Prova d'esame
Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)
1 luglio 2013

Esercizio 1. L'altezza media di un gruppo di 10.000 individui è distribuita normalmente con media $\mu = 170$ cm e con deviazione standard $\sigma = 10$ cm.

(a) Qual è la probabilitè che l'altezza di una persona sia compresa fra 155 e 180 cm.
(b) Quante persone sono alte almeno 2 metri.
(c) Quante persone sono alte non più di 1 metro e 60 cm.

Soluzione. Sia X l'altezza di una persona nella popolazione e sia $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$; risulta

$$\mathbb{P}(155 < X < 180) = \mathbb{P}(\frac{155-\mu}{\sigma} < Z < \frac{180-\mu}{\sigma}) = \Phi(1) - \Phi(-1,5) = 0,8413 + 0,9332 - 1 = 0,7745$$

Per avere il numero di persone alte almeno 2 metri, grazie alla legge dei grandi numeri sarà sufficiente moltiplicare la probabilità che una persona sia alta 2 metri per il numero n di persone nel gruppo. Risulta allora

$$\mathbb{P}(X > 200) = \mathbb{P}(Z > \frac{200-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(3) = 0,0013$$

per cui mi aspetto 13 persone alte più di 2 metri. Ancora, risulta

$$\mathbb{P}(X \le 160) = \mathbb{P}(Z \le \frac{160-\mu}{\sigma}) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0,1687$$

per cui mi aspetto 1687 persone alte non più di 160 cm.

Esercizio 2. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 i vertici di un pentagono regolare. Consideriamo la catena di Markov X_n, $n \in \mathbb{N}$, con spazio degli stati $S = \{P_1, \dots P_5\}$ associato alle seguenti transizioni: per ogni indice pari i, la transizione $P_i \to P_j$ ha probabilità $1/5$, mentre per ogni indice i dispari, la transizione $P_i \to P_j$ ha probabilità $1/2$ per $j = 2,\ 4$.

(a) Scrivere la matrice di transizione T associata a X_n.
(b) Mostrare che T è regolare.
(c) Calcolare la misura invariante e descrivere il limte di $T^n(i,j)$, $n \to \infty$, per ogni i, j.

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile (esiste un percorso che visita tutti gli stati con probabilità positiva), aperiodico (tutti gli stati hanno lo stesso periodo e $p_{22} > 0$) quindi regolare e ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{2}{16}, \frac{5}{16}, \frac{2}{16}, \frac{5}{16}, \frac{2}{16})$. Si ottiene, dato che il sistema è regolare, $T^n(i,j) \simeq \pi^*(j)$.

Esercizio 3. Siano X e Y le misure dei lati di un rettangolo; supponiamo che X e Y siano variabili aleatorie indipendenti, equidistribuite, aventi legge uniforme in $(1,3)$.

(a) Determinare la probabilità dell'evento $(X \le t,\ Y \le s)$ per $t, s \in (1,3) \times (1,3)$.
(b) Determinare la legge della variabile aleatoria $S = 2(X+Y)$ che misura il perimetro del rettangolo; in particolare, trovare media e varianza di S.
(c) Determinare la legge della variabile aleatoria $A = X \cdot Y$ che misura l'area del rettangolo; in particolare, trovare media e varianza di A.

Soluzione. Sappiamo che $\mathbb{E}[X] = \frac{3+1}{2} = 2$ e che $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$. Allora $\mathbb{E}[S] = 2(2+2) = 8$ e $V(S) = 4(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$. Per l'indipendenza di X e Y risulta $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 4$ e $\mathbb{E}[A^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = \frac{26}{6} \cdot \frac{26}{6}$ da cui $V(A) = \frac{25}{9}$.

Consideriamo ora la legge congiunta

$$\mathbb{P}(X \le t,\ Y \le s) = \frac{1}{4}(t-1)(s-1).$$

La somma $X+Y$ è distribuita in $(2,6)$. Allora, per $z \in (2,4)$:

$$\mathbb{P}(X+Y \le z) = \int_1^{z-1} \int_1^{z-1-x} \frac{1}{4}\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{z-1} (z-1-x)\,dx = [r = z-1-x] = \frac{1}{4}\int_0^{z-2} r\,dr = \frac{1}{8}(z-2)^2;$$

invece per $z \in (4,6)$:

$$\mathbb{P}(X+Y \le z) = 1 - \mathbb{P}(X+Y \le 8-z) = 1 - \frac{1}{8}(6-z)^2.$$

Si ottiene allora che $S = 2(X+Y)$ ha distribuzione in $(4,12)$ e che la sua funzione di ripartizione vale

$$\mathbb{P}(S \le s) = \mathbb{P}(X+Y \le s/2) = \begin{cases} \frac{1}{8}(\frac{s}{2}-2)^2, & s \in [4,8]; \\ \frac{1}{8}(6-\frac{s}{2})^2, & s \in [8,12]. \end{cases}$$

Consideriamo infine l'area A; risulta distribuita in $(1,9)$ e vale, per $a \in (1,3)$:

$$\mathbb{P}(A \le a) = \int_1^a \int_1^{a/x} \frac{1}{4}\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_1^a (\frac{a}{x}-1)\,dx = \frac{1}{4}\,(a\,\log(a)+1-a)$$

mentre per $a \in (3,9)$ risulta

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \le a) &= \int_1^{a/3}\int_1^3 \frac{1}{4}\,dy\,dx + \int_{a/3}^3 \int_1^{a/x} \frac{1}{4}\,dy\,dx = \int_1^{a/3} \frac{1}{2}\,dx + \int_{a/3}^3 \frac{1}{4}(\frac{a}{x}-1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}(\frac{a}{3}-1) + \frac{1}{4}(a\log(3) - a\log(a/3) - 3 + \frac{a}{3}) \\ &= \frac{a-5}{4} + \frac{1}{4}(2a\log(3) - a\log(a)) \end{aligned}$$

Esercizio 4. Una cassa contiene $M = 30$ componenti, di cui 10 non funzionanti. Sei componenti vengono estratti a caso dalla cassa e usati per montare un sistema. Il sistema funziona se almeno 4 componenti sono funzionanti. Determinare:

(a) la probabilità che il sistema funzioni; e
(b) il numero medio di componenti non funzionanti che vengono utilizzate.

Soluzione. Consideriamo la variabile X "numero di componenti non funzionanti utilizzate". Allora

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{20}{6-k}}{\binom{30}{6}}$$

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,065277	0,261109	0,36718	0,230390	0,067197	0,008488	0,000354

da cui si ottiene che il sistema è funzionante, ossia $(X \le 2)$, ha probabilità $\mathbb{P}(X \le 2) = 0,693571$. Per quanto riguarda la media di X, possiamo osservare che si sono fatte estrazioni senza reimmissione da un'urna, ognuna delle quali ha probabilità $\frac{1}{3}$ di successo, quindi la media di X è pari a $6 \times \frac{1}{3} = 2$.

Esercizio 5. Consideriamo un test diagnostico per evidenziare la presenza di una patologia nel sangue. Il test ha probabilità 0.9 di individuare correttamente la presenza della patologia, ma sappiamo che dà risultato positivo (ossia, indica la presenza della patologia) anche nel 15% degli esami compiuti su soggetti sani.

Supponiamo che la presenza della patologia nella popolazione sia pari al 5%.

(a) Determinare la probabilità che un soggetto sia malato dopo che il test ha dato risultato positivo.
(b) Determinare la probabilità che un soggetto sia sano dopo che il test ha dato risultato negativo.

Soluzione. Indichiamo con A l'evento "soggetto malato" e con T l'evento "il test è positivo". Sappiamo che $\Pr(A) = 0.05$, $\Pr(T \mid A) = 0.9$, $\Pr(T \mid A^c) = 0.15$. Allora

$$\Pr(A \mid T) = \frac{\Pr(T \mid A)\Pr(A)}{\Pr(T \mid A)\Pr(A) + \Pr(T \mid A^c)\Pr(A^c)} = \frac{90}{375} = 0,24$$

e

$$\Pr(A^c \mid T^c) = \frac{\Pr(T^c \mid A^c)\Pr(A^c)}{\Pr(T^c \mid A^c)\Pr(A^c) + \Pr(T^c \mid A)\Pr(A)} = \frac{85 \cdot 95}{85 \cdot 95 + 10 \cdot 5} \simeq 0,9938$$