Prova d'esame

Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)

10 gennaio 2011

Esercizio 1 Un dado equilibrato viene lanciato $n = 150$ volte. Sia X il numero di volte in cui esce la faccia 6. Si calcolino, usando l'approssimazione normale, le seguenti probabilità:

a) $\mathbb{P}(X \leq 30)$;

b) $\mathbb{P}(X = 26)$;

c) $\mathbb{P}(20 < X < 28)$.

Soluzione. Dato che X si può considerare come somma di un numero $n = 150$ di variabili indipendenti con legge di Bernoulli di parametro $p = 1/6$, si può applicare l'approssimazione del Teorema Limite Centrale e si ottiene

$$\mathbb{P}(X \leq 30) = \mathbb{P}\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30,5-25}{\sqrt{5\sqrt{30}/6}}\right) = \Phi(1,20) = 0,88493$$

$$\mathbb{P}(X = 26) = \mathbb{P}\left(\frac{25,5-25}{\sqrt{5\sqrt{30}/6}} < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{26,5-33}{\sqrt{5\sqrt{30}/6}}\right) = \Phi(0,33) - \Phi(0,11) = 0,0855$$

$$\mathbb{P}(20 < X < 28) = \mathbb{P}\left(\frac{20,5-25}{\sqrt{5\sqrt{30}/6}} < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{27,5-25}{\sqrt{5\sqrt{30}/6}}\right) = \Phi(0,55) - \Phi(-0,99) = 0,54775$$

Esercizio 2 Su un canale di trasmissione dati viene inviato un segnale di lunghezza 2 caratteri ($Y = X_1X_2$) a valori nell'alfabeto $E = \{0,1,2,4\}$; sappiamo che la probabilità di ogni carattere è 1/4, 1/8, 1/2 e 1/8.

(a) Determinare media e varianza di ogni X.

(b) Si determini il valore dell'entropia $H(X)$.

(c) Si consideri il segnale Y. Determinare l'entropia di Y.

Soluzione. Consideriamo X_1 (dato che X_2 ha la stessa distribuzione, il risultato è lo stesso). La media di X_1 vale $\mathbb{E}[X_1] = \frac{13}{8}$, la media di X^2 è $\mathbb{E}[X^2] = \frac{33}{8}$ e, quindi, la varianza vale $V(X) = \frac{33}{8} - \left(\frac{13}{8}\right)^2 = \frac{95}{64}$.

Il valore dell'entropia di X è $H(X) = -\sum p_j \log_2(p_j) = \frac{1}{4}\log_2(4) + 2 * \frac{1}{8}\log_2(8) + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{7}{4}$.

Y è il vettore aleatorio avente marginali X_1 e X_2; dato che X_1 e X_2 sono indipendenti, l'entropia di Y è la somma delle entropie delle marginali e quindi vale $H(Y) = \frac{7}{2}$.

Esercizio 3 Nel corso degli ultimi campionati, Steve Nash ha realizzato (per anno) i seguenti punteggi su tiro libero:

00-01	01-02	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09	09-10
231	260	310	230	211	257	222	222	196	211

a) Determinare media e varianza campionaria;

b) supponendo che i dati vengano da una popolazione normale, determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per il punteggio medio ottenuto.

Soluzione. Media campionaria $\bar{x} = 235$ e deviazione standard campionaria $32,97$ (varianza campionaria $s^2 = 1087,333$). Intervallo di confidenza:

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,975}(9), \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,975}(9)\right)$$

da cui, ricavando il valore $t_{0,975}(64) = 2,2621$ si ottiene l'intervallo $235 \pm 23,589$.

Esercizio 4 Un'urna contiene 20 palline gialle e 10 rosse. Si estraggono 5 palline, senza reimmissione. Determinare:

(a) la probabilità di ottenere esattamente 3 palline gialle;

(b) la probabilità di ottenere un numero dispari di palline gialle;

(c) la probabilità di ottenere esattamente 3 palline gialle sapendo di averne estratte un numero dispari.

Soluzione. Sia G il numero di palline gialle estratte. Allora G ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 30$, $K = 20$, $n = 5$, quindi

$$\mathbb{P}(G = 3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{10}{2}}{\binom{30}{5}} = 0,36$$

La probabilità che G sia dispari vale

$$\mathbb{P}(G = 1) + \mathbb{P}(G = 3) + \mathbb{P}(G = 5) = \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{4} + \binom{20}{3}\binom{10}{2} + \binom{20}{5}\binom{10}{0}}{\binom{30}{5}} = 0,498$$

La probabilità condizionata vale

$$\mathbb{P}(G = 3 \mid G \text{ dispari}) = \frac{\mathbb{P}(G = 3)}{\mathbb{P}(G \text{ dispari})} = 0,722$$

Esercizio 5 Consideriamo la catena di Markov su $E = \{0, 1, 2, 3\}$ associata alla matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si mostri che la catena è irriducibile.

b) Si calcoli il periodo della catena.

c) Si determini la distribuzione invariante.

d) Si determini, nel lungo periodo, la frequenza relativa del numero di passaggi dallo stato 1.

Soluzione. Dato che $3 \to 0 \to 2 \to 1 \to 3$ è un circuito che tocca tutti gli stati ed ha probabilità positiva, il sistema è irriducibile. Essendo a stati finiti, sappiamo anche che è ricorrente e ammette una unica misura invariante. Tutti gli stati hanno lo stesso periodo; per calcolarlo, consideriamo l'orbita dello stato 0. Si osservi che $p^{(2)}(0,0) \geq p(0,3)p(3,0) > 0$, $p^{(3)}(0,0) \geq p(0,3)p(3,1)p(1,0) > 0$, quindi l'orbita di 0 contiene sia 2 che 3 e quindi il MCD è 1. Tutti gli stati sono a-periodici e il sistema è regolare.

La distribuzione invariante è $\pi = \left(\frac{6}{18}, \frac{4}{18}, \frac{3}{18}, \frac{5}{18}\right)$. Dato che il sistema è regolare e a stati finiti, allora la frequenza dei passaggi dallo stato 1 coincide con $\pi(1) = \frac{2}{9}$.

Esercizio 6 Consideriamo un punto $P = (X, Y, Z)$ scelto a caso nel parallelepipedo $W := [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$. Sia D la distanza del punto dagli assi, definita come il minimo tra le tre coordinate di P. Calcolare:

(a) la funzione di ripartizione di D;

(b) la funzione densità di D;

(c) la media di D.

Soluzione. Per costruzione, X, Y e Z sono variabili aleatorie indipendenti, con legge uniforme su $[0,1]$, $[0,2]$ e $[0,3]$, rispettivamente. D è il minimo di X, Y e Z, da cui, in particolare, si vede che $D \in [0,1]$. Per $t \in [0,1]$ quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D \leq t) = 1 - \mathbb{P}(D > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)\mathbb{P}(Z > t) &= 1 - (1-t)\frac{2-t}{2}\frac{3-t}{3} \\ &= \frac{1}{6}(11t - 6t^2 + t^3)\end{aligned}$$

La sua densità è data dalla derivata rispetto a t e vale (per $t \in [0,1]$, mentre è nulla altrove)

$$f_D(t) = \frac{1}{6}(11 - 12t + 3t^2).$$

Ne segue che la media vale

$$\mathbb{E}[D] = \int_0^1 \frac{1}{6}(11t - 12t^2 + 3t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}$$