Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità Statistica (6 crediti)

9 giugno 2015

Esercizio 1 Si risponda alle seguenti domande.

1. Alfa e Beta giocano con monete equilibrate. Alfa ne lancia 3, Beta ne lancia 4. Beta vince se ottiene più facce "T" di Alfa. Qual è la probabilità di vittoria di Beta?

2. Da un mazzo di 52 carte (4 semi, 13 carte per seme) si forma una mano di 13 carte. Da questa mano si estrae una carta. Qual è la probabilità che questa carta sia un Asso?

3. Si lancia una coppia di dadi a 6 facce, numerati, equilibrati e se ne fa la somma. Sapendo che la somma non è un numero pari, qual è la probabilità che la somma sia un numero primo?

Soluzione.

1. Il modo più diretto è il seguente. Consideriamo le probabilità di vittoria condizionate a ognuno dei possibili esiti di Alfa, quindi sommiamo pesando rispetto alla probabilità corrispondente. Indicando con $A = x$ l'evento A ottiene x teste,

$$\mathbb{P}(\text{B vince} \mid A = 0) = \frac{15}{16}, \qquad \mathbb{P}(\text{B vince} \mid A = 1) = \frac{11}{16},$$
$$\mathbb{P}(\text{B vince} \mid A = 2) = \frac{5}{16}, \qquad \mathbb{P}(\text{B vince} \mid A = 3) = \frac{1}{16},$$

si ottiene

$$\mathbb{P}(\text{B vince}) = \sum \mathbb{P}(\text{B vince} \mid A = x)\, \mathbb{P}(A = x) = \frac{15}{16}\frac{1}{8} + \frac{11}{16}\frac{3}{8} + \frac{5}{16}\frac{3}{8} + \frac{1}{16}\frac{1}{8} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}.$$

In alternativa, si potrebbe notare che $\mathbb{P}(B > A) = \mathbb{P}(B \leq A)$ usando ad esempio la simmetria del sistema dovuta al fatto che la moneta è equilibrata; siccome l'unione dei due eventi è tutto Ω, ognuno dei due ha probabilità $\frac{1}{2}$.

2. Nella mano di 13 carte, vi possono essere da 0 a 4 Assi: la probabilità che ve ne siano x è

$$\mathbb{P}(nA = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}}.$$

Se sono x, la probabilità di pescare un Asso come prima carta di questa mano è $\frac{x}{13}$; quindi la probabilità di pescare un Asso è

$$\mathbb{P}(A) = \sum \frac{\binom{4}{x}\binom{48}{13-x}}{\binom{52}{13}} \frac{x}{13} = \frac{1}{13}.$$

In alternativa, si potrebbe notare che la composizione della mano da 13 carte non fornisce nessuna informazione aggiuntiva, quindi la probabilità di pescare un Asso rimane la stessa che da dentro il mazzo completo, ossia $\frac{1}{13}$.

3. I possibili esiti sono tutti gli interi tra 2 e 12, con diverse probabilità di uscita. Tra questi, i numeri primi sono $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. La soluzione si ottiene quindi dalla somma

$$\sum_{x \text{ primo}} \mathbb{P}(S = x \mid x \text{ dispari}) = \sum_{x \text{ primo}} \frac{\mathbb{P}(S = x)}{\mathbb{P}(x \text{ dispari})} = \frac{2+4+6+2}{18} = \frac{7}{9}.$$

Esercizio 2 Supponiamo che il vettore aleatorio (X, Y) possieda una funzione densità costante sul triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$:

$$f(y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in T, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare c e calcolare le densità marginali. Discutere l'indipendenza di X e Y.
2. Calcolare $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2)$, $\mathbb{P}(Y < X)$.

Soluzione. Dato che la funzione è costante sul triangolo T, il valore della costante si ottiene come reciproco dell'area del triangolo stesso, pari a

$$A(T) = \frac{b \cdot h}{2} = 1$$

quindi $c = 1$. Per calcolare le densità marginali, si ottiene

$$f_X(x) = \int \mathbf{1}_T(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1-|x|} \mathrm{d}y = 1 - |x|, \qquad x \in (-1, 1)$$
$$f_Y(y) = \int \mathbf{1}_T(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_{y-1} 1 - y\,\mathrm{d}x = 2 - 2y, \qquad y \in (0, 1);$$

dato che $f_X(x) f_Y(y) \neq 1$ in T, le due variabili non sono indipendenti.

Infine, per ottenere le probabilità richieste basta vedere l'area delle figure ottenute intersecando con T. Così, $(X < 0) \cap T$ è il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 1)$ quindi $\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{2}$; $(X < 1/2, Y < 1/2) \cap T$ è il trapezio di vertici $(-1, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1/2)$ e $(-1/2, 1/2)$ quindi $\mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2) = \frac{5}{8}$; infine, $(Y < X) \cap T$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1/2, 1/2)$ quindi $\mathbb{P}(Y < X) = \frac{1}{4}$.

Esercizio 3 L'azienda Acme$^{\text{TM}}$ produce lampadine il cui tempo di vita segue una legge esponenziale di parametro λ. Su un campione di $n = 81$ lampadine, viene trovato un tempo di vita medio pari $\bar{x} = 620h$ (h = ore) e varianza campionaria $s^2 = 380700h^2$.

1. Si determini una stima puntuale $\hat{\lambda}$ di λ;
2. si calcoli un intervallo di confidenza bilatero di livello $\alpha = 0,95$ per la vita media λ^{-1};
3. si calcoli un intervallo di confidenza di livello $\alpha = 0,95$ per la vita media λ^{-1} del tipo $(0, c)$.

Soluzione. Lo stimatore puntuale di λ è $\frac{n-1}{x_1 + \cdots + x_n} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{\bar{x}} = \frac{80}{81}\frac{1}{620} = 1.593 \times 10^{-3}$.
L'intervallo di confidenza bilatero vale

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = (483.3,\ 756.7)$$

mentre l'intervallo unilatero è

$$\left(0, \bar{x} + t_\alpha(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = (0, 734.3).$$

Esercizio 4 Una linea di produzione, storicamente, produce il 20% di prodotti difettosi. Viene quindi allestito un posto di controllo, formato da due ispettori posti in serie. Il primo blocca il 90% dei prodotti difettosi che vede e anche il 5% dei prodotti buoni; i prodotti passati al primo test vengono esaminati esaminati dal secondo ispettore, che blocca il 50% dei prodotti difettosi che vede e anche il 10% dei prodotti buoni.

1. Determinare la probabilità che un prodotto buono passi entrambi i controlli.
2. Determinare la probabilità che un prodotto difettoso passi entrambi i controlli.
3. Determinare la probabilità che un prodotto accettato sia effettivamente buono.

Soluzione. Indichiamo con B l'evento "il prodotto è buono", con P_1 il fatto che passi il primo controllo e con P_2 il fatto che passi il secondo controllo. Se un prodotto è buono, allora passa entrambi i controlli con probabilità

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \mid B) = 0.95 \times 0.9 = 0.855;$$

se il prodotto è difettoso, allora passa entrambi i controlli con probabilità

$$\mathbb{P}(P_1 cap P_2 \mid \not B) = 0.1 \times 0.5 = 0.05.$$

La probabilità che un prodotto qualsiasi passi entrambi i controlli è quindi

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = 0.855 \times 0.8 + 0.05 \times 0.2 = 0.694$$

e la probabilità che un prodotto che passi entrambi i controlli sia effettivamente buono è

$$\mathbb{P}(B \mid P_1 \cap P_2) = \frac{\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)} = \frac{0.855 \times 0.8}{0.694} = 0.986$$

Esercizio 5 Il tempo di attesa X per ricevere una telefonata segue una legge di potenza $f(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ per $x > 0$ (il tempo è misurato in minuti).

1. Determinare la probabilità di dover attendere almeno t minuti; di dover attendere almeno $2t$ minuti.
2. Sapendo di aver atteso t minuti, determinare la probabilità di dover attendere almeno altri t minuti e verificare che X non soddisfa la proprietà di assenza di memoria.
3. Determinare la media e la varianza di X (se esistono).

Soluzione. Si ottiene

$$\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1+t)^2}, \qquad \mathbb{P}(X > 2t) = \frac{1}{(1+2t)^2};$$

la probabilità di attendere almeno $2t$ minuti, sapendo di aver atteso almeno t, è

$$\mathbb{P}(X > 2t \mid X > t) = \frac{1/(1+2t)^2}{1/(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+2t)^2} \neq \frac{1}{(1+t)^2}$$

quindi non vale la proprietà di assenza di memoria.

Per quanto riguarda i momenti di X, si ottiene che la media è finita e vale $\mathbb{E}[X] = 1$, mentre la varianza non esiste finita.

Esercizio 6 Consideriamo la catena di Markov $\{X_n\}$ avente spazio degli stati $E = \{0, 1, 2\}$ e matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ p & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che la catena è aperiodica, irriducibile e quindi regolare.
2. Determinare la probabilità di trovarsi in $\{1\}$ al tempo $n = 2$ sapendo che al tempo iniziale $n = 0$ si è in $\{0\}$.
3. Determinare la misura invariante del sistema.

Soluzione. Dato che esiste almeno un elemento che contiene 1 nell'orbita, allora il periodo di quell'elemento è 1; dato che la catena è irriducibile (il percorso $0 \to 1 \to 2 \to 0$ ha probabilità positiva) allora il periodo è lo stesso per tutti gli stati, quindi la catena è periodica, irriducibile e quindi regolare.

Calcolando T^2 si ottiene che la probabilità di passaggio dallo stato 0 allo stato 1 in due passi è p^2.

Infine, la misura invariante del sistema è $(p(1-p), p^2, 1-p)$.