Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

2 settembre 2013

Esercizio 1. Si vuole determinare l'altezza media di una popolazione. Si estrae un campione di ampiezza $N = 36$ e si determina l'altezza media $\bar{\mu} = 170$ cm e la deviazione standard campionaria $s = 10$ cm. Si determini l'intervallo di confidenza al livello 95% per l'altezza media della popolazione.
Si vuole quindi ingrandire il campione in modo che, allo stesso livello di confidenza, l'ampiezza dell'intervallo di stima sia inferiore a 2 cm. Si determini il valore minimo di N che dobbiamo scegliere.

Soluzione. L'intervallo di confidenza è

$$\bar{\mu} \pm t_{(1+\alpha)/2}(N-1)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 170 \pm 2.0301\frac{10}{6} = 170 \pm 3.3835 = \big(166.6165,\ 173.3835\big)$$

Per rendere minore l'ampiezza dell'intervallo, supponendo che il valore di deviazione standard campionaria rimanga costante, dobbiamo imporre la condizione

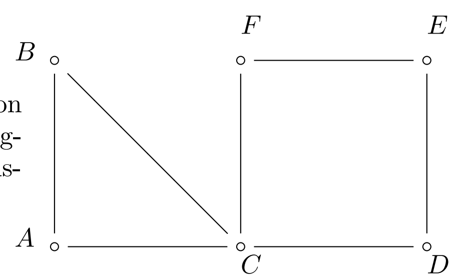
$$t_{(1+\alpha)/2}(N-1)\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 1;$$

dato che ci aspettiamo N grande, sostituiamo $\phi_{(1+\alpha)/2} = 1.96$ al quantile t; si ottiene infine la stima

$$\sqrt{N} = 19.6 \Longrightarrow N = 384.16 \simeq 385$$

Esercizio 2.

Consideriamo la catena di Markov X_n, $n \in \mathbb{N}$, con spazio degli stati $S = \{A, \dots F\}$ associato alla passeggiata casuale sul grafo con probabilità uniformi di uscita da ogni vertice.



(a) Scrivere la matrice di transizione T associata a X_n.
(b) Mostrare che T è regolare.
(c) Calcolare la misura invariante e descrivere il limite di $T^n(i,j)$, $n \to \infty$, per ogni i, j.

Soluzione. La matrice di transizione del sistema è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è irriducibile, aperiodico, regolare, ergodico; tutti gli stati sono ricorrenti positivi; la distribuzione invariante è anche limite e vale $\pi^* = (\frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11})$. Si ottiene, dato che il sistema è regolare, $T^n(i,j) \simeq \pi^*(j)$.

Esercizio 3. Consideriamo la seguente funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} C & \text{se } x \in [0,1] \text{ e } 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare il valore della costante C affinché $f(x,y)$ sia la funzione di densità di probabilità di un vettore aleatorio $Z \equiv (X,Y)$. Calcolare inoltre:

1. le densità marginali f_X e f_Y e dire se si tratta di variabili aleatorie indipendenti;
2. la probabilità dell'evento $\{X \leq \frac{1}{2}\}$;
3. la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $W = X/Y$.

Soluzione. Per ottenere C è sufficiente osservare che è pari a

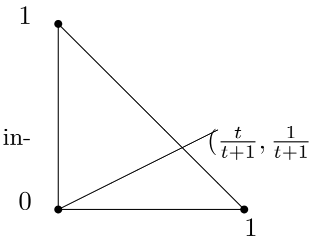
$$C^{-1} = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$$

da cui $C = 2$. Le leggi marginali si ottengono dalle espressioni

$$f_X(x) = 2\int_0^{1-x} dy = 2(1-x), \qquad f_Y(y) = 2\int_0^{1-y} dx = 2(1-x)$$

dato che $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, le due variabili aleatorie non sono indipendenti. Dall'espressione precedente si ottiene che

$$\mathbb{P}(X \le 1/2) = \int_0^{1/2} f_X(x)\, dx = \int_0^{1/2} 2(1-x)\, dx = \frac{3}{4}.$$



La variabile aleatoria W ha distribuzione su $(0,\infty)$ e vale $\mathbb{P}(W \le t) = \mathbb{P}(X \le tY)$ da cui

$$\mathbb{P}(W \le t) = \int_0^{t/(t+1)} \int_{x/t}^{1-x} 2\, dy\, dx = 2\int_0^{t/(t+1)} (1 - x(1+1/t))\, dx$$

$$= \frac{2t}{t+1} - \frac{t+1}{t}\frac{t^2}{(t+1)^2} = \frac{t}{t+1}.$$

Esercizio 4. Abbiamo a disposizione 3 urne: l'urna U_1 contiene $1 \times B$ e $5 \times R$, l'urna U_2 contiene $3 \times B$ e $3 \times R$ e l'urna U_3 contiene $5 \times B$ e $1 \times R$.

Lancio un dado equilibrato e estraggo da U_1 se esce 1, 2 oppure 3; da U_2 se esce 4 oppure 5; da U_3 se esce 6.

(a) Determinare la probabilità di estrarre una pallina B.
(b) Determinare la probabilità di aver estratto da U_1 sapendo di aver estratto una pallina B.
(c) Effettuo una seconda estrazione, senza reimmissione, dalla stessa urna. Sapendo che alla prima è stata estratta una pallina B, qual è la probabilità di estrarre ancora B?

Soluzione.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(B \mid U_x)\mathbb{P}(U_x) = \frac{1}{6}\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{7}{18} = 0.3\bar{8}$$

$$\mathbb{P}(U_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/36}{14/36} = \frac{3}{14} = 0.214285714$$

Indichiamo con B_2 l'evento "alla seconda estrazione esce ancora B", allora

$$\mathbb{P}(B_2 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(B_2 \cap B \mid U_x)\mathbb{P}(U_x)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{1}{6}}{\frac{14}{36}} = \frac{16}{35} = 0.457142857$$

Esercizio 5. Una successione di variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite $\{X_j,\ j = 1,\dots,n\}$ ha legge di Poisson di parametro λ.

(a) Determinare la media e la varianza di $S_n = X_1 + \dots X_n$;
(b) Sia $\bar{X} = \frac{1}{n} S_n$ la media aritmetica delle $\{X_j\}$. Trovate la distribuzione di $\bar{X}$, la sua media e la sua varianza. Dimostrate che $\bar{X}$ converge in probabilità e determinate la legge limite.

Soluzione. Essendo X una distribuzione di Poisson di media $\mathbb{E}[X] = \lambda$ e varianza $\mathrm{V}[X] = \lambda$, si ha

$$\mathbb{E}[S_n] = n\lambda, \qquad \mathrm{V}[S_n] = n\lambda.$$

La distribuzione di $\bar{X}$ si ottiene osservando che $\bar{X}$ prende valori sui razionali del tipo $\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots,$ e vale l'eguaglianza

$$\Pr(\bar{X} = \frac{k}{n}) = \Pr(S_n = k) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}.$$

Dalle proprietà di linearità di media e varianza si ottiene che $\bar{X}$ verifica

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \lambda, \qquad \mathrm{V}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\lambda.$$

Dalla legge dei grandi numeri, infine, si osserva che $\bar{X}$ converge in probabilità a λ.