ANALISI MATEMATICA 1 – Appello1		12 gennaio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
FISICA ○	**MATEMATICA** ○	Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1.
$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin(4x)\, dx =$$

$\boxed{a}$ $-\pi^2$; $\boxed{b}$ $-4\pi^2$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ $-2\pi^2$.

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) := x + \int_0^{x^2} e^t\, dt$. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$ è: $\boxed{a}$ $y = (2e+1)x - e - 1$; $\boxed{b}$ $y = (e+1)(x-1)+e$; $\boxed{c}$ $y = (e+1)x - 1$; $\boxed{d}$ $y = (2e+1)(x-1)$.

3. L'insieme dei numeri $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^\beta} = 0$ è: $\boxed{a}$ $\{\beta < 3\}$; $\boxed{b}$ $\{\beta < 2\}$; $\boxed{c}$ $\{\beta < 3/2\}$; $\boxed{d}$ $\{\beta < 2/3\}$.

4. Sia $f \in C^2([0,1])$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera? $\boxed{a}$ L'immagine di f contiene l'intervallo di estremi $f(0)$ e $f(1)$; $\boxed{b}$ Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$ allora $f(0) < f(1)$; $\boxed{c}$ Se f è invertibile in $[0,1]$ allora $f'(x) \neq 0$ in $[0,1]$; $\boxed{d}$ Se $x_0 \in [0,1]$ è il punto di massimo di f in $[0,1]$ allora $f''(x_0) \leq 0$.

5. Il coefficiente di a^5 nello sviluppo di $(2+a)^7$ è: $\boxed{a}$ 224; $\boxed{b}$ 84; $\boxed{c}$ 56; $\boxed{d}$ 448.

6. L'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x : x \geq 0\}$; $\boxed{b}$ $\{x : |x| \leq 1, x \neq 0\}$; $\boxed{c}$ $\mathbf{R}$; $\boxed{d}$ $\{x : |x| \leq 1\}$.

7. Quale delle seguenti espressioni è reale per ogni $z \in \mathbf{C}$? $\boxed{a}$ $z|z|$; $\boxed{b}$ $(z+i)(\bar{z}+i)$; $\boxed{c}$ $z + 1 - \overline{(z+1)}$; $\boxed{d}$ $(z+1)(\bar{z}+1)$.

8. Qual è il più grande intervallo contenente $x = 0$ nel quale la funzione $g(x) := x^3 e^{-x}$ è invertibile? $\boxed{a}$ $\mathbf{R}$; $\boxed{b}$ $[-1, +\infty)$; $\boxed{c}$ $(-\infty, 3]$; $\boxed{d}$ $(-\infty, 1]$.

ANALISI MATEMATICA 1 – Appello1		12 gennaio 2016
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
FISICA ○	**MATEMATICA** ○	| | | | Test |Es1 |Es2 |Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Quale delle seguenti espressioni è reale per ogni $z \in \mathbf{C}$? $\boxed{a}$ $(z+i)(\bar{z}+i)$; $\boxed{b}$ $z+1-\overline{(z+1)}$; $\boxed{c}$ $(z+1)(\bar{z}+1)$; $\boxed{d}$ $z|z|$.

2. Il coefficiente di a^5 nello sviluppo di $(2+a)^8$ è: $\boxed{a}$ 84; $\boxed{b}$ 56; $\boxed{c}$ 448; $\boxed{d}$ 224.

3. $$\int_0^{2\pi} x^2 \sin(2x)\, dx =$$
$\boxed{a}$ $-4\pi^2$; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ $-2\pi^2$; $\boxed{d}$ $-\pi^2$.

4. L'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\{x : |x| \leq 1, x \neq 0\}$; $\boxed{b}$ $\mathbf{R}$; $\boxed{c}$ $\{x : |x| \leq 1\}$; $\boxed{d}$ $\{x : x \geq 0\}$.

5. Sia $f \in C^2([0,1])$. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera? $\boxed{a}$ Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$ allora $f(0) < f(1)$; $\boxed{b}$ Se f è invertibile in $[0,1]$ allora $f'(x) \neq 0$ in $[0,1]$; $\boxed{c}$ Se $x_0 \in [0,1]$ è il punto di massimo di f allora $f''(x_0) \leq 0$; $\boxed{d}$ L'immagine di f contiene l'intervallo di estremi $f(0)$ e $f(1)$.

6. Qual è il più grande intervallo contenente $x = 0$ nel quale la funzione $g(x) := x^3 e^{-x}$ è invertibile? $\boxed{a}$ $[-1, +\infty)$; $\boxed{b}$ $(-\infty, 3]$; $\boxed{c}$ $(-\infty, 1]$; $\boxed{d}$ $\mathbf{R}$.

7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) := x + \displaystyle\int_0^{x^2} e^t\, dt$. L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$ è: $\boxed{a}$ $y = (e+1)(x-1)+e$; $\boxed{b}$ $y = (e+1)x - 1$; $\boxed{c}$ $y = (2e+1)(x-1)$; $\boxed{d}$ $y = (2e+1)x - e - 1$.

8. L'insieme dei numeri $\beta \in \mathbf{R}$ per i quali $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^\beta} = 0$ è: $\boxed{a}$ $\{\beta < 2\}$; $\boxed{b}$ $\{\beta < 3/2\}$; $\boxed{c}$ $\{\beta < 2/3\}$; $\boxed{d}$ $\{\beta < 3\}$.

ANALISI MATEMATICA 1 – Primo Appello	12 gennaio 2016

2. (7 punti) Sia $f(x) := \begin{cases} Ax^2 + B & x < 1/e \\ |1 - \log^3 x| & x \geq 1/e. \end{cases}$

1) Trovate A e B in modo che f sia continua e derivabile in $x = 1/e$.
2) Con i valori trovati per A e B studiate l'andamento di f e disegnatene approssimativamente il grafico. (Studiate segno, crescita/decrescita, eventuali punti di massimo/minimo locale e assoluto.)
3) Utilizzando il grafico di f, disegnate il grafico della funzione integrale $F(x) := \int_0^x f(t)dt$.

Eliminando il valore assoluto: $f(x) = \begin{cases} Ax^2 + B & \text{per } x \leq \frac{1}{e} \\ 1 - (\log x)^3 & \text{per } 1/e \leq x < e \\ (\log x)^3 - 1 & \text{per } e \leq x \end{cases}$

(1) f è continua e derivabile in $\frac{1}{e}$ se $\begin{cases} A\frac{1}{e^2} + B = 2 \\ 2A/e = -3e \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = -\frac{3}{2}e^2 \\ B = \frac{7}{2} \end{array}}$

(2) Dobbiamo studiare:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}e^2x^2 + \frac{7}{2} & \text{per } x \leq \frac{1}{e} \\ 1 - (\log x)^3 & \text{per } 1/e \leq x < e \\ (\log x)^3 - 1 & \text{per } e \leq x. \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3e^2x & ; x \leq \frac{1}{e} \\ -3(\log x)^2\frac{1}{x} & ; \frac{1}{e} \leq x < e \\ 3(\log x)^2 \frac{1}{x} & ; e < x \end{cases}$$

Segno di f: $f(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{7}{3}}$; $f(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{7}{3}}$ e per $x = e$.

limiti di f: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

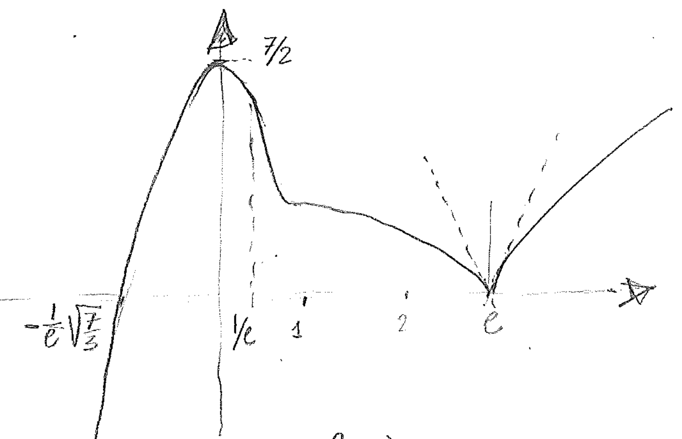
Segno di f': $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 1$.

$f'(x) < 0$ per $0 < x < e$; $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > e$:

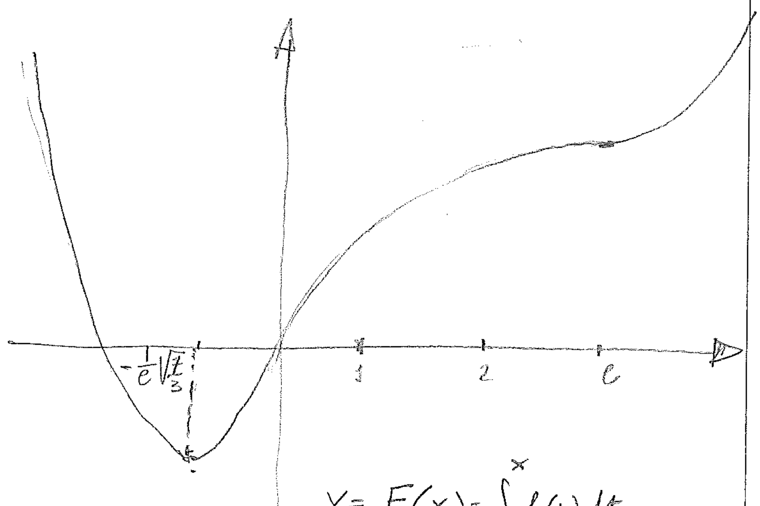
$x = e$ è punto di non derivabilità $(f')^-(e) = -\frac{3}{e}$; $(f')^+(e) = \frac{3}{e}$

Quindi

$x = 0$ è massimo relativo; $x = e$ è minimo relativo; non esistono massimo e minimo assoluto.



$y = f(x)$



$y = F(x) = \int_0^x f(t)dt$

ANALISI MATEMATICA 1 – Primo Appello	12 gennaio 2016

1. (6 punti) Calcolate
$$\int_{1/e}^{e} \frac{1}{x\,(9-|\log x|\,\log x)}\,dx.$$

Ponendo $\log x = t$ si ottiene:

$$\int_{1/e}^{e} \frac{1}{x(9-|\log x|\log x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{9-|t|t}\,dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{9+t^2}\,dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{9-t^2}\,dt.$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{9+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{9-t^2}\,dt = \frac{1}{6}\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3-t}+\frac{1}{3+t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\log|3+t| - \log|3-t|\Big|_{0}^{1}\right) = \log\sqrt[6]{2}$$

Quindi

$$\int_{1/e}^{e} \frac{1}{x(9-|\log x|\log x)}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3} + \log\sqrt[6]{2}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 – Primo Appello	12 gennaio 2016

3. (5 punti) Date la definizione di funzione monotona.
Enunciate con precisione e dimostrate il teorema di integrabilità delle funzioni monotone.

Definizione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente in E se $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

f si dice monotona strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in E$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f è monotona decrescente in E se $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, monotona, allora f è Riemann integrabile.

Prova Osserviamo che f è limitata, infatti $\forall x \in [a,b]$ vale $f(a) \le f(x) \le f(b)$. (oppure $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$).

Inoltre se $f(a) = f(b)$ allora f è costante e quindi Riemann integrabile.

Supponiamo allora che f sia non costante e (per esempio) crescente: quindi $f(a) < f(b)$.

Per provare l'integrabilità di f usiamo la seguente caratterizzazione:

[se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una partizione D_ε di $[a,b]$ t.c. $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$ allora f è Riemann integrabile in $[a,b]$.]

Assegnato $\varepsilon > 0$ sia $D_\varepsilon := \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b\}$ t.c. $|D_\varepsilon| := \max_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

Allora

$$S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon$$

Quindi utilizzando il criterio precedente segue che f è Riemann integrabile in $[a,b]$.