Prova d'esame

*Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)*

31 gennaio 2011

---

**Esercizio 1** Compriamo un biglietto in 50 lotterie, in ognuna delle quali abbiamo una probabilità pari a $\frac{1}{100}$ di vincere un premio; usando l'approssimazione di Poisson alla binomiale, calcolare le seguenti probabilità:

a) la probabilità di vincere almeno un premio;

b) la probabilità di vincere esattamente un premio sapendo di averne vinto almeno uno;

c) il numero medio di premi vinti sapendo di averne vinto almeno uno.

*Soluzione.* Il numero di vincite è distribuito secondo una legge binomiale di parametri $n = 50$ e $p = \frac{1}{100}$ quindi può essere approssimato con una legge di Poisson di parametro $\lambda = n \cdot p = \frac{1}{2}$. Allora

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} \simeq 0,39;$$

$$\mathbb{P}_{X\geq 1}(X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} = \frac{\lambda\, e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \simeq 0,77;$$

$$\mathbb{E}_{X\geq 1}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}_{X\geq 1}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mathbb{P}(X = k)}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}\,\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \simeq 1,27.$$

---

**Esercizio 2** Si effettuano 3 esperimenti (non necessariamente indipendenti) e si registra il numero $X$ di successi. Indichiamo con $\{k, p_k),\ k = 0, 1, 2, 3\}$ la distribuzione di $X$. Supponiamo di sapere che $\mathbb{E}(X) = 1,8$.

(a) Scrivere esplicitamente tutte le relazioni note tra $p_0, p_1, p_2, p_3$;

(b) Qual è il massimo valore possibile per $\mathbb{P}(X = 3)$? Potete determinare uno scenario probabilistico in cui questo accada?

(b) Si determini, nello scenario determinato al punto (b), il valore dell'entropia $H(X)$.

(c) Si consideri il caso in cui gli esperimenti sono indipendenti ed equidistribuiti. Scrivere, in questo scenario, il valore esatto di $p_0, p_1, p_2, p_3$. Determinare infine, in questo scenario, il valore dell'entropia $H(X)$.

*Soluzione.* Le relazioni note per la distribuzione di $X$ sono due:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1,8$$

la prima segue dal fatto che è una distribuzione di probabilità, la seconda dal valore noto della media.

Il massimo valore possibile di $p_3$ è $\bar{p}_3 = \frac{1,8}{3} = 0,6$, che corrisponde alla variabile $\bar{X} \sim (0,4,\ 0,\ 0,\ 0,6)$. In questo scenario, gli esperimenti non sono indipendenti, anzi, hanno tutti lo stesso esito (tutti e tre successo con probabilità $0,6$ e tutti e tre insuccesso con probabilità $0,4$). L'entropia di questo scenario è

$$H(\bar{X}) = -\bar{p}_0 \log_2(\bar{p}_0) - \bar{p}_3 \log_2(\bar{p}_3) \simeq 0,97$$

Nel caso gli esperimenti siano indipendenti ed equidistribuiti, detta $p$ la probabilità di successo in un esperimento, $X$ risulta distribuita secondo una legge binomiale di parametri $n = 3$ e $p$, ed essendo $\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 1,8$ si ottiene $p = 0,6$. In tal caso,

$$p_0 = (1-p)^3; \qquad p_1 = 3\,p\,(1-p)^2; \qquad p_2 = 3\,p^2\,(1-p); \qquad p_3 = p^3$$

e vale

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{3} p_k\, \log_2(p_k) = 1,77$$

---

**Esercizio 3** Nel gran premio del Bahrein 2010, i distacchi tra i vari concorrenti andati a punti sono stati:

$$16,0 \;\; 7,1 \;\; 15,6 \;\; 1,5 \;\; 3,9 \;\; 1,1 \;\; 1,1 \;\; 6,7 \;\; 9,4$$

(in secondi). Calcolare media campionaria e deviazione campionaria standard dei dati ottenuti. Calcolare inoltre un intervallo di confidenza al 90% per la varianza campionaria dei dati.

*Soluzione.* Media campionaria $\bar{x} = 6,93$ e varianza campionaria $s^2 = 33,78$. Intervallo di confidenza per la varianza:

$$\left( \frac{8 \cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,8}},\ \frac{8 \cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,8}} \right) = (17,42,\ 98,90)\,.$$

---

**Esercizio 4** Il numero di clienti che entra in un negozio è una variabile aleatoria $X$ con distribuzione di Poisson, avente media $\lambda = 10$. Il denaro speso da ogni cliente è uniformemente distribuito in $\{0,\ 10,\ 20,\ \ldots,\ 100\}$. Determinare la media del denaro incassato ogni giorno dal negozio.

*Soluzione.* Indichiamo con $Y_i$ il denaro speso dal cliente $i$-esimo. Allora risulta $\mathbb{E}(Y_i) = 50$. Condizionato a $X = n$, il denaro incassato ogni giorno dal negozio è $S = Y_1 + \cdots + Y_n$ (nel caso $n = 0$ è $S = 0$). In particolare, vale $\mathbb{E}_{X=n}(S) = 50n$. Osserviamo la relazione

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_{X=n}(S)\, \mathbb{P}(X = n)$$

da cui si ottiene $\mathbb{E}(S) = 50\, \mathbb{E}(X) = 500$.

---

**Esercizio 5** Consideriamo la catena di Markov su $E = \{0, 1, 2, 3\}$ associata alla matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Si mostri che la catena è irriducibile.

b) Si calcoli il periodo della catena.

c) Si determini la distribuzione invariante.

d) Se $X_0$ ha distribuzione $\pi_0 := (1/2, 0, 1/2, 0)$, determinare $\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid \pi_0)$.

*Soluzione.* Dato che $2 \to 0 \to 3 \to 1 \to 0 \to 2$ è un circuito che tocca tutti gli stati ed ha probabilità positiva, il sistema è irriducibile. Essendo a stati finiti, sappiamo anche che è ricorrente e ammette una unica misura invariante. Tutti gli stati hanno lo stesso periodo; dato che inoltre tutte le orbite contengono 1 (gli elementi sulla diagonale principale sono $\neq 0$) si ha che la catena è aperiodica e il sistema è regolare.

La distribuzione invariante è $\pi = (3/13,\ 4/13,\ 2/13,\ 4/13)$. La probabilità richiesta al punto (d) è pari a $2/9$.

---

**Esercizio 6** Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ punti scelti a caso, indipendentemente, nell'intervallo $(0, 1)$. Sia $M$ il valore massimo assunto da $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Determinare la distribuzione di probabilità $\mathbb{P}(M \leq t)$ di $M$. Determinare la sua funzione di densità e calcolare la media e la varianza di $M$.

*Soluzione.* Vale

$$\mathbb{P}(M \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) \ldots \mathbb{P}(X_n \leq t) = t^n$$

da cui $f_M(t) = n\, t^{n-1}$ e

$$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 nt^n \,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}, \qquad \mathbb{E}(M^2) = \int_0^1 nt^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+2}$$

e quindi $\mathrm{Var}(M) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.