

1a. (4 punti) Calcolate la soluzione $t \mapsto y(t)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2t^2 + 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

1b. (4 punti) Calcolate il valore massimo dell'area della superficie *laterale* di un cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio R .

2a. (4 punti) Calcolate, in funzione del parametro reale α ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{1-\cos x} t^2 e^{t^2} dt.$$

2b. (4 punti) Sia $\theta \in \mathbf{R}$. Trovate, quando esiste, la soluzione $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}.$$

3a. (4 punti) La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ è definita da $f(x) := (|x - 2| - 1) e^{-x}$.

Trovate i punti di massimo e minimo assoluto di f in $[0, +\infty)$ (se tali punti esistono e motivando le vostre risposte) e disegnate approssimativamente il grafico di f in $[0, +\infty)$.

3b. (4 punti) Sia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$g(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

Disegnate approssimativamente il grafico di $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $G(x) := \int_{-1}^x g(t) dt$.