Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

13 gennaio 2014

Esercizio 1 Si sceglie un numero X a caso sull'intervallo $(0,1)$ e un secondo numero Y a caso in $(0,X)$. Si descriva la legge della variabile aleatoria A che misura l'area del rombo avente come base X e altezza Y. Calcolare media e varianza di A.

Soluzione. Il vettore aleatorio (X,Y) ha distribuzione

$$f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) = 1 \cdot \frac{1}{x} 1_{(0,1)}(x) 1_{(0,x)}(y)$$

quindi è diverso da zero nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.
Si ottiene che i possibili valori di A sono compresi tra 0 e $\frac{1}{2}$ (quando $X = Y = 1$) e la distribuzione di probabilità è data da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \le a) = \mathbb{P}(\frac{1}{2}XY \le a) &= \int_0^{\sqrt{2a}} \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2a}}^1 \int_0^{2a/x} f(x,y)\,dy\,dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2a}} 1\,dx + \int_{\sqrt{2a}}^1 \frac{2a}{x^2}\,dx = \sqrt{2a} + 2a\left(-\frac{1}{x}\right)_{x=\sqrt{2a}}^{x=1} = 2\sqrt{2a} - 2a \qquad 0 < a < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Derivando rispetto a a si ottiene $f_A(a) = \sqrt{\frac{2}{a}} - 2$ da cui

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A] &= \int_0^{\frac{1}{2}} [\sqrt{2a} - 2a]\,da = \left(\sqrt{2}\frac{a^{3/2}}{3/2} - a^2\right)_{a=0}^{a=1/2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \mathbb{E}[A^2] &= \int_0^{\frac{1}{2}} [a\sqrt{2a} - 2a^2]\,da = \left(\sqrt{2}\frac{a^{5/2}}{5/2} - \frac{2}{3}a^3\right)_{a=0}^{a=1/2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60} \\ \mathrm{Var}(A) &= \frac{1}{60} - \frac{1}{12^2} = \frac{7}{720}\end{aligned}$$

Esercizio 2 Eseguiamo un sondaggio per decidere il livello di soddisfazione dei clienti per il servizio assistenza Acme Inc.; sui 64 clienti contattati, 37 si dichiarano soddisfatti.

1. Costruire un intervallo di confidenza al 90% per la frequenza di clienti soddisfatti.
2. Quanti clienti avrei dovuto contattare per avere un intervallo di confidenza al 95% per la frequenza di ampiezza 0,06?

Soluzione. I.C. per la frequenza: $\bar{p} \pm z_{0,95}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0,578 \pm 0,102$;
risolvendo in n l'equazione $0,06 = 2z_{0,975}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ si ottiene $n = 1042$.

Esercizio 3 Una linea di produzione è sottoposta a un doppio controllo di qualità. Indichiamo con L il materiale lavorato; questo viene sottoposto a una prima scrematura, i cui esiti, su base storica, si possono così riassumere: $p(L,A) = 50\%$, $p(L,L) = 30\%$, $p(L,S) = 20\%$, dove A indica il materiale approvato, S il materiale scartato e $p(x,y)$ la probabilità che il materiale in stato x venga etichettato con y. Il materiale A viene sottoposto a un secondo screening, con i seguenti possibili esiti: $p(A,S) = 10\%$, $p(A,L) = 30\%$, $p(A,A) = 20\%$, $p(A,D) = 40\%$, dove D rappresenta il materiale in stato definitivo.

Determinare la percentuale di materiale lavorato che, al termine del processo, viene considerato in stato definitivo e la percentuale di materiale che viene scartato. Determinare infine il tempo medio di permanenza nel sistema del materiale.

Soluzione. Sullo spazio degli stati $E = \{L, A, S, D\}$, la matrice di transizione è

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gli stati S e D sono assorbenti. Le probabilità di assorbimento in D sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_L = 0,3f_L + 0,5f_A \\ f_A = 0,3f_L + 0,2f_A + 0,4 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_L = \frac{20}{41} \\ f_A = \frac{28}{41} \end{cases}$$

quindi la percentuale di materiale lavorato che viene accettato (diventa definitivo) è il 49%, la percentuale di materiale che viene scartato è il 51%.

Il tempo medio di assorbimento in uno stato assorbente è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} t_L = 0,3t_L + 0,5t_A + 1 \\ t_A = 0,3t_L + 0,2t_A + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_L = \frac{130}{41} \\ t_A = \frac{100}{41} \end{cases}$$

Esercizio 4 Siano b e c due numeri estratti in quest'ordine, senza reimmissione, da un'urna che contiene le palline numerate da 1 a 10. Si consideri il polinomio $x^2 + bx + c$. Si determini la probabilità che il polinomio abbia due radici reali e la probabilità che abbia una radice reale di molteplicità due.

Soluzione. Il polinomio ha radici reali se $\Delta = b^2 - 4c \geq 0$; i possibili esiti di (b, c) sono le 90 coppie di numeri $\{(1, 2), \dots, (1, 10), (2, 1), \dots, (10, 9)\}$. Possiamo elencare le coppie che verificano la condizione $b^2 \geq 4c$:

$$\begin{aligned} &(2,1); \\ &(3,1), (3,2); \\ &(4,1), (4,2), (4,3); \\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6); \\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,7), (6,8), (6,9); \\ &(7,*); (8,*); (9,*); (10,*) \end{aligned}$$

dove $(7, *)$ indica tutte le coppie in cui $b = 7$ e così per i seguenti. In totale sono 55, quindi la probabilità richiesta è 55/90.
Le radici coincidenti si hanno quanto $b^2 = 4c$ quindi per le coppie

$$(2,1); (6,9)$$

quindi l'evento cercato ha probabilità 2/90.

Esercizio 5 Un componente critico del motore di un aereo ha una probabilità $p = 0,85$ di essere funzionante e deve essere sostituito prima della partenza in caso di malfunzionamento. A causa della difficoltà di verifica, il test di controllo ha una precisione del 95% sui componenti funzionanti e una precisione del 99% sui componenti difettosi.

1. Si esegue il test su un componente e risulta difettoso. Qual è la probabilità che sia, in realtà, funzionante?

2. Si esegue il test su un componente e risulta funzionante. Qual è la probabilità che sia, in realtà, rotto?

Soluzione. Indichiamo con D e F gli eventi che il componente sia difettoso (rispettivamente funzionante) e con $T+$, $T-$ l'esito del test. Allora

$$\mathbb{P}(F \mid T-) = \frac{\mathbb{P}(T- \mid F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T-)} = \frac{\frac{5}{100}\frac{85}{100}}{\frac{5}{100}\frac{85}{100} + \frac{99}{100}\frac{15}{100}} = \frac{85}{382} \simeq 0,222513089$$

$$\mathbb{P}(D \mid T+) = \frac{\mathbb{P}(T+ \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T+)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{15}{100}}{\frac{1}{100}\frac{15}{100} + \frac{95}{100}\frac{85}{100}} = \frac{3}{1618} \simeq 0,001854141$$