Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

16 luglio 2012

Esercizio 1. Tino e Tina ogni sera lanciano una moneta per decidere chi carica la lavastoviglie. Negli ultimi 30 giorni, Tina ha fornito la moneta e Tino ha caricato la lavastoviglie 21 volte.

(a) Tino crede che la moneta sia truccata. Utilizzando un intervallo di confidenza unilatero, determinare al livello di confidenza del 95% se ha ragione.

Soluzione. Utilizziamo l'intervallo di confidenza

$$\left[\bar{x} - \phi_{0.95}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, +\infty\right)$$

(osservando che il secondo estremo può essere sostituito da 1). Si ottiene, usando $\bar{x} = 0.7$, $\phi_{0.95} = 1.65$, che l'intervallo di confidenza al livello 95% per la parità della moneta è

$$[0.562, 1]$$

quindi Tino ha ragione nel credere che la moneta sia truccata.

Esercizio 2. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 i vertici di un pentagono regolare. Consideriamo la catena di Markov X_n, $n \in \mathbb{N}$, con spazio degli stati $S = \{P_1, \dots P_5\}$ associato alle seguenti transizioni: per ogni indice dispari i, la transizione $P_i \to P_j$ ha probabilità $1/5$, mentre per ogni indice i pari, la transizione $P_i \to P_j$ ha probabilità $1/2$ per $j = i \pm 1$.

(a) Scrivere la matrice di transizione T associata a X_n.

(b) Mostrare che T è regolare.

(c) Calcolare la misura invariante e descrivere il limte di $T^n(i,j)$, $n \to \infty$, per ogni i, j.

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile, aperiodico, regolare, ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{3}{14}, \frac{2}{14}, \frac{4}{14}, \frac{2}{14}, \frac{3}{14})$. Si ottiene, dato che il sistema è regolare, $T^n(i,j) \simeq \pi^*(j)$.

Esercizio 3. Sia X il tempo necessario a un sistema per guastarsi; sia Y il tempo necessario per rilevare il guasto una volta che il sistema si sia guastato. Supponiamo che X abbia legge esponenziale di parametro $\lambda = 1h^{-1}$ e che Y sia indipendente da X e abbia legge uniforme in $[0,1]$ (X e Y sono entrambi espressi in ore (h)). Sia T il tempo totale per l'osservazione del guasto. Se ne determini la legge, la media e la varianza.

Soluzione. Sappiamo che $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 1$ e che $\mathbb{E}[Y] = 1/2$, quindi la media di T è $\mathbb{E}[T] = 1.5h$. Inoltre la varianza di X vale $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ e la varianza di Y vale $1/12$, quindi la varianza totale è $V(T) = 1.08\bar{3}$.

Per determinare la legge di T, $\mathbb{P}(T \le t)$, si osserva che possiamo dividere lo studio in 3 zone: per $t \le 0$ si ha $\mathbb{P}(T \le t) = 0$; per $0 \le t \le 1$ si ha

$$\mathbb{P}(T \le t) = \int_0^t \int_0^{t-x} f_Y(y)\,\mathrm{d}y\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t (t-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-t} + t - 1$$

e infine per $t \ge 1$ si ha

$$\mathbb{P}(T \le t) = \int_0^1 \int_0^{t-y} f_X(x)\,\mathrm{d}x\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y = 1 + e^{-t} - e^{1-t}.$$

Esercizio 4. Si consideri un mazzo da 52 carte (4 semi da 13 carte ciascuno). Si girano tre carte.

(a) Determinare la probabilità che le tre carte siano dello stesso colore.

(b) Determinare la probabilità che le tre carte siano tutte figure.
(c) Determinare la probabilità di ottenere almeno una figura.

Soluzione. La probabilità di colore è $4\frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} \simeq 0.052$; la probabilità di ottenere 3 figure è $\frac{\binom{12}{3}}{\binom{52}{3}} \simeq 0.01$; la probabilità di ottenere almeno una figura è $1 - \frac{\binom{40}{3}}{\binom{52}{3}} \simeq 0.553$

Esercizio 5. Consideriamo un test diagnostico per evidenziare la presenza di una patologia nel sangue. Il test ha probabilità 0.8 di individuare correttamente la presenza della patologia, ma sappiamo che dà risultato positivo (ossia, indica la presenza della patologia) anche nel 20% degli esami compiuti su soggetti sani.

Supponiamo che la presenza della patologia nella popolazione sia pari al 5%.

(a) Determinare la probabilità che un soggetto sia malato dopo che il test ha dato risultato positivo.
(b) Determinare la probabilità che un soggetto sia sano dopo che il test ha dato risultato negativo.

Soluzione. Indichiamo con A l'evento "soggetto malato" e con T l'evento "il test è positivo". Sappiamo che $\mathbb{P}(A) = 0.05$, $\mathbb{P}(T \mid A) = 0.8$, $\mathbb{P}(T \mid A^c) = 0.2$. Allora

$$\mathbb{P}(A \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)} = \frac{4}{23}$$

e

$$\mathbb{P}(A^c \mid T^c) = \frac{\mathbb{P}(T^c \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(T^c \mid A^c)\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(T^c \mid A)\mathbb{P}(A)} = \frac{76}{77}$$