Prova in Itinere

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

10 gennaio 2012

Esercizio 1 La produzione di un certo oggetto avviene in una catena a due livelli; da studi sulle statistiche del funzionamento, risulta che ogni stadio viene superato in maniera indipendente dalla storia passata. Possiamo allora modellizzare il sistema come catena di Markov sullo spazio degli stati $E = \{L_1, L_2, S, T\}$ dove gli stati S e T rappresentano i pezzi scartati e terminati, rispettivamente. Supponiamo che le probabilità di transizione possano essere sintetizzate con la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.72 & 0.18 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la probabilità che un pezzo appena entrato in produzione sia terminato. Determinare il tempo medio che un pezzo appena entrato in produzione passa dentro la catena di montaggio.

Soluzione. Indichiamo con a_1, a_2 le probabilità di arrivare allo stato T per pezzi rispettivamente al livello L_1, L_2. I valori a_i si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} a_1 = 0.1a_1 + 0.72a_2 \\ a_2 = 0.1a_1 + 0.2a_2 + 0.6 \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = \frac{2}{3} = 0.667$, $a_2 = \frac{5}{6} = 0.833$. Quindi la probabilità che un pezzo appena entrato in produzione sia terminato è pari al 66,7%.

Indichiamo ora con t_1, t_2 i tempi medi passati nel sistema da un pezzo al livello L_1, L_2. I valori t_i si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} t_1 = 1 + 0.2t_1 + 0.7t_2 \\ t_2 = 1 + 0.1t_1 + 0.2t_2 \end{cases}$$

che ha soluzione $t_1 = \frac{190}{81}$, $t_2 = \frac{125}{81}$.

Esercizio 2 In un processo di produzione in serie il 12% dei pezzi viene abitualmente scartato perché difettoso. Avendo scelto a caso un campione di 100 pezzi della produzione, si è constatato che ben 16 erano da scartare. Non essendo soddisfatti di questo primo risultato, si prende un ulteriore campione casuale di 500 pezzi e in questo caso vi sono 80 pezzi difettosi. **(a)** Determinare, in entrambi i casi, un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per la proporzione p di pezzi difettosi. **(b)** Cosa è possibile concludere riguardo alla produzione esaminando il primo campione estratto? Tali risultati sono confermati dal secondo campione di 500 pezzi?

Soluzione. Approssimiamo la proporzione di successi S_n/n con una legge normale di parametri $\mu = p$ e $\sigma^2 = p(1-p)/n$. Otteniamo i seguenti intervalli di confidenza per le proporzioni stimate nei due casi:

$$\begin{aligned} n = 100: &\qquad 0.088 < p < 0.232 \\ n = 500: &\qquad 0.128 < p < 0.192 \end{aligned}$$

Quindi, se nel primo caso potevamo accettare che il processo di produzione avesse una percentuale del 10% di pezzi difettosi, con il secondo campione concludiamo che la percentuale di pezzi difettosi deve essere maggiore di quanto dichiarato.

Esercizio 3 Quattro gruppi di 16, 20, 10 e 17 scolari hanno altezza compresa, rispettivamente, negli intervalli $(136, 144)$, $(144, 152)$, $(152, 154)$ e $(154, 166)$. **(a)** Tracciare un istogramma dei dati. **(b)** Determinare media e varianza campionaria dell'altezza degli scolari. **(c)** Supponendo che l'altezza sia una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana, determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per la media della popolazione (utilizzare, come stima della varianza, quanto trovato nel punto (b)).

Soluzione. Media e varianza campionaria:

$$\mu = \frac{1}{16+20+10+17}(16*140+20*148+10*153+17*160) = 150$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{62}(16*10^2+20*2^2+10*3^2+17*10^2) = 55.9677$$

Con questi dati, si ottiene l'intervallo di confidenza

$$\left(\mu - t_{0.95}^{(62)}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},\ \mu + t_{0.95}^{(62)}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = \big(148.116,\ 151.884\big).$$

Esercizio 4 Il tempo in una città può essere caratterizzato come soleggiato, nuvoloso o piovoso. Se un giorno il tempo è soleggiato, il giorno dopo sole e nuvole sono ugualmente probabili. Se è nuvoloso, c'è una probabilità del 50% che il giorno successivo sia soleggiato, e del 20% che sia piovoso. Se piove, il giorno seguente non ci sarà il sole, mentre nuvole e persistenza della pioggia sono ugualmente probabili.

(a) Mostrare che il sistema può essere descritto come una catena di Markov, di cui si chiede di calcolare la matrice di transizione. **(b)** Calcolare la distribuzione invariante e mostrare che è ergodica. Qual è a regime la probabilità di ogni stato? **(c)** Sapendo che oggi c'è il sole, calcolare la probabilità che il tempo non cambi per esattamente tre giorni consecutivi. **(d)** Calcolare la probabilità che, fra tre giorni, il tempo sia nuvoloso, sapendo che oggi piove.

Soluzione. Il sistema si può scrivere come catena di Markov in quanto il tempo di domani dipende solo dal tempo di oggi e non dalla storia. Sullo spazio degli stati {sole, nuvole, pioggia}, la matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5/10 & 3/10 & 2/10 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile (il percorso $S \to N \to P \to N \to S$ ha probabilità positiva) e regolare $p(S,S) > 0$. La misura invariante esiste unica ed è ergodica: $\pi^* = (5/12,\ 5/12,\ 2/12)$.

La probabilità che ci sia il sole per esattamente tre giorni di seguito è pari alla probabilità che non cambi da oggi a domani, né il giorno dopo, ma cambi esattamente il terzo giorno, quindi $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Dato che la matrice di transizione a 3 passi è

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,42 & 0,13 \\ 0,42 & 0,412 & 0,168 \\ 0,325 & 0,42 & 0,255 \end{pmatrix}$$

si ottiene $0,42$ la probabilità che tra 3 giorni sia nuvoloso sapendo che oggi piove.

Esercizio 5 Le lampade di una certa linea di produzione hanno un tempo di vita di media $\mu = 143$h. e deviazione standard pari a $\sigma = 9$h. Le lampade vengono accese, in sequenza (quando si brucia una se ne accende un'altra), per tenere illuminato un certo monumento. Determinare la probabilità che siano necessarie più di 60 lampade per tenere illuminato il monumento per un anno consecutivo.

Soluzione. Perché siano necessarie più di 60 lampade, deve essere che $S_{60} = X_1 + \cdots + X_{60} < 365 * 24$ (la somma dei tempi di vita delle prime 60 deve essere minore di un anno); usando l'approssimazione normale

$$\mathbb{P}(S_{60} < 8760) = \mathbb{P}(\frac{S_{60} - 60\mu}{\sqrt{60\sigma^2}} < \frac{8760 - 143 * 60}{\sqrt{60 * 9^2}}) \simeq \Phi(2,58) = 0.995$$

cioè la probabilità che servano più di 60 lampade è del 99,5%.