Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

17 gennaio 2012

Esercizio 1 Si hanno due urne. Nella prima ci sono due palline rosse (R) e due bianche (B). Nella seconda ci sono tre palline rosse (R) e una bianca (B). **(a)** Si sceglie a caso un'urna e si effettua una estrazione: sia X il colore uscito. Qual è il valore dell'entropia di X?

(b) Supponiamo che la pallina estratta abbia colore bianco: $X = B$. Determinare la probabilità di aver estratto dalla prima urna.

(c) Non so da quale urna ho estratto, ma so che la prima pallina è bianca. Estraggo una seconda volta, senza reimmissione. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia nuovamente bianca?

Soluzione. $\mathbb{P}(X = B) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$, quindi $H(X) = \frac{3}{8}\log_2(8/3) + \frac{5}{8}\log_2(8/5) \simeq 0,9544$. Utilizzando la formula di Bayes si ottiene

$$\mathbb{P}(U_1 \mid X = B) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}.$$

Se ora devo fare una seconda estrazione, sapendo che la prima è uscita bianca, la seconda pallina non può essere bianca se estraggo da U_2; allora

$$\mathbb{P}(X_2 = B \mid X_1 = B) = \mathbb{P}(X_2 = B, U_1 \mid X_1 = B) = \mathbb{P}(X_2 = B \mid U_1, X_1 = B)\mathbb{P}(U_1 \mid X_1 = B) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 2 Sullo spazio degli stati $E = \{1, \dots, 6\}$ si costruisce una catena di Markov con le seguenti regole. Ad ogni tempo, si lancia un dado equilibrato: se esce 1, ci si sposta in tale stato; se esce un numero maggiore dello stato in cui siamo, ci si sposta nello stato corrispondente al numero uscito. Negli altri casi, si rimane nello stato di partenza.

(a) Scrivere la matrice di transizione del sistema. **(b)** Determinare le caratteristiche del sistema: è irriducibile? periodico? regolare? Esiste una misura invariante?è unica? nel caso, determinarla. **(c)** Se al tempo 0 siamo in 3, qual è la probabilità di trovarsi in 4 al tempo $n = 2$? **(d)** Se al tempo 0 siamo in 3, qual è la probabilità di trovarsi in 4 al tempo $n = 234$?

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile, aperiodico, regolare, ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$. Si ottiene $p^{(2)}(3,4) = \frac{1}{6}$; inoltre, dato che il sistema è regolare, $p^{(234)}(3,4) \simeq \pi^*(4) = \frac{1}{12}$.

Esercizio 3 Avendo lanciato una moneta truccata $n = 225$ volte, si è ottenuto un numero di successi $T = 125$. Determinare un intervallo di confidenza al livello $\alpha = 95\%$ per la parità p della moneta. Se avessi voluto un intervallo di confidenza di ampiezza $0,1$, quanti lanci avrei dovuto fare?

Soluzione. L'intervallo bilatero cercato è

$$\hat{p} \in \left(\bar{p} - \phi_{(1+\alpha)/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + \phi_{(1+\alpha)/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right)$$

Sostituendo i valori dati dall'esercizio, $\phi = 1,96$, $\bar{p} = \frac{5}{9}$, si ottiene

$$\hat{p} \in (0,4893\,,\ 0,6218)$$

Perché l'ampiezza sia inferiore a $0,1$ deve essere (prendo l'intervallo massimo, dato che la parità non è lontana da $1/2$) $2\phi_{(1+\alpha)/2}\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0,1$ da cui si ottiene $n = 385$.

Esercizio 4 Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ c, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore della costante c la funzione f definisce una densità di probabilità per una variabile aleatoria X. **(b)** Scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione $F_X(t)$. **(c)** Calcolare la mediana di X. **(d)** Siano $X_1, X_2, \ldots$ copie indipendenti della variabile aleatoria X. Utilizzare la legge dei grandi numeri per studiare il comportamento asintotico di $S_N = \frac{1}{N}(X_1 + \cdots + X_N)$.

Soluzione.

$$c\int_0^1 x^n\,dx + c\int_1^2 dx = c\frac{1}{n+1} + c = c\frac{n+2}{n+1} = 1$$

per $c = \frac{n+1}{n+2}$. Nel nostro caso $n = 3$ quindi $c = \frac{4}{5}$. La funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{1}{5}t^4 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{4}{5}t - \frac{3}{5} & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 1. \end{cases}$$

La mediana si ottiene quando $F_X(t) = \frac{1}{2}$ e quindi vale $t_m = \frac{11}{8}$.

Per poter applicare la legge dei grandi numeri devo calcolare la media (so di avere varianza finita in quanto la X ha densità diversa da 0 solo su un intervallo finito). Si calcola

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 cx^4\,dx + \int_1^2 cx\,dx = c\frac{1}{5} + c\frac{3}{2} = \frac{34}{25} = 1,36$$

la legge dei grandi numeri dice che la media campionaria converge (in probabilità e quasi certamente) alla media $\mathbb{E}[X]$, ossia $S_N \to \frac{34}{25}$.

Esercizio 5 Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,xy^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore della costante c la funzione f definisce una densità di probabilità per un vettore aleatorio $Z = (X, Y)$. **(b)** Determinare le leggi marginali di X e Y; sono indipendenti? **(c)** Determinare la media della variabile aleatoria $U = X - Y$.

Soluzione.
$$\int_0^1 \int_0^x x^\alpha y^\beta \, dy \, dx = \frac{1}{(\alpha+\beta+2)(\beta+1)}$$
quindi $c = 15$. La funzione densità di X è
$$f_X(t) = \int_0^x cxy^2 \, dy = 5t^4 \qquad 0 < t < 1$$
e la sua media $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{6}$; la funzione densità di Y è
$$f_Y(s) = \int_y^1 cxy^2 \, dx = \frac{15}{2}s^2 - \frac{15}{2}s^4$$
e la sua media $\mathbb{E}[Y] = \frac{5}{8}$. Le variabiii non sono indipendenti: entrambe hanno densità positiva su $[0,1]$ ma la congiunta è identicamente nulla nel triangolo $\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$: esiste quindi un insieme dove $f_X(x) f_Y(y) \neq 0 = f(x,y)$. La variabile U ha media $\mathbb{E}[U] = \frac{5}{24}$.