dalla regola di Leibniz segue che

$$\frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi};$$

Scrivendo f come $\varphi\psi$, con $\varphi = a_m(z - z_i)^m$ e $\psi = (1 + g(z))$, otteniamo che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{1 + g(z)}.$$

Poiché il secondo addendo è olomorfo in z_i segue che $\text{Res}_{z_i}(f) = m$. □

Corollario 13.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia γ una circonferenza in Ω , e sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ che non ha zeri o poli sul supporto di γ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_{\infty},$$

ove N_0 e N_{∞} sono rispettivamente il numero di zeri ed il numero di poli di f all'interno di γ , contati con i loro ordini.

13.3 TEOREMA DI ROUCHÉ

Definizione 13.7. Sia γ una curva chiusa semplice (cioè senza autointersezioni); si dice che γ ha un interno se, per ogni $z \notin \text{supp}(\gamma)$ si ha $\text{Ind}_z(\gamma) = 0, 1$. L'interno di γ è costituito dai punti che hanno indice uno rispetto a γ .

Teorema 13.8 (Rouché). Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, siano $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e sia γ una curva chiusa semplice, omologa a zero in Ω e che ha un interno. Se $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ in tutti i punti di γ allora f e g hanno lo stesso numero di zeri nell'interno di γ .

Dimostrazione. Poniamo $F(z) = g(z)/f(z)$; da

$$\left| \frac{f(z) - g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad \text{otteniamo} \quad |F(z) - 1| < 1.$$

Pertanto $F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva contenuta nel cerchio di centro 1 e di raggio 1; in particolare l'origine è contenuta nella regione illimitata di $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(F \circ \gamma)$, e perciò $\text{Ind}_0(F \circ \gamma) = 0$. Quindi

$$0 = \int_{F \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}{F(\gamma(t))} dt = \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz.$$

D'altra parte, per il Corollario 13.6, ricordando che f e g sono olomorfe in Ω , si ha che

$$2\pi i(N_0(g) - N_0(f)) = \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz,$$

da cui la tesi. □

Esempio 13.9. Quanti zeri ha il polinomio $p(z) = z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$ all'interno del cerchio centrato nell'origine di raggio uno?

Sia $f(z) = 71z^4$; sulla circonferenza di raggio uno si ha che $|f(z) - p(z)| \leq 1 + 36 + 1 + 1 + 1 = 40 < 71 = |f(z)|$, quindi, applicando il Teorema, $p(z)$ e $71z^4$ hanno lo stesso numero di zeri (quattro) all'interno del cerchio.

13.4 COMPORTAMENTO LOCALE E APPLICAZIONI

Teorema 13.10. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$, tale che $\text{ord}_{z_0}(f) = m > 0$. Allora, dato $0 < \varepsilon \ll 1$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall w_0 \in B_0(\delta)$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$.

Dimostrazione¹. Scegliamo ε in modo tale che nel disco chiuso centrato in z_0 e di raggio ε non ci siano zeri di f diversi da z_0 e che $B_0(\varepsilon) \subset \Omega$. Sia γ il bordo di tale disco e sia $\delta = \min_{\gamma} |f(z)|$.

Dato $w_0 \in B_0(\delta)$ sia $g(z) = f(z) - w_0$; chiaramente $g \in \mathcal{O}(\Omega)$; inoltre sulla circonferenza γ è verificata la disuguaglianza $|f(z) - g(z)| = |w_0| < \delta \leq |f(z)|$. Quindi per il teorema di Rouché f e g hanno lo stesso numero di zeri all'interno di γ , cioè l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_{z_0}(\varepsilon)$. \square

Corollario 13.11. Sia f olomorfa in un intorno di z_0 , sia $f(z_0) = \alpha$ e $\text{ord}_{z_0}(f(z) - \alpha) = m$. Allora, per ogni $0 < \varepsilon \ll 1$ esiste δ tale che per ogni $w_0 \in B_\alpha(\delta)$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_0(\varepsilon)$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 13.10 alla funzione $f(z) - \alpha$. \square

Corollario 13.12. Sia f olomorfa in un intorno di z_0 , e con un polo di ordine m in z_0 . Allora, per ogni $0 < \varepsilon \ll 1$ esiste δ tale che per ogni $w_0 \notin B_0(1/\delta)$ l'equazione $f(z) = w_0$ ha m soluzioni in $B_0(\varepsilon)$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 13.10 alla funzione $1/f(z)$. \square

Teorema della mappa aperta

Corollario 13.13. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω . Allora f è un'applicazione aperta.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in f(\Omega)$ e sia $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = \alpha$; Scegliamo ε in modo tale che nel disco chiuso centrato in z_0 e di raggio ε non ci siano zeri di $f(z) - \alpha$ diversi da z_0 e che $B_0(\varepsilon) \subset \Omega$. Allora per il Corollario 13.11 esiste δ tale che, se $w \in B_\alpha(\delta)$ allora $w \in f(\Omega)$, cioè α è un punto interno di $f(\Omega)$. \square

Principio del Massimo

Corollario 13.14. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Allora $|f|$ non ha massimo in Ω .

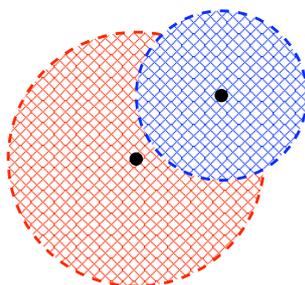
Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$; se esiste un intorno di z_0 in cui f è costante, allora f è costante in Ω per il principio di identità. Altrimenti, detto $w_0 = f(z_0)$, per il Corollario 13.13 esiste un intorno di w_0 contenuto in $f(\Omega)$; in tale intorno chiaramente esistono punti il cui modulo è maggiore di $|w_0|$. \square

¹Suggerita da Luca Tamanini

14.1 PROLUNGAMENTO ANALITICO

Definizione 14.1. Un *elemento analitico* di centro z_0 e raggio r è una coppia (f, U) con U disco aperto di \mathbb{C} centrato in z_0 e $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ è una serie di potenze di centro z_0 convergente in U .

Sia (f_0, U_0) un elemento analitico; si prenda un punto $z_1 \in U_0$ e si consideri lo sviluppo della funzione olomorfa definita da f_0 in z_1 ; si ottiene così un nuovo elemento analitico (f_1, U_1) ; chiaramente si ha $f_0|_{U_0 \cap U_1} = f_1|_{U_0 \cap U_1}$. In $U_0 \cup U_1$ è ben definita una funzione olomorfa $\varphi(z)$ tale che $\varphi|_{U_i} = f_i$.



Il cerchio di convergenza U_1 può sia contenere punti che non stanno in U_0 sia essere contenuto in U_0 . Vediamo due esempi

Esempi 14.2. 1. Sia U_0 il cerchio centrato nell'origine e di raggio uno, e sia $f_0(z) = \sum_0^\infty z^n$; si tratta dello sviluppo in 0 della funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Preso un punto di \mathbb{C} diverso da 1 lo sviluppo di f in tale punto ha un disco di convergenza il cui raggio è pari alla sua distanza dal punto 1. In particolare prendendo il punto $z_1 = i/2$, contenuto in U_0 si ottiene come disco di convergenza U_1 il disco centrato in $i/2$ di raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$, che contiene punti che non stanno in U_0 .

2. Sia U_0 il cerchio centrato nell'origine e di raggio uno, e sia $f_0(z) = \sum_0^\infty z^{n!}$. Ogni elemento dedotto da (f_0, U_0) ha cerchio di convergenza U_1 contenuto in U_0 . Per mostrarlo, si consideri l'insieme

$$E = \{e^{2\pi ip/q} \mid p, q \text{ interi e primi fra loro}\}.$$

Tale insieme è denso nella circonferenza di raggio unitario. Sia $z = \rho e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, con $\rho < 1$; per tale punto si ha

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n e^{2\pi i \frac{p}{q} n} = \sum_{n=0}^{q-1} \rho^n e^{2\pi i \frac{p}{q} n} + \sum_{n=q}^{+\infty} \rho^n.$$

Per $\rho \rightarrow 1$ il secondo termine diverge. Infatti, dati $\varepsilon > 0$ e $m \gg 0$, scelto ρ tale che $\rho^{(m+q)!} > 1 - \varepsilon$ (e quindi tale che per $n \leq m+q$ sia $\rho^n > 1 - \varepsilon$) si ha

$$\sum_q^{+\infty} \rho^n > \sum_q^{m+q} \rho^n > (1 - \varepsilon)m.$$

Sulla circonferenza di raggio unitario esiste quindi un insieme denso E tale che $|f_0(z)| \rightarrow +\infty$ se z tende a un punto di E . Pertanto l'elemento analitico (f_0, U_0) non può essere esteso al di fuori dal cerchio centrato nell'origine di raggio unitario.

Definizione 14.3. Diremo che un elemento analitico (f_1, U_1) è un prolungamento analitico diretto di (f_0, U_0) se $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ e $f_0|_{U_0 \cap U_1} = f_1|_{U_0 \cap U_1}$.

Ripetendo il procedimento un numero finito di volte si costruisce una catena di elementi analitici $(f_0, U_0), (f_1, U_1), \dots, (f_m, U_m)$, ognuno prolungamento analitico diretto del precedente. Più in generale, possiamo dare la seguente

Definizione 14.4. Dati due elementi analitici $(f_0, U_0), \dots, (f_m, U_m)$ diremo che l'elemento (f_m, U_m) si ottiene per *prolungamento analitico* da (f_0, U_0) se esistono elementi analitici $(f_1, U_1), \dots, (f_{m-1}, U_{m-1})$ tali che, per ogni $i = 0, \dots, m-1$ si abbia

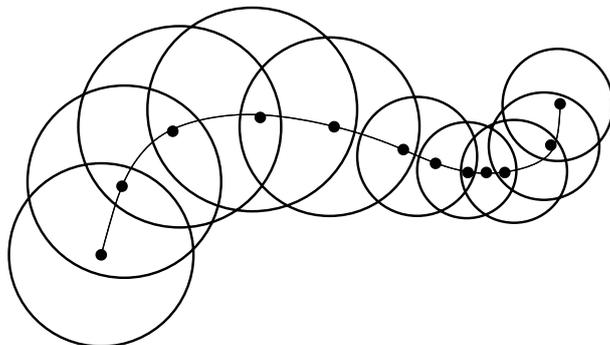
- $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$
- $f_i|_{U_i} \equiv f_{i+1}|_{U_{i+1}}$

Si può mostrare che il prolungamento analitico definisce una relazione di equivalenza tra elementi analitici.

Nel caso $m \geq 2$ non è detto che esista una funzione olomorfa $\varphi(z)$ in $\cup U_i$ tale che $\varphi|_{U_i} = f_i$, come mostra il seguente esempio

Esempio 14.5. Sia U_0 il disco centrato nell'origine di raggio uno e $f_0 = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n}\right) z^n$. Si tratta dello sviluppo nell'origine di una delle possibili funzioni associate a $\sqrt{z+1}$; operando il prolungamento analitico con una catena di elementi analitici che circonda il punto -1 si torna al punto di partenza con l'altra determinazione, $f_m = -\sum_0^\infty \left(\frac{1}{n}\right) z^n$.

Definizione 14.6. Un elemento analitico (f_m, U_m) si dice ottenuto per prolungamento analitico di (f_0, U_0) lungo un cammino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$ se (f_m, U_m) è un prolungamento analitico di (f_0, U_0) ed esistono numeri reali $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$ tali che $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.



Osservazione 14.7. Se l'elemento analitico (f_m, U_m) è prolungamento analitico di (f_0, U_0) esiste sempre un cammino $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$ tale che (f_m, U_m) è ottenuto per prolungamento analitico di (f_0, U_0) lungo il cammino α . Basta infatti considerare la spezzata che unisce i centri degli elementi analitici della catena, opportunamente parametrizzata.

Definizione 14.8. Una *funzione analitica* F è una classe di equivalenza di elementi analitici rispetto alla relazione di prolungamento analitico. L'insieme di definizione di F , indicato con $E(F)$, è l'insieme dei centri di convergenza degli elementi analitici di F . Indicheremo, con abuso di linguaggio, ancora con F l'applicazione $F : E(F) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ che associa ad un punto $z \in E(F)$ l'insieme dei valori in z degli elementi analitici di F .

Lemma 14.9. Sia F una funzione analitica. Allora il suo insieme di definizione $E(F)$ è aperto e connesso.

Dimostrazione. Se $z_0 \in E(F)$, allora esiste (f_0, U_0) elemento analitico di F centrato in z_0 ; per ogni z in U_0 lo sviluppo di f in z definisce un elemento analitico di F di centro z .

L'unione dei dischi di una catena è un insieme connesso, in quanto ogni disco è connesso e ha intersezione non vuota con il successivo. $E(F)$ può essere descritto come l'insieme dei punti di \mathbb{C} che stanno in una catena che parte da (f_0, U_0) ; si tratta perciò di unione di connessi a intersezione non vuota, e quindi di un connesso. \square

Lemma 14.10. Sia F una funzione analitica e $z_0 \in E(F)$; allora $F(z_0)$ è al più numerabile.

Dimostrazione. Segue dal fatto che, per la loro densità, è possibile utilizzare solo dischi di centro complesso razionale e raggio razionale per effettuare il prolungamento analitico. \square

Definizione 14.11. Sia F una funzione analitica. Un cammino $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ di punto iniziale z_0 e punto finale z si dice *critico* per F se per ogni $t < 1$ è possibile prolungare un elemento analitico (f_0, U_0) di F lungo $\gamma|_{[0,t]}$, ma non è possibile prolungare (f_0, U_0) lungo γ . Se esiste un tale cammino con $\gamma(I) \subset \Omega \subseteq E(F)$, allora z si dice critico per F in Ω .

Esempio 14.12. Per la funzione analitica definita da $\sum_0^\infty z^n$ ogni cammino che congiunge 0 a 1 è critico, mentre per la funzione analitica definita da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^{n-1},$$

che, nel cerchio di convergenza, ha come somma

$$\frac{(1+z)^{1/2} - 1}{z}$$

un coppia di punto base 0 in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ contraibile in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ non è critico, mentre un coppia di punto base 0 la cui classe di equivalenza sia un generatore di $\pi(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$ è critico.

Sia F una funzione analitica e Ω un aperto connesso contenuto in $E(F)$ tali che in Ω non ci sono cammini critici per F ; sia $z_0 \in \Omega$ e α un coppia in Ω di punto base z_0 . Definiamo $S_\alpha : F(z_0) \rightarrow F(z_0)$ associando al valore in z_0 di un elemento (f_0, U_0) di centro z_0 il valore di (f_m, U_m) , ottenuto da (f_0, U_0) per prolungamento analitico lungo α .

Proposizione 14.13. La corrispondenza sopra definita induce un omomorfismo di gruppi, detto omomorfismo di monodromia, $M_{z_0} : \pi(\Omega, z_0) \rightarrow \text{Sost}(F(z_0))$.

Teorema 14.14. Sia F una funzione analitica e Ω aperto connesso contenuto in $E(F)$ tali che

1. In Ω non ci sono cammini critici per F ;
2. Esiste $z_0 \in \Omega$ tale che M_{z_0} è l'omomorfismo banale.

Allora, scelto un elemento analitico (f_0, U_0) di F con centro in Ω , esiste una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_{U_0} = f_0$. In questo caso si dice che la funzione F è monodroma in Ω , e che \tilde{f} è una determinazione di F .

Corollario 14.15. Sia F una funzione analitica e Ω aperto connesso e semplicemente connesso contenuto in $E(F)$ tali che in Ω non ci sono cammini critici per F ; allora, scelto un elemento analitico (f_0, U_0) di F di centro $z_0 \in \Omega$, esiste una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\tilde{f}|_{U_0} = f_0$.

Esempio 14.16. Si consideri la funzione analitica $f(z) = (1 - z^2)^{1/2}$ in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Consideriamo il punto 2, e la circonferenza γ di centro nell'origine e raggio 2. Indichiamo con ρ_1 e ϑ_1 modulo e argomento di $z - 1$ e con ρ_2 e ϑ_2 modulo e argomento di $z + 1$ e scriviamo

$$G(z) = e^{\frac{1}{2}(\log(1-z^2))} = e^{\frac{1}{2}(\log(\rho_1\rho_2e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2+\pi)})} = \sqrt{\rho_1\rho_2}e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\pi+2k\pi)}.$$

I valori di G in 2, che corrisponde a $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ sono $\mp i\sqrt{3}$. Consideriamo il primo di essi, $w_1 = -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{\frac{3}{2}\pi i}$, che corrisponde a k dispari. Dopo aver percorso γ in senso antiorario una volta ϑ_1 e ϑ_2 valgono 2π , e quindi G ha lo stesso valore che all'inizio. Lo stesso accade partendo dal valore w_2 .

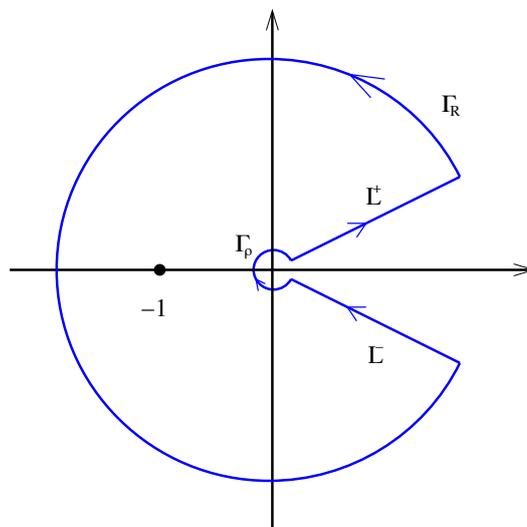
Il gruppo $\pi(\mathbb{C} \setminus [-1, 1], 2)$ è isomorfo a \mathbb{Z} e generato dalla classe di γ , pertanto l'omomorfismo $M_2 : \pi(\mathbb{C} \setminus [-1, 1], 2) \rightarrow \text{Sost}(G(2))$ è banale, quindi G è monodroma in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e dà origine a due distinte funzioni olomorfe: g_1 , che corrisponde a scegliere k dispari e g_2 , che corrisponde a scegliere k pari.

Esercizio 14.17. Calcolare il seguente integrale

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{x^{-a}}{1+x} dx,$$

con $a \in (0, 1)$. Consideriamo il circuito Γ in figura, costituito da due archi di circonferenza Γ_R di raggio $R \gg 0$ e Γ_ρ di raggio $\rho \ll 1$ e dai due segmenti L^+ , L^- che formano con l'asse delle ascisse angoli φ e $2\pi - \varphi$. Scegliamo la determinazione del logaritmo complesso definita in \mathbb{C} meno la semiretta delle ascisse non negative. Quindi

$$\log z = \ln |z| + i \arg(z) \quad \text{con } \arg(z) \in (0, 2\pi).$$



Sia

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{1+z} = \frac{e^{-a \log z}}{1+z} = \frac{e^{-a(\ln|z|+i \arg(z))}}{1+z}.$$

La funzione $f(z)$ è olomorfa nell'interno del circuito, salvo per un polo semplice nel punto -1 ; il residuo di $f(z)$ in tale punto si calcola facilmente utilizzando il Lemma 12.8 ed è pari a $e^{-i\pi a}$. Per il Teorema dei Residui abbiamo dunque

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i e^{-i\pi a}. \quad (14.18)$$

Parametrizzando il segmento L^+ come $z = xe^{i\varphi}$, con $x \in [\rho, R]$ e il segmento $-L^-$ come $z = xe^{i(2\pi-\varphi)}$ con $x \in [\rho, R]$ possiamo scrivere

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz - \int_{\rho}^R \frac{e^{-a \ln x - ia(2\pi-\varphi)}}{1+x e^{i(2\pi-\varphi)}} e^{i(2\pi-\varphi)} dx - \int_{\Gamma_{\rho}} f(z) dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{-a \ln x - ia\varphi}}{1+x e^{i\varphi}} e^{i\varphi} dx$$

Per $R \rightarrow \infty$ l'integrale su Γ_R tende a zero, in quanto

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2R^{-a}}{R} 2(\pi - \varphi) R = \frac{4(\pi - \varphi)}{R^a}.$$

Per $\rho \rightarrow 0$ l'integrale su Γ_{ρ} tende a zero, in quanto

$$\left| \int_{\Gamma_{\rho}} f(z) dz \right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2(\pi - \varphi) \rho = \frac{\rho^{1-a}}{1-\rho} 2(\pi - \varphi).$$

Pertanto, facendo tendere $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$ e $\varphi \rightarrow 0$ otteniamo

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\rho}^R \frac{e^{-a \ln x - 2\pi ia}}{1+x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{-a \ln x}}{1+x} dx = I(-e^{-2\pi ia} + 1),$$

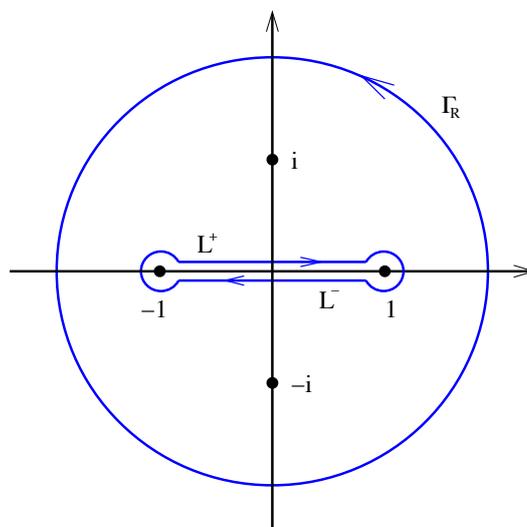
e quindi dalla (14.18) otteniamo

$$I = \frac{2\pi i e^{-i\pi a}}{1 - e^{-2\pi ia}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi ia} - e^{-\pi ia}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Esercizio 14.19. Calcolare il seguente integrale

$$I := \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx.$$

Consideriamo la funzione analitica $F(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} = \frac{G(z)}{1+z^2}$; nella regione in figura tale funzione è monodroma, e ha due determinazioni, g_1 e g_2 .



Siamo interessati alla determinazione di G tale che, all'approssimarsi di L^+ all'intervallo $[-1, 1]$ tenda al valore positivo di $\sqrt{1-x^2}$; l'approssimarsi suddetto corrisponde al tendere di $\vartheta_1 + \vartheta_2$ a π , e quindi si ottiene per k dispari; possiamo scegliere $k = -1$, ottenendo

$$g_1(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \pi)}$$

Calcoliamo i residui di $f(z) = g_1(z)/(1+z^2)$ nei punti $\pm i$, che sono poli semplici; Nel punto i il residuo è dato dal valore della funzione $g_1(z)/(z+i)$, che è $\frac{\sqrt{2}}{2i}$. Spostandosi da i a $-i$ con un cammino contenuto nella regione, la somma $\vartheta_1 + \vartheta_2$ aumenta di 2π , quindi il valore di $g_1(z)$ in $-i$ è $-\sqrt{2}$ e il residuo, calcolato in modo analogo è $\frac{\sqrt{2}}{2i}$.

Sia M_j il massimo di $|f(z)|$ sulla circonferenza γ_j , centrata in ∓ 1 e di raggio ε . Allora

$$\left| \int_{\gamma_i} f(z) dz \right| \leq M 2\pi\varepsilon \rightarrow 0$$

Abbiamo scelto $g_1(z)$ in modo che, al tendere di L^+ a $[-1, 1]$ la funzione $f(z)$ tenda a $f(x)$. Cosa succede invece al tendere di L^- a $[-1, 1]$? Passando da sopra a sotto rimanendo nella regione, la somma $\vartheta_1 + \vartheta_2$ si incrementa di 2π , quindi $f(z)$ tende a $-f(x)$; osservando che L^- è percorso in verso opposto troviamo che il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ dell'integrale sul circuito interno è uguale a due volte l'integrale I .

Per il Teorema dei residui avremo dunque

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz + 2I = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2i} + \frac{\sqrt{2}}{2i} \right) = 2\pi\sqrt{2}$$

Dobbiamo quindi calcolare $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$; osserviamo che tale integrale è uguale a $-2\pi i \operatorname{Res}_{\infty}(f(z))$

Ricordando che, se f ha uno zero semplice all'infinito allora il suo residuo all'infinito è uguale a $\lim_{z \rightarrow \infty} -zf(z)$. osserviamo che, per $\rho = |z| \rightarrow \infty$ si ha $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty$ e $\vartheta_1, \vartheta_2 \rightarrow \vartheta$, e quindi

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -zf(z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} -\rho e^{i\vartheta} \frac{\rho e^{\frac{i}{2}(2\vartheta - \pi)}}{\rho^2 e^{i2\vartheta} + 1} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} -e^{i\vartheta} \frac{-ie^{i\vartheta}}{e^{2i\vartheta} + \frac{1}{\rho^2}} = i,$$

e dunque $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi$. Possiamo dunque concludere che

$$I = \pi + \pi\sqrt{2} = \pi(\sqrt{2} - 1)$$

14.2 SUPERFICI DI RIEMANN - CENNI INTRODUTTIVI

Definizione 14.20. Sia X una superficie topologica; una carta locale complessa per X è un omeomorfismo $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow D$, con U_α aperto di X e $D \subset \mathbb{C}$ disco aperto. L'aperto U_α è detto dominio della carta locale. La carta locale si dice centrata in $p \in X$ se $z_\alpha(p) = 0$.

Definizione 14.21. Due carte locali (U_α, z_α) e (U_β, z_β) si dicono compatibili se $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ oppure se

$$z_{\beta\alpha} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è una funzione olomorfa.

Definizione 14.22. Dato una superficie topologica X , un atlante complesso per X è una collezione di carte locali $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ a due a due compatibili tale che $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Definizione 14.23. Due atlanti complessi si dicono equivalenti se la loro unione è ancora un atlante complesso. Una classe di equivalenza di atlanti complessi è detta *struttura complessa* su X . L'unione di tutti gli atlanti di una struttura complessa è ancora un atlante, detto *atlante universale*.

Definizione 14.24. Una *superficie di Riemann* è una superficie topologica dotata di una struttura complessa.

Osservazione 14.25. Si può dimostrare che la condizione di compatibilità delle carte implica che, se X è una superficie compatta, allora X è omeomorfa a una superficie T_g .

La sfera di Riemann \mathbb{C}_∞

Consideriamo la sfera $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, t) e definiamo $U_\alpha = \mathbf{S}^2 \setminus \{N = (0, 0, 1)\}$ e $U_\beta = \mathbf{S}^2 \setminus \{S = (0, 0, -1)\}$; identifichiamo il piano $t = 0$ con \mathbb{C} e consideriamo la proiezione stereografica da N

$$z_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C} : (x, y, t) \rightarrow \left(\frac{x}{1-t} + i \frac{y}{1-t} \right)$$

e la proiezione stereografica da S seguita dalla coniugazione

$$z_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C} : (x, y, t) \rightarrow \left(\frac{x}{1+t} - i \frac{y}{1+t} \right)$$

z_α è continua e la sua inversa (continua) è

$$z_\alpha^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_\alpha : z \rightarrow \left(\frac{2\Re z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

e analogamente

$$z_\beta^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_\beta : w \rightarrow \left(\frac{2\Re w}{|w|^2 + 1}, -\frac{2\Im w}{|w|^2 + 1}, \frac{1 - |w|^2}{|w|^2 + 1} \right)$$

La composizione $z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{C}^* \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{C}^*$ è dunque uguale a

$$w = z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z) = \frac{\Re z}{|z|^2} - i \frac{\Im z}{|z|^2} = \frac{1}{z},$$

che è olomorfa in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La sfera con la struttura complessa individuata dall'atlante appena descritto è detta *sfera di Riemann* e indicata con \mathbb{C}_∞ .

La retta proiettiva complessa \mathbb{CP}^1

La retta proiettiva complessa \mathbb{CP}^1 è definita come il quoziente di $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica due vettori non nulli di \mathbb{C}^2 che differiscono per uno scalare complesso. Un punto di \mathbb{CP}^1 è individuato da coordinate omogenee $[z_0 : z_1]$. Consideriamo gli aperti

$$U_i = \{p \in \mathbb{CP}^1 \mid z_i(p) \neq 0\}$$

e gli omeomorfismi $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ definiti come $\varphi_0(p) = z_1/z_0$ e $\varphi_1(p) = z_0/z_1$. E' semplice mostrare che le funzioni di transizione sono definite su \mathbb{C}^* e hanno espressione locale $w = 1/z$, e sono quindi olomorfe.

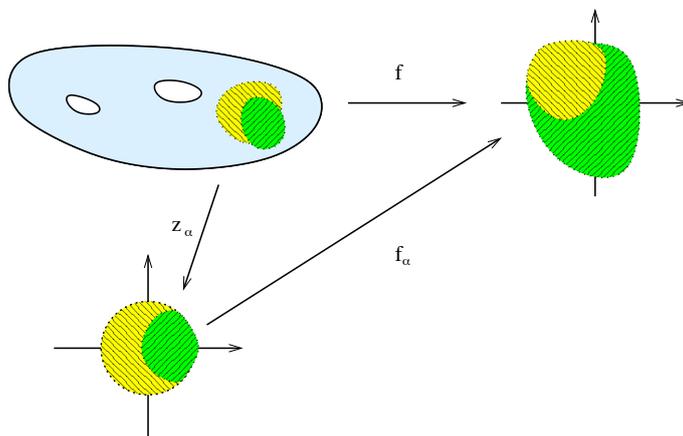
Tori complessi

Siano ω_1, ω_2 due numeri complessi linearmente indipendenti su \mathbb{R} , e sia

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\};$$

Il quoziente $X = \mathbb{C}/\Lambda$ è una superficie di Riemann, che è omeomorfa ad un toro. Per mostrarlo si costruisce un atlante come nell'esempio 1.8 d). Le funzioni di transizione sono traslazioni, e sono quindi olomorfe.

Definizione 14.26. Sia X una superficie di Riemann e $p \in X$ un suo punto, U un intorno di p e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione; f si dice *olomorfa* in p se, presa una carta locale (U_α, z_α) il cui dominio contiene p , la funzione $f_\alpha = f \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $z_\alpha(p)$. Tale funzione si dice *espressione locale* di f nella carta (U_α, z_α) .



Osservazione 14.27. La definizione è ben posta: se (U_β, z_β) è un'altra carta locale il cui dominio contiene p , allora $f_\beta = f \circ z_\beta^{-1} = f \circ z_\alpha^{-1} \circ z_\alpha \circ z_\beta^{-1} = f_\alpha \circ z_{\alpha\beta}$ è olomorfa in quanto composizione di funzioni olomorfe.

Definizione 14.28. Analogamente f si dice *meromorfa* in p se una sua espressione locale f_α ha un polo in p .

Osserviamo che il Teorema 13.1 vale anche per un aperto connesso di una superficie di Riemann (con la stessa dimostrazione), e quindi vale anche il

Corollario 14.29 (Principio d'identità). *Sia X una superficie di Riemann, sia $\Omega \subset X$ un aperto connesso, e siano $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se esiste $S \subset \Omega$ tale che $f|_S = g|_S$ e S ha un punto di accumulazione in Ω , allora $f \equiv g$ in Ω .*

Teorema 14.30. *Sia X una superficie di Riemann compatta, e $f \in \mathcal{O}(X)$; allora f è costante.*

Dimostrazione. Poiché X è compatta, $|f|$ ha massimo su X ; sia M tale massimo, e sia p un punto dove tale massimo è assunto. Sia U un intorno aperto e connesso di p , contenuto nel dominio di una carta locale; per il Principio del Massimo (13.14) f deve essere costante su U . Allora, per il principio d'identità, f è costante su X . \square

Definizione 14.31. Se X e Y sono due superfici di Riemann un'applicazione continua $F : X \rightarrow Y$ si dice *olomorfa* in $p \in X$ se, date due carte locali (U_α, z_α) e (V_a, w_a) che contengono p ed $F(p)$, l'espressione locale $F_{\alpha a} = w_a \circ F \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_a)) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $z_\alpha(p)$.

Osservazione 14.32. Anche in questo caso la definizione è ben posta. Infatti è semplice verificare che la relazione tra due diverse espressioni locali di F è la seguente:

$$F_{b\beta} = w_{ba} \circ F_{a\alpha} \circ z_{\alpha\beta}.$$

Sia X una superficie di Riemann e f una funzione meromorfa su X ; possiamo pensare f come una funzione da X a \mathbb{CP}^1 ponendo

$$F(x) = \begin{cases} [f(x) : 1] & \text{se } x \text{ non è un polo} \\ [1 : 0] & \text{se } x \text{ è un polo} \end{cases}$$

E' semplice verificare che F è un'applicazione olomorfa da X a \mathbb{CP}^1 . Viceversa, data un'applicazione olomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$, diversa dall'applicazione costante di valore $[1 : 0]$, a F è possibile associare una funzione meromorfa su X .

Definizione 14.33. Due superfici di Riemann X e Y sono isomorfe se esiste un'applicazione olomorfa $F : X \rightarrow Y$ che abbia un'inversa $G : Y \rightarrow X$ olomorfa.

Esempio 14.34. La retta proiettiva complessa \mathbb{CP}^1 è isomorfa alla sfera di Riemann. Per verificarlo si consideri l'applicazione $F : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ così definita:

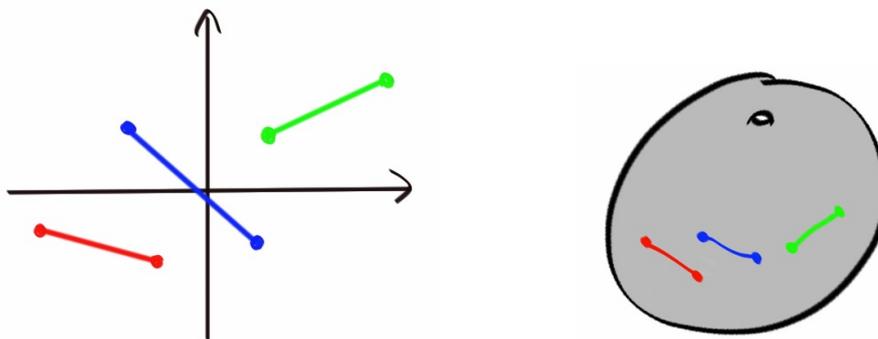
$$F([z : w]) = \left(\frac{2\Re(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2\Im(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right).$$

Alcune superfici di Riemann iperellittiche

Avvertenza: la presente sezione ha volutamente carattere narrativo, e non contiene dimostrazioni rigorose di quanto enunciato.

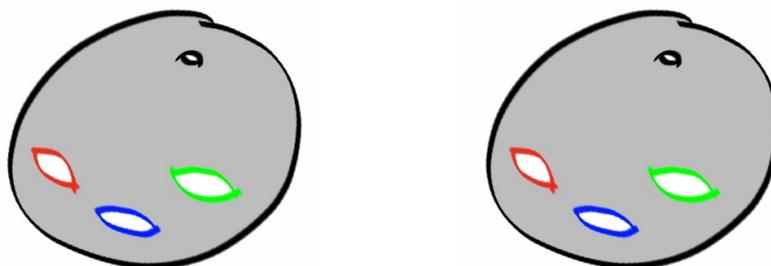
Sia $h(z)$ un polinomio complesso di grado $2g + 2$, con radici distinte e $h(0) \neq 0$. Raggruppiamo le radici del polinomio a coppie $(z_1, z'_1, \dots, z_{g+1}, z'_{g+1})$ in modo tale che i segmenti L_i che uniscono i due punti di una coppia siano a due a due disgiunti.

Consideriamo la funzione analitica $F(z) = \sqrt{h(z)}$; in ogni punto di \mathbb{C} che non è radice di h tale funzione ha due valori, e tali valori vengono scambiati percorrendo un cammino che gira intorno a un numero dispari di radici.



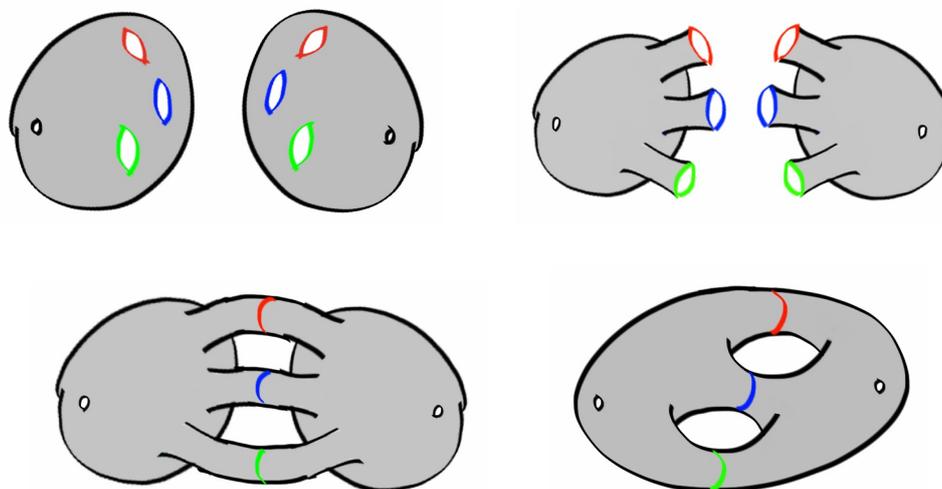
In $\mathbb{C} \setminus \{\cup L_i\}$ la funzione è quindi monodroma e ha due determinazioni, f_1, f_2 , olomorfe in $\mathbb{C} \setminus \{\cup L_i\}$. Nella figura di destra abbiamo rappresentato \mathbb{C} come la sfera di Riemann \mathbb{C}_∞ meno un punto.

Siano Y_1 e Y_2 due copie di \mathbb{C} , tagliate lungo i segmenti L_i :



su Y_i possiamo definire funzioni $g_j : Y_j \rightarrow \mathbb{C}$ nel modo seguente: nei punti interni a Y_j la funzione g_j coincide con f_j , mentre sui bordi del taglio essa è definita come limite di f_j e quindi assume valori diversi sui due bordi di ciascun taglio – bordi indicati con L_i^+ e L_i^- .

Consideriamo il quoziente X ottenuto attaccando Y_1 e Y_2 lungo i bordi dei tagli identificando L_i^+ su Y_1 con L_i^- su Y_2 e L_i^- su Y_1 con L_i^+ su Y_2 .



Poiché attraversando uno dei segmenti L_i le determinazioni si scambiano le funzioni g_j assumono lo stesso valore sui punti che vengono identificati nel quoziente, e quindi su X è ben definita una funzione olomorfa G indotta da g_1 e g_2 . X è detta la superficie di Riemann associata alla funzione analitica $\sqrt{h(z)}$.

Esiste un'applicazione naturale $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ che, ristretta alla controimmagine di $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z_1, z'_1, \dots, z_{g+1}, z'_{g+1}\}$ è un rivestimento a due fogli, e un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \psi \swarrow & & \searrow G \\ \mathbb{C} & \overset{F}{\dashrightarrow} & \mathbb{C} \end{array}$$

tale che, se $z \in \Omega$, $G(\psi^{-1}(z)) = \{F(z)\}$

La superficie X può essere compattificata, considerando la superficie di Riemann X' associata a $\sqrt{h(1/z)}$ e incollandole nella parte comune. La superficie ottenuta è topologicamente una superficie compatta di genere g .

- G -spazio, 50
- q -bordi, 60
- q -bordi relativi, 79
- q -cicli, 60
- q -cicli relativi, 79
- q -simpleso singolare, 61
- alfabeto, 31
- azione di un gruppo, 49
 - libera, 50
 - propriamente discontinua, 50
- carta locale, 3
- complessi di catene, 60
 - morfismi, 60
- condizioni di Cauchy-Riemann, 92
- coppia di spazi, 78
 - complesso singolare, 79
 - omologia, 79
 - successione esatta lunga, 80
- CW-complesso finito, 18
 - esempi, 18
 - sottocomplesso, 20
- equivalenza omotopica, 15
- formula integrale
 - per un disco, 111
- funzione olomorfa, 93
 - una serie di potenze convergente è olomorfa, 95
- gruppo
 - delle catene singolari, 61
 - abelianizzato di un, 33
 - con presentazione, 32
 - fondamentale, 23
 - della bottiglia di Klein, 40
 - della circonferenza, 56
 - di S^n , con $n \geq 2$., 37
 - di un bouquet di circonferenze, 38
 - indipendenza dal punto base, 25
 - morfismo indotto, 25
 - libero, 31
 - gruppo abeliano
 - libero, 57
 - sistema di generatori, 57
 - sottogruppo di torsione, 58
 - sottoinsieme libero, 57
- Indice, 109
 - proprietà, 110
- integrale lungo una curva, 103
 - proprietà, 103
- numeri complessi
 - forma algebrica, 89
 - forma esponenziale, 90
 - forma trigonometrica, 90
 - radici n -esime, 91
- omologia
 - di complessi di catene, 60
 - di una coppia, 79
 - locale, 83
 - ridotta, 66
 - singolare, 63
- omotopia, 13
 - di applicazioni continue, 13
 - di cammini, 14
 - relativa, 14
- operatori faccia, 62
- orbita, 49
- Residuo
 - all'infinito, 127

- definizione, 127
- retrato, 16
 - di deformazione, 16
 - proprietà dei morfismi indotti, 27
- rivestimenti, 50
- serie di Laurent, 122
- singolarità isolate, 123
 - poli, 124
 - singolarità eliminabili, 112
 - singolarità essenziali, 125
- sollevamento, 52
 - di cammini, 53
 - di omotopie, 55
 - unicità, 53
- somma connessa, 8
- sottogruppo dei commutatori, 33
- spazio topologico
 - contraibile, 15
 - localmente euclideo, 3
 - dimensione, 3
 - dimensione locale, 3
- stabilizzatore, 49
- successione esatta
 - di complessi, 69
 - di gruppi abeliani, 58
 - lunga, 69
 - breve, 59
 - spezzante, 59
- Superfici T_g , 8
- Superfici U_h , 8
- Teorema
 - dei residui, 128
 - della mappa aperta, 144
 - di Cauchy, 116
 - di Cauchy, versione locale, 106
 - di classificazione delle superfici compatte, 42
 - di escissione, 83
 - di Goursat, 104
 - di Hurewicz, 67
 - di invarianza della dimensione, 3, 86
 - di invarianza per omotopia, 28
 - di Liouville, 114
 - di Morera, 114
 - di Raddò, 42
 - di Rouché, 143
 - di Seifert-Van Kampen, 36
 - di Weierstrass, 112
 - fondamentale dell'algebra, 114
 - Principio d'identità, 141
 - Principio dell'argomento, 142
- triangolazione, 42
 - triangolo geometrico, 41
- varietà topologica, 4
 - esempi, 5

Bibliografia

- [1] Lars Ahlfors. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable..* McGraw-Hill, 1978.
- [2] John D. Dixon. *A brief proof of Cauchy's integral theorem* Proc. Amer. Math. Soc. **29** 625-626 (1971).
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2002.
- [4] Peter Henrici *Applied and computational complex analysis. Vol. 1.* John Wiley & Sons, 1974.
- [5] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica.* Zanichelli, 1988.
- [6] Serge Lang. *Complex analysis.* Springer-Verlag, 1999.
- [7] William Massey. *A basic course in algebraic topology.* Springer-Verlag, 1991.
- [8] Rick Miranda *Algebraic curves and Riemann surfaces* American Mathematical Society, 1995.
- [9] Edoardo Sernesi. *Geometria 2* Bollati Boringhieri, 2001.

