# Prova d'esame
*Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)*
16 giugno 2014

---

**Esercizio 1** Lanciamo una moneta equilibrata 5 volte. Indichiamo con $N$ il numero di cambi di faccia nella successione dei lanci (se $TTTTT$ allora $N = 0$, se $TCTCT$ allora $N = 4$, ad esempio).

1. Determinare la distribuzione di probabilità di $N$.
2. Qual è il valore più probabile? Qual è la sua media?

*Soluzione.* Dato che la prima moneta non determina variazioni, possiamo supporre che sia $T$. Consideriamo i vari eventi. $N = 0$ corrisponde all'uscita di 4 facce $T$ consecutive, quindi ha probabilità $(1/2)^4$. Il caso $N = 1$ corrisponde alle successioni $\{CCCC, TCCC, TTCC, TTTC\}$ quindi ha probabilità $4(1/2)^4$. Osserviamo che il caso $N = 1$ corrisponde a scegliere un posto su 4 (il posto in cui avviene il cambio di faccia). Il caso $N = 2$ corrisponde a $\{CTTT, CCTT, CCCT, TCCT, TCTT, TTCT\}$ quindi ha probabilità $6(1/2)^4$. Anche in questo caso si ottiene la probabilità contando il numero di posti in cui inserire due cambi di faccia. Allora posso concludere che $N = 3$ ha probabilità $\binom{4}{3}(1/2)^4$ e $N = 4$ ha probabilità $(1/2)^4$.

La distribuzione di probabilità di $N$ è allora una binomiale $B(4, \frac{1}{2})$; il valore più probabile è $N = 2$ e la media è $\mathbb{E}[N] = 2$.

**Esercizio 2** Un peschereccio scarica 1200 pesci che vengono divisi in scatole da 60 pesci ciascuna. La probabilità che un pesce pescato sia della razza *Branzinus doratus* è pari al 12%. Determinare la probabilità che una scatola contenga almeno 6 branzini.
Dare una risposta numerica, con almeno due cifre decimali, usando la formula corretta **oppure** usando una approssimazione adeguata.

*Soluzione.* Il numero di branzini in una scatola segue una legge binomiale di parametri $n = 60$ e $p = 0.12$, che possiamo approssimare con una legge di Poisson di parametro $\lambda = np = 7.2$; la probabilità che i branzini siano almeno 6 è espressa da

$$\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X = k) = 0.7241$$

**Esercizio 3** Due clienti, Alice e Bob, entrano in una banca. Ogni cliente, indipendentemente dall'altro, impiega per la sua operazione un tempo esponenziale di parametro $\lambda$.

1. Se la banca ha due sportelli liberi, determinare il tempo medio che impiega il più veloce a uscire (cioè, quello dei due che esce per primo) e il tempo medio che impiega il più lento (ossia, l'ultimo a uscire).
2. Se la banca ha un solo sportello, determinare il tempo medio che impiega il più veloce a uscire e il tempo medio che impiega il più lento.

*Soluzione.* Indichiamo con $X$ e $Y$ i tempi necessari per le operazioni allo sportello di Alice e Bob, rispettivamente. Se la banca ha un solo sportello, il primo cliente che arriva (diciamo Alice) impiega in media $1/\lambda$ e, dopo di lei, Bob impiega ancora, in media, $1/\lambda$, quindi il più veloce impiega $\frac{1}{\lambda}$ e il più lento $\frac{2}{\lambda}$.

Se la banca ha due sportelli, il più veloce impiega un tempo pari a $V = \min(X, Y)$ e il più lento un tempo pari a $L = \max(X, Y)$. Determiniamo la distribuzione di $V$:

$$\mathbb{P}(V > t) = \mathbb{P}(X > t, Y > t) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = e^{-\lambda t}e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}$$

quindi $V$ ha legge esponenziale di parametro $2\lambda$ il il tempo medio impiegato dal più veloce è $\mathbb{E}[V] = \frac{1}{2\lambda}$. Per determinare la distribuzione di $L$ si ha

$$\mathbb{P}(L < t) = \mathbb{P}(X < t, Y < t) = \mathbb{P}(X < t)\mathbb{P}(Y < t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$$

quindi $L$ ha densità

$$f(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t})^2 = 2\lambda(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})$$

e media

$$\mathbb{E}[L] = \int_0^\infty 2\lambda t(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty t(e^{-t} - e^{-2t})\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2\lambda}.$$

**Esercizio 4** Consideriamo un pentagono i cui vertici sono numerati da 1 a 5. Supponiamo che da ogni vertice pari ci si possa spostare in uno dispari, con probabilità uniforme; mentre da uno dispari ci si può spostare in uno qualsiasi degli altri vertici, con probabilità uniforme.

1. Scrivere la matrice di transizione del sistema.
2. Scrivere la matrice di transizione a due passi.
3. Determinare il periodo del sistema.
4. Determinare la distribuzione invariante del sistema.

*Soluzione.*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 14/48 & 6/48 & 11/48 & 6/48 & 11/48 \\ 1/6 & 1/4 & 1/6 & 1/4 & 1/6 \\ 11/48 & 6/48 & 14/48 & 6/48 & 11/48 \\ 1/6 & 1/4 & 1/6 & 1/4 & 1/6 \\ 11/48 & 6/48 & 11/48 & 6/48 & 14/48 \end{pmatrix}$$

quindi il sistema è a-periodico, regolare, ergodico. La distribuzione invariante è data da

$$\pi = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/6 & 2/9 & 1/6 & 2/9 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 5** I seguenti valori rappresentano l'altezza, in metri, di un insieme di atleti:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,94 | 1,71 | 1,74 | 1,71 | 1,9 | 1,79 | 1,78 | 1,75 | 1,83 | 1,83 | 1,88 | 1,73 | 1,72 | 1,88 | 1,81 |

Tracciare un istogramma dei dati utilizzando 5 colonne.
Costruire un intervallo di confidenza al 95% per l'altezza media

*Soluzione.* Otteniamo dai dati $\bar{x} = 1.809$ e $s^2 = 0.0071$ da cui

$$\left(\bar{x} - t_{0.975}(14)\sqrt{\frac{s^2}{15}},\ \bar{x} + t_{0.975}(14)\sqrt{\frac{s^2}{15}}\right) = (1.7626,\ 1.856)$$