Prova d'esame

*Calcolo delle probabilità e Statistica (12 crediti)*

4 Giugno 2013

**Esercizio 1.** In uno studio meteorologico sono stati raccolti i seguenti dati di temperatura in diverse stazioni sul territorio

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.7 | 15.9 | 14.4 | 14.4 | 13.4 | 10.6 | 12.3 | 14.3 |

Assumendo che la popolazione campionata sia normale, si costruisca un intervallo di confidenza al 95% per il valore medio della temperatura.

*Soluzione.* Si ottiene $\bar{x} = 13.875$ e $\bar{s}^2 = 3.085$ da cui si ottiene

$$\text{I.C.} \quad \left( \bar{x} - t_{0.975}(n-1)\sqrt{\frac{\bar{s}^2}{n}},\ \bar{x} + t_{0.975}(n-1)\sqrt{\frac{\bar{s}^2}{n}} \right) = (12.4, 15.3)$$

$\square$

**Esercizio 2.** Si consideri una passeggiata aleatoria sul grafo, in cui i vari numeri rappresentano la probabilità di utilizzare quel ramo a partire dal vertice. Si scriva esplici-

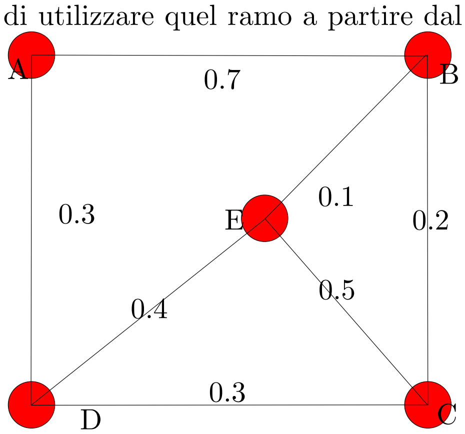


Figure 1. Grafo relativo all'esercizio 2.

tamente la matrice di transizione. Si determini la probabilità di trovarsi al tempo 3 in uno stato definito da una vocale, sapendo di essere partiti al tempo 0 da "C". Si calcoli la distribuzione invariante del sistema.

*Soluzione.* La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

La probabililtà di passare al tempo 3 nello stato $A$ dato da $(T^3)_{31}$ e quella di passare al tempo 3 nello stato $E$ data da $(T^3)_{35}$, da cui si ottiene

$$\mathbb{P}(X_3 \in \{A, E\} \mid X_0 = C) = 0.095 + 0.275 = 0.37$$

La matrice $T$ è bistocastica, quindi la distribuzione invariante è uniforme sugli stati: $\pi = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. $\square$

**Esercizio 3.** Un giocatore lancia una moneta equilibrata ($p = \frac{1}{2}$) $N = 3$ volte e conta il numero di teste uscite $X$. Un secondo giocatore lancia la stessa moneta $N + 1 = 4$ volte e conta il numero di teste uscite $Y$.

Il secondo giocatore vince la partita se $Y > X$ (il numero di teste che ottiene è strettamente maggiore del numero di teste uscite al primo giocatore). **(a)** Si dimostri che il gioco è equilibrato. **(b)** Si discuta cosa succede per $N$ qualsiasi.

*Soluzione.* Se la moneta è equilibrata allora l'uscita di $k$ teste ha la stessa probabilità di uscita di $k$ croci, ossia di $N-k$ teste (per $X$; di $N+1-k$ teste per $Y$). Quindi

$$\mathbb{P}(X=j, Y=k) = \mathbb{P}(X=N-j, Y=N+1-k)$$

e se consideriamo la matrice

$$\begin{array}{ccccc}
\color{blue}{\mathbb{P}(X=0,Y=0)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=0,Y=1)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=0,Y=2)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=0,Y=3)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=0,Y=4)} \\
\color{blue}{\mathbb{P}(X=1,Y=0)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=1,Y=1)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=1,Y=2)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=1,Y=3)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=1,Y=4)} \\
\color{blue}{\mathbb{P}(X=2,Y=0)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=2,Y=1)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=2,Y=2)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=2,Y=3)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=2,Y=4)} \\
\color{blue}{\mathbb{P}(X=3,Y=0)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=3,Y=1)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=3,Y=2)} & \color{blue}{\mathbb{P}(X=3,Y=3)} & \color{red}{\mathbb{P}(X=3,Y=4)}
\end{array}$$

(dove in blu sono i casi in cui vince il primo giocatore e in rosso quelli in cui vince il secondo giocatore) si vede che ad ogni caso in cui vince il primo giocatore ne corrisponde uno, equiprobabile, in cui vince il secondo (tramite la trasformazione $(j,k) \mapsto (N-j, N+1-k)$, quindi la vittoria di un giocatore o dell'altro è equiprobabile.
Formalmente, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > X) &= \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=j+1}^{N+1} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=j+1}^{N+1} \mathbb{P}(X=N-j)\mathbb{P}(Y=N+1-k) \\
&\text{[con il cambio } l = N-j\text{]} \quad = \sum_{l=0}^{N} \sum_{k=N+1-l}^{N+1} \mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=N+1-k) \\
&\text{[con il cambio } n = N+1-k\text{]} \quad = \sum_{l=0}^{N} \sum_{n=0}^{l} \mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=n) \\
&= \mathbb{P}(Y \le X)
\end{aligned}$$

quindi la probabilità di vittoria del primo giocatore è uguale a quella del secondo e il gioco è equilibrato. □

**Esercizio 4.** Un rettangolo ha lati di lunghezza $X$ e $Y$, di cui è data la densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-3x-2y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

**(a)** Determinare la probabilità che entrambi i lati assumano valori minori di 1. **(b)** Determinare media e varianza del perimetro del rettangolo. **(c)** Determinare media e varianza dell'area del rettangolo.

*Soluzione.* Come primo passo calcoliamo le densità marginali

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)\,dy = 3e^{-3x}, \qquad x > 0 \\
f_Y(y) &= \int_0^\infty f(x,y)\,dx = 2e^{-2x}, \qquad y > 0
\end{aligned}$$

ed essendo $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ le due distribuzioni sono indipendenti, con legge esponenziale di parametro dato. Si ottiene allora

$$\mathbb{P}(X < 1, Y < 1) = \mathbb{P}(X < 1)\mathbb{P}(Y < 1) = (1 - e^{-3})(1 - e^{-2}).$$

Si ha $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{9}$ e analogamente $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4}$. La variabile $2p = 2(X + Y)$ ha media $\mathbb{E}[2p] = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$ e varianza (per l'indipendenza di $X$ e $Y$) $\mathrm{Var}(2p) = 4(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}) = \frac{13}{9}$.
Per quanto riguarda l'area $A = XY$ si ottiene, per l'indipendenza di $X$ e $Y$,

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{E}[A^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{Var}(A) = \mathbb{E}[A^2] - \mathbb{E}[A]^2 = \frac{1}{12}.$$

□

**Esercizio 5.** Lanciamo $n = 5$ volte una moneta di parità $p$. Costruiamo quindi un'urna contenente una pallina $B$ e tante palline $R$ quante volte è uscita testa. **(a)** Si determini la probabilità che l'urna contenga solo una pallina. **(b)** Si determini il numero medio di palline nell'urna. **(c)** Si estrae una pallina dall'urna. Sapendo che è uscita la pallina $B$, determinare la probabilità che l'urna ora sia vuota.

*Soluzione* Sia $N$ il numero di palline nell'urna, $N = 1 + X$ dove $X$ il numero di teste uscite nel lancio di $n$ monete di parità $p$. Allora $\mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^n$ quindi $\mathbb{P}(N = 1) = (1 - p)^n$.
Sappiamo che $X$ ha distribuzione binomiale di media $n\,p$ da cui $\mathbb{E}[N] = 1 + n\,p$.
Sia $E$ l'evento "estraggo la pallina $B$". Consideriamo le seguenti probabilità:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E \mid X = k) &= \frac{1}{k+1}, \\
\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{p\,(n+1)} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n+1-j} = \frac{1}{p\,(n+1)} (1 - (1-p)^{n+1})
\end{aligned}$$

quindi, per la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid X_0)\mathbb{P}(X_0)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{p\,(n+1)\,(1-p)^n}{1 - (1-p)^{n+1}}$$

□

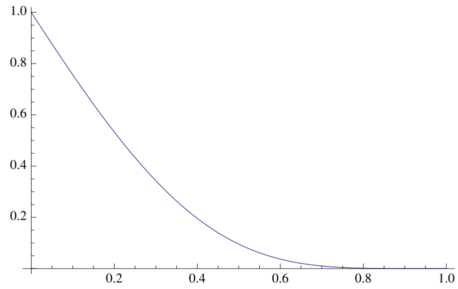


FIGURE 2. Grafico della probabilità $\mathbb{P}(X = 0 \mid E)$ in funzione di $p$.