ANALISI MATEMATICA 1 – ANALISI MATEMATICA A
CORSI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA E MATEMATICA
2018-19

Queste note hanno il solo scopo di essere un promemoria di quanto svolto a lezione. Le indicazioni dei capitoli e dei paragrafi si riferiscono al libro: C. D. Pagani, S. Salsa Analisi Matematica 1, Zanichelli, Milano 2015.

1. Settimana 1

Cap 1. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4: Nozione intuitiva di funzione

$$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

Dominio, codominio, immagine, grafico di una funzione.

- Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. La nozione di iniettività o di suriettività dipendono anche da dominio e codominio.
- Funzioni composte e funzioni inverse.
  Supponiamo che siano definite le due funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Allora è possibile definire la *funzione composta* $g \circ f$ nel modo seguente
  $$g \circ f : X \to Z, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$
  Supponete che la funzione $f : X \to Y$ sia biiettiva. Allora si può definire la *funzione inversa* f^{-1} nel modo seguente
  $$f^{-1} : Y \to X, \text{ è tale che } f \circ f^{-1} = \mathbf{Id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \mathbf{Id}_X.$$
  Esempi:
  (1) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := 2x + 1$ allora f è biunivoca e la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f^{-1}(x) := \frac{x-1}{2}$
  (2) la "funzione" 2^x è biunivoca come funzione definita su $\mathbb{R}$ a valori in $(0, +\infty)$; la funzione inversa (il logaritmo in base 2) è $\log_2(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
  (3) la funzione $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva e nemmeno suriettiva. Però
  $$\begin{cases} \cos : & [0, \pi) \to [-1, 1] \\ & x \mapsto \cos x \end{cases}$$
  è biunivoca. La funzione inversa è $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi)$.
- la restrizione f_A di una funzione ad un sottoinsieme $A \subset X$ del suo dominio;
- la funzione identità $\mathbf{Id}_X : X \to X$:
  $$\begin{aligned} \mathbf{Id}_X : \quad & X \to X \\ & x \mapsto \mathbf{Id}_X(x) := x \end{aligned}$$
- la funzione caratteristica di un sottoinsieme $A \subset X$ è la funzione definita da
  $$\mathbf{1}_X : \quad X \to \{0, 1\} \qquad x \mapsto \mathbf{1}_X(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Esempi di funzioni e loro grafici

- Le *successioni* sono funzioni $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ o, più in generale, sono funzioni il cui dominio è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$.
- Funzioni vettoriali di una variabile reale $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; loro immagini e loro grafici.
  (1) $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t, t)$;
  (2) $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t, 2t + 3)$;
  (3) $\mathbf{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t^2, 2t^2 + 3)$;
  (4) $\mathbf{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t, t^2)$
  (5) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (\sin t, \cos t)$
  (6) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (2 \sin t, \cos t)$;
  (7) $\mathbf{r} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \mathbf{r}(t) := (t \sin t, t \cos t)$.
- Esempi di funzioni reali di una o più variabili reali; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; loro dominio naturale, immagine, grafico.
  (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := 1$;
  (2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x$;
  (3) $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x + y$
  (4) $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 + y^2$
  (5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := \sqrt{1 - \log(x^2 + y^2)}$;
  (6) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := x + y + z$;
- Esempi di funzioni vettoriali di più variabili reali; $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  - $\mathbf{F}(x, y) := (x + y, x - y)$
  - più in generale, supponete che $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sia una matrice e $\mathbf{F}$ sia definita nel modo seguente: $\mathbf{F}(x, y) := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Cap 1. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4: Alcune osservazioni su logica e linguaggio.

(1) Proposizioni: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$

(a) $\mathcal{A}$:= "3 è un numero pari";

(b) $\mathcal{B}$:= "gli elettroni sono adroni";

(c) $\mathcal{C}$:= "$\mathbb{S}^1$ è un gruppo di Lie";

(d) $\mathcal{D}$:= "se in un triangolo ci sono due lati uguali allora ci sono anche due angoli uguali";

(e) ...

I connettivi logici "e, o, se ... allora, non, se e solo se" $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \iff$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{B} & \text{in simboli} & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \text{ o } \mathcal{B} & \ldots & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ \text{non } \mathcal{A} & \ldots & \neg \mathcal{A} \\ \begin{cases} \text{se } \mathcal{A} \text{ allora } \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \text{ implica } \mathcal{B} \end{cases} & \ldots & \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \text{ se e solo se } \mathcal{B} & \ldots & \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \end{array}$$

"se $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$ e se $\mathcal{B}$ implica $\mathcal{C}$ allora $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{C}$" che simbolicamente diventa

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$$

"se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ oppure se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ allora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$" in simboli $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})) \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

Tavole di verità:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Se $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è vera diciamo che "$\mathcal{A}$ è condizione sufficiente per $\mathcal{B}$" oppure che "$\mathcal{B}$ è condizione necessaria per $\mathcal{A}$".

Tautologie:

$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ (terzo escluso)

$\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$ (principio di non contraddizione)

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$ (modus ponens)

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (principio di contrapposizione)

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$

$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$

(2) **Predicati**: $\mathcal{A}(x), \mathcal{P}(x, y), \ldots$.

I quantificatori "per ogni, esiste" $\forall, \exists$

$$\begin{array}{lll} \text{per ogni } x\ \mathcal{P}(x) \text{ è vera} & \text{in simboli} & \forall x : \mathcal{P}(x) \\ \text{esiste un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è vera} & \text{in simboli} & \exists x : \mathcal{P}(x) \end{array}$$

$\forall$, $\exists$

I *quantificatori 'per ogni' ed 'esiste'* sono parole essenziali nel linguaggio matematico. Sono stenografati con i simboli $\forall$ e $\exists$. Osservate che $\exists$ viene usato con il significato di *esiste almeno uno.* Se vogliamo indicare l'esistenza di *esattamente un solo* oggetto con una certa proprietà di solito si usa il simbolo $\exists!$.

Negazione di proposizioni contenenti quantificatori

$$\neg(\forall x : \mathcal{P}(x)) \iff (\exists x : \neg\mathcal{P}(x))$$
$$\neg(\exists x : \mathcal{P}(x)) \iff (\forall x : \neg\mathcal{P}(x))$$

e, o, il, un

Il linguaggio matematico usa parole e costruzioni della lingua italiana. Il significato di alcune parole è a volte diverso nel linguaggio matematico e nella lingua parlata.

o, oppure: Nel linguaggio matematico *o* non è esclusivo. Per esempio

$$\text{"}0 < x < 2 \quad \text{o} \quad 1 < x < 3\text{" vuol dire} \quad 0 < x < 3.$$

e: la congiunzione *e* ha lo stesso significato che nella lingua parlata.

$$\text{"}0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 1 < x < 3\text{" vuol dire} \quad 1 < x < 2.$$

il / la: individua univocamente un oggetto. Per esempio,

la soluzione dell'equazione $x^3 - 8 = 0$

indica che esiste esattamente una soluzione dell'equazione.

un/ una: Indica un oggetto con valore indeterminato.

Nel linguaggio matematico ha, a volte, un uso diverso di quello solito nella lingua parlata. Per esempio la frase *Giovanni è un colpevole* ha il significato implicito che Giovanni non sia l'unico colpevole. Questo senso implicito manca nell'uso matematico. Per esempio, se dico

0 *è una soluzione reale dell'equazione* $x^3 + 4x + \sin x = 0$

non intendo dire che, oltre alla soluzione $x = 0$, esistono altre soluzioni reali.

un / una è usato anche per dichiarare un elemento generico di un insieme. Per esempio *Sia dato un punto* x *appartenente ad un insieme* E ... oppure *Dato un* $\varepsilon > 0$ *si può trovare* $\delta > 0$ .... Frasi di questo tipo possono essere più chiaramente espresse come

Per ogni punto x *appartenente ad un insieme* E ...

oppure

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ ...

2. **Settimana 2**

Cap 1. 2.1, 3.1. Nozione intuitiva di insieme, sottoinsieme e alcune notazioni di uso comune.

- A:=$\{3, 5, 7\}$; B:=$\{$i numeri naturali pari e minori di $10^6\}$;
- Insiemi e predicati:

$$\{x : \mathcal{A}(x)\} \text{ indica l'insieme degli } x \text{ per cui } \mathcal{A}(x) \text{ è vera.}$$

- $\mathbb{P} := \{\text{i numeri primi}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$
- $\mathbb{N} := \{\text{i numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{\text{i numeri interi}\} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q} := \{\text{i numeri razionali}\}$
- $\mathbb{R} := \{\text{i numeri reali}\}$
- $\mathbb{C} := \{\text{i numeri complessi}\}$
- Sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ gli intervalli limitati e non limitati

$$(2, 3) := \{x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 3\}, \quad [2, 3] := \{x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x \leq 3\}$$

$$(-\infty, 3) := \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}, \quad [2, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x\}$$

- L'insieme vuoto $\emptyset$. L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.
- L'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X : $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$. Per esempio se $X = \{a, b, c\}$ allora

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}.$$

- Prodotto cartesiano di insiemi: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B$
- Il piano euclideo è "naturalmente" identificato con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Lo spazio tridimensionale è identificato con $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

I simboli $\in$ e $\subset$

$$A \subset B \iff \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Unione e intersezione di insiemi: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\mathcal{C}_U A$.

$$\begin{aligned}
A \cup B &:= \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \\
A \cap B &:= \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \\
A \setminus B &:= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} \\
\mathcal{C}_U A &:= \{x : x \in U \wedge x \notin A\} \\
A \Delta B &:= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).
\end{aligned}$$

Cap 1. 5.1, 7: *Cardinalità di un insieme.* In modo elementare si dice che un insieme non vuoto X ha n elementi (dove n è un numero naturale) se "X si può mettere in corrispondenza biunivoca" con l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. In questo caso si dice che X ha *cardinalità* n. Un insieme X si dice *numerabile* (equivalentemente si dice che X è costituito da una infinità numerabile di elementi) se esiste una funzione biunivoca $X \to \mathbb{N}$.

Teorema 1. *Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.*

Una possibile funzione biunivoca $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è suggerita dal seguente disegno

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\dots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3\dots
\end{array}$$

Una possibile funzione biunivoca $\mathbb{N} \to \{$frazioni positive$\}$ è suggerita dal seguente disegno

$$\begin{array}{cccccccc}
1/1 & & 2/1 & & 3/1 & & 4/1 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
1/5 & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\dots \\
0 & 1/1 & 2/1 & 1/2 & 3/1 & 2/2 & 1/3\dots
\end{array}$$

oppure, depurato dalle ripetizioni,

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\dots \\
0 & 1 & 2 & 1/2 & 3 & 1/3 & 4 & 3/2\dots
\end{array}$$

Teorema 2. *L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Numeri Reali: Cap 2. par 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6

Teorema 3. *Non esiste alcun numero* $q \in \mathbb{Q}$ *tale che* $q^2 = 2$. *"*$\sqrt{2}$ *non è razionale"*

Esistono segmenti la cui lunghezza non è esprimibile con un numero razionale, per esempio la diagonale del quadrato di lato unitario.

Un *modello per i numeri reali*: i numeri reali come *allineamenti decimali illimitati*[1]

$$\mathbb{R} := \{\pm p, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots : \quad p \in \mathbb{N},\, \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}.^2$$

L'ordinamento fra numeri è definito nel solito modo.

Le operazioni di somma e prodotto si possono definire per mezzo di troncamenti e approssimazioni successive.

Si può dimostrare che la procedura suggerita sopra identifica in modo univoco il risultato. La somma e il prodotto definiti in questo modo hanno tutte le (solite) proprietà: sono commutative, associative distributive. Vale quindi il seguente

Teorema 4. $\mathbb{R}$ *è un campo ordinato.*

$\mathbb{Q}$ è un sottoinsime di $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ è *denso in* $\mathbb{R}$: fra due numeri qualsiasi esistono sempre infiniti numeri razionali.

$\mathbb{R}$ (e anche $\mathbb{Q}$) ha la *proprietà di Archimede*[3] (non esistono "infiniti" o "infinitesimi" in $\mathbb{R}$):

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N} : xn > y.$$

Definizione 1. Maggiorante, minorante, massimo e minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme di $E \subset \mathbb{R}$:

(1) se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E : x \leq \alpha$ allora α si dice *maggiorante* di E; analogamente per *minorante*; se esiste un $m \in E \subset \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E : x \leq m$ allora m si dice *massimo* di E; analogamente per *minimo*;

(2) un insieme E si dice *limitato superiormente* se esiste almeno un maggiorante per E; analogamente si definisce *limitato inferiormente*; E si dice *limitato* se è limitato superiormente e limitato inferiormente;

Definizione 2. il minimo dei maggioranti di E si definisce *estremo superiore di* E e si denota $\sup E$; il massimo dei minoranti di E si definisce *estremo inferiore di* E e si denota $\inf E$;

L'estremo superiore è caratterizzato dalle seguenti condizioni $\alpha = \sup E$ se e solo se

$$\begin{array}{ll} (i) & x \leq \alpha, \qquad \forall x \in E \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste un } x \in E \text{ tale che } \alpha - \varepsilon < x; \end{array}$$

analogamente per $\inf E$; se E non è limitato superiormente diciamo che $\sup E = +\infty$; se E non è limitato inferiormente diciamo che $\inf E = -\infty$.

Teorema 5. $\mathbb{R}$ *è completo: se* A *è un sottoinsieme limitato e non vuoto di* $\mathbb{R}$ *allora esistono* $\sup A$ *e* $\inf A$.

Osservate che $\mathbb{Q}$ non è completo. Per esempio l'insieme $E := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ è un insieme limitato ma non esistono (in $\mathbb{Q}$) né il minimo dei maggioranti di E né il massimo dei minoranti di E.

---

[1] L'insieme dei numeri reali può essere definito in modo assiomatico (vedi per esempio il primo capitolo di Enrico Giusti, Analisi 1, Boringhieri) oppure i numeri reali possono essere "costruiti" a partire dal campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con costruzioni come "i tagli di Dedekind" o "le classi separate e contigue". Qui ci limitiamo ad una descrizione semplificata.

[2] Osserva che, esattamente come in $\mathbb{Q}$, le espressioni decimali periodiche con periodo 9 vanno identificate con una espressione decimale limitata.

[3] Archimede di Siracusa (Siracusa c. 287- Siracusa c. 212 a.C.)

3. **Settimana 3**

Cap 1. 5.2: $\mathbb{N}$ e il principio di induzione

Chiamiamo *Principio di induzione* la seguente affermazione:
Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che

$$(i): \quad 0 \in A$$
$$(ii): \quad \textit{se } n \in A \textit{ allora } n+1 \in A$$

allora $A = \mathbb{N}$.

Utilizzo del principio di induzione:

- Esempi di dimostrazioni per induzione.
  (1) Per ogni numero naturale $n \geq 1$
  $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
  (2) La disuguaglianza di Bernoulli[4]
  $$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \text{per ogni } x > -1 \text{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

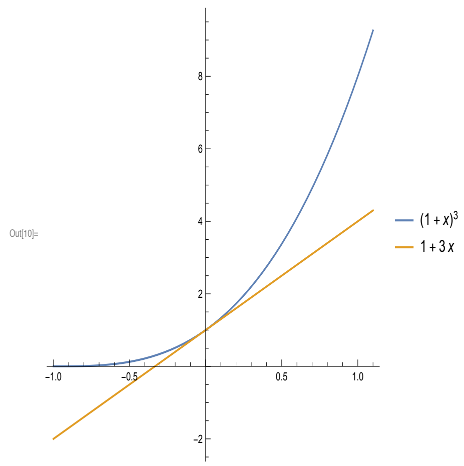


FIGURE 1. Grafici di $(1+x)^3$ e $1+3x$.

  (3) La formula del binomio: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale
  $$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$
  o, scritto in modo più sintetico
  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$$
  ricordando che, per definizione, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

- Successioni definite per ricorrenza.

[4]Jacob Bernoulli (Basilea 1655 –Basilea 1705)

(1) Il fattoriale $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$, di un numero naturale $n \geq 1$ può anche essere definito 'per ricorrenza' nel modo seguente

$$\begin{aligned} &Fatt(1) = 1 \\ &Fatt(n+1) := (n+1)Fatt(n). \end{aligned}$$

(2) Successione di Fibonacci[5]

$$\begin{aligned} &F(0) = F(1) = 1 \\ &F(n+1) := F(n-1) + F(n). \end{aligned}$$

[5]Leonardo Bonacci oppure Leonardo Pisano oppure Leonardo Fibonacci (Pisa c.1170-1175 – probabilmente Pisa c.1240-1250)

I numeri complessi: *Cap 2 par 4.1, 4.2, 4.3*

- $\mathbb{C} := (\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}, \oplus, \otimes)$ dove le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ sono definite
$$(a,b) \oplus (\alpha,\beta) := (a+\alpha, b+\beta)$$
$$(a,b) \otimes (\alpha,\beta) := (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha).$$
$\mathbb{C}$ è un campo.
- $(\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}, \oplus, \otimes)$ è algebricamente isomorfo a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ quindi $\mathbb{C}$ può essere naturalmente visto come un'estensione di $\mathbb{R}$.
- Rappresentazione geometrica: il piano complesso.
- Rappresentazione algebrica $z := a + ib$ e trigonometrica $z := \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ di un numero complesso z.
  Definizione di parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento.
  Interpretazione geometrica delle operazioni di somma e prodotto nel piano complesso.
- Potenze di un numero complesso. Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$
- Radici n-esime di un numero complesso e loro rappresentazione sul piano complesso.
  Se
$$w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$$
allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci sono n radici complesse di w distinte fra loro e qui indicate come $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{w} &= \big\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\big\}\\ &= \big\{z_0 := r^{1/n}(\cos(\frac{\phi}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n})),\\ &\quad z_1 := r^{1/n}(\cos(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n})),\\ &\quad z_2 := \ldots,\\ &\quad \ldots\\ &\quad z_{n-1} := r^{1/n}(\cos(\frac{\phi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\phi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n})\big\}.\end{aligned}$$
Rappresentazione geometrica: le radici n-esime del numero complesso $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$ sono, nel piano complesso, i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza con centro l'origine e raggio $r^{1/n}$.
- Rappresentazione esponenziale
$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$
- Il Teorema fondamentale dell'algebra.

4. **Settimana 4**

(Mercoledì 3 ottobre)

Limiti di funzioni: *Cap 4: par 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2*

Esempi che conducono naturalmente alla nozione di limite:

(1) trovare la retta tangente ad una curva in un suo punto;
(2) definire la velocità istantanea di punto materiale in moto;
(3) calcolare l'area di una regione con bordo curvilineo;
(4) calcolare la somma di infiniti addendi;

Punti di accumulazione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

- Nozione *intuitiva* di limite per funzioni definite in $E \subset \mathbb{R}$.
- Definizione "ϵ, δ" di limite e suo significato grafico.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell; \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell; \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \cdots$$

- **Limiti di successioni** *Cap 4 par 3.1.* La seguente definizione di limite di una successione è un caso particolare della definizione generale di limite di una funzione:
  se $(s_n)_n$ è una successione a valori reali diciamo che
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \ell$ se $\ell \in \mathbb{R}$ e se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che
  $$|s_n - \ell| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq \bar{n};$$
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è possibile trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che
  $$s_n > \alpha \text{ per ogni } n \geq \bar{n};$$

Esempi: verificare usando la definizione che:

$$\lim_{x \to x_0} k = k; \qquad \lim_{x \to x_0} x = x_0; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

5. **Settimana 5**

Limiti e algebra dei limiti *Cap 4. par 2.3, 2.4, 2.5.*

Teorema 3.6 (Teorema ponte): relazione fra limiti di funzioni e limiti di successioni o definizione generale di limite in due forme. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di I,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\
&\quad\Updownarrow \\
&\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \delta \\
&\quad\Updownarrow \\
&\forall (x_n)_n \subset I \text{ tale che } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0 \text{ vale } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell
\end{aligned}$$

e analogamente per $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\ldots$

Esempi di non esistenza del limite.

- Non esistono i limiti per $x \to 0$ delle funzioni
$$f_1(x) := \frac{x}{|x|}, \quad f_2(x) := \frac{1}{x}, \quad f_3(x) := \sin(1/x).$$
- Non esistono i limiti per $x \to +\infty$ delle funzioni
$$f_1(x) := \sin x, \quad f_2(x) := x \cos x.$$

Definizione 2.1 di proprietà *vera definitivamente* per $x \to x_0$ oppure per $x \to \pm\infty$.

La retta reale estesa $\mathbb{R}^*$. I simboli $+\infty$, $-\infty$ e i loro intorni.

Teorema 2.1 di unicità del limite.

Teorema 2.3 di permanenza del segno.

Teorema 2.4 del confronto.

Teorema 2.10 di esistenza del limite per funzioni monotone.

Esempi:
Se $\alpha > 0$ e se $b > 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha & \text{se } x_0 > 0; \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} b^x = b^{x_0} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} \log x = \log x_0, & x_0 > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty \end{cases}$$

Infiniti e infinitesimi. Confronti *Cap 4. par 2.6.*

Algebra dei limiti. *Teorema 2.5* e sue estensioni: *Teorema 2.6*, *Teorema 2.7*, *Teorema 2.8.*

Teorema 2.9 limiti di funzioni composte.
Esempio elementare di uso: Cambio di variabile nel calcolo dei limiti: sapendo che

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \text{e che} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \log \frac{1}{x} = \lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty.$$

Situazioni critiche per la validità del *Teorema 2.5*: le *forme di indecisione* nel calcolo dei limiti:

$$\infty - \infty, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty$$

Ordine di infinito e infinitesimo. Confronto di infiniti e infinitesimi; esempi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = 0 \qquad \text{se } m > n$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty \qquad \text{se } a > 1 \text{ e per qualsiasi } m \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\log x)^k} = +\infty \qquad \text{per qualsiasi } \alpha > 0 \text{ e per qualsiasi } k > 0;$$

Infiniti e infinitesimi dello stesso ordine.

I simboli $\sim$ (si legge *asintotico*) e o (si legge *o-piccolo*) e alcuni esempi di utilizzo:

(1) Scrivere $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0(\pm\infty)$ è equivalente a scrivere $\lim_{x\to x_0(\pm\infty)} f(x) = 0$ oppure a dire che $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0(\pm\infty)$;

(2) sostituzione di un fattore con uno a lui asintotico nel calcolo di un limite; per esempio

$$\text{se } f(x) \sim h(x) \text{ per } x \to x_0(\pm\infty) \text{ allora } \lim_{x\to x_0(\pm\infty)} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0(\pm\infty)} h(x)g(x);$$

(3) eliminazione di termini di ordine inferiore nel calcolo di un limite; per esempio

$$\text{se } h(x) = o(f(x)) \text{ per } x \to x_0(\pm\infty) \text{ allora } \lim_{x\to x_0(\pm\infty)} \frac{f(x)+h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0(\pm\infty)} \frac{f(x)}{g(x)};$$

(4) **Attenzione:** se $f(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0(\pm\infty)$ in generale

$$\lim_{x\to x_0(\pm\infty)} (f(x) - h(x) + k(x)) \neq \lim_{x\to x_0(\pm\infty)} k(x).$$

Asintoti di una funzione.

Altri limiti di uso particolarmente frequente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{cioè} \qquad \sin x = x(1 + o(1)) \qquad \text{per } x \to 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Una possibile definizione del numero e

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

o equivalentemente

$$e := \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Conseguenze del limite precedente: (*Proposizione 3.10*):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{cioè} \quad e^x-1=x(1+o(1)) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta^x-1}{x}=\log\beta, \quad \text{per } \beta>0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \quad \text{cioè} \quad \log(1+x)=x(1+o(1)) \quad \text{per } x\to 0.$$

Infine per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad \text{cioè} \quad (1+x)^\alpha-1=\alpha x(1+o(1)) \quad \text{per } x\to 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}=e^\alpha.$$

I simboli di Landau[6] e la loro definizione.

I simboli di Landau

$$f\sim g, \quad f=o(g), \quad f=\mathcal{O}(g), \quad f\asymp g \qquad \text{per } x\to x_0,\pm\infty$$

Si dice che, per $x\to x_0$

$$f\sim g \qquad \text{se} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1;$$

$$f=o(g) \qquad \text{se} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0;$$

$$f=\mathcal{O}(g) \quad \text{se esiste } C>0 \text{ t.c.} \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|}\le C \text{ definitivamente per } x\to x_0;$$

$$f\asymp g \quad \text{se esistono } 0<C_1<C_2 \text{ t.c.} \quad C_1<\frac{|f(x)|}{|g(x)|}<C_2 \text{ definitivamente per } x\to x_0.$$

Alcune proprietà e relazioni fra loro: per $x\to x_0$,

$f\sim g \iff g\sim f, \quad f\sim g$ e $g\sim h \implies f\sim h;$ $\qquad \sim$ è una relazione di equivalenza

$f\asymp g \iff g\asymp f, \quad f\asymp g$ e $g\asymp h \implies f\asymp h;$ $\qquad \asymp$ è una relazione di equivalenza

$f\sim g \implies f\asymp g \implies f=\mathcal{O}(g)$

$f=o(g) \implies f=\mathcal{O}(g).$

Come esempio di utilizzo dei simboli di Landau, vediamo la formula di Stirling [7] e la formula di Euler[8] – Mascheroni[9]

[6]Edmund George Hermann Landau (Berlino 1877 – Berlino 1938)
[7]James Stirling (Garden, Stirlingshire 1692 – Edinburgo 1770)
[8]Leonhard Euler (Basilea, Svizzera, 1707 – San Pietroburgo, Russia1783
[9]Lorenzo Mascheroni (Bergamo, 1750 – Parigi, 1800)

La formula di Stirling:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{\theta_n/12n}, \quad \text{dove } 0 < \theta_n < 1$$

che implica

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, (1 + o(1))$$

o, equivalentemente,

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad \text{per } n \to +\infty$$

La formula di Euler – Mascheroni

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} &\sim \log n \\ &= \log n + \mathcal{O}(1) \\ &= \log n + \gamma + o(1) \\ &= \log n + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \log n + \gamma + \varepsilon_n, \qquad 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Osservate che ogni riga contiene un'affermazione piú precisa di quella contenuta nella riga precedente.

6. **Settimana 6**

Funzioni continue e loro proprietà: *Cap 5: par 1.1, 1.2, 1.3*

Definizione di funzione continua in un punto e di funzione continua in un insieme.

Definizione 3 (Definizione 1.1, pag 199)**.** Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f si dice continua in $x_0 \in E$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } x \in E.$$
- $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in E se è continua in ogni punto di E.

Teorema 6 (Esempi pag 200 e Teorema 1.1 pag 201)**.** (1) *La somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue,* nel loro insieme di definizione.
(2) *L'insieme* $\mathcal{C}(E) := \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ è continua in } E\}$ *è uno spazio vettoriale.*
(3) *La funzione composta di due funzioni continue è una funzione continua..*

Funzioni continue da sinistra e da destra. Punti di discontinuità: eliminabili, di salto, tutti gli altri . . . .

Teorema 7 (Teorema 1.2, pag 203)**.** *Una funzione monotona definita in un intervallo I può avere al più una infinità numerabile di punti di discontinuità in I e queste sono discontinuità di salto.*

Esempi di classi di funzioni continue: le funzioni elementari (*Cap 5: par 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6*) sono continue nel loro insieme di definizione.
Polinomi. Principio di identità dei polinomi.
Funzioni razionali fratte.
Funzioni algebriche.
Funzioni iperboliche e loro inverse.
Funzioni trigonometriche e loro inverse.

Esempio di una funzione sempre discontinua: la funzione di Dirichlet[10]

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definita come} \qquad d(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$

Teorema 8 (Teorema 1.3: di permanenza del segno per funzioni continue)**.** *Siano $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che*
$$f(x) > 0 \qquad \textit{per ogni } x \in E \textit{ tale che } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Funzioni continue su un intervallo.

Teorema 9 (Teorema 1.4, pag 204: noto come Teorema degli zeri)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

[10] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren 1805 – Göttingen 1859)

Cenno di prova: Supponiamo $f(a) > 0$ e sia $P := \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$. P è non vuoto, perchè $a \in P$, e limitato, perchè contenuto in $[a,b]$. Quindi esiste finito $\sup P$. Sia $c := \sup P$. Proviamo che $f(c) = 0$. Non è possibile che $f(c) > 0$ perchè, per il Teorema di permanenza del segno, f dovrebbe essere positiva anche sulla destra di c e quindi c non sarebbe maggiorante di P. Inoltre, non è possibile che $f(c) < 0$ perchè, ancora per il Teorema di permanenza del segno, f sarebbe negativa anche sulla sinistra di c e quindi c non sarebbe il minimo dei maggioranti di P.

Il metodo di bisezione (Dimostrazione del Teorema 1.4 a pag 205 ed Esempio 1.11 a pag 205).

Esempio Applicando il metodo di bisezione alla ricerca del punto di annullamento della funzione $f(x) := x^2 - 2$ sull'intervallo $[0,2]$ otteniamo una sequenza di intervalli i cui estremi approssimano $\sqrt{2}$. Vedi Figura 1.

Corollari del teorema degli zeri.

- (Corollario 1.5, pag 206, dei valori intermedi.) Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è tale che $\inf_I f < \lambda < \sup_I f$ allora esiste (almeno) un $c \in I$ tale che $f(c) = \lambda$.
- L'immagine continua di un intervallo è un intervallo.
- Se una funzione definita su un intervallo è continua e invertibile allora è strettamente monotona.

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato (o su una unione finita di intervalli chiusi e limitati).

Definizione 4. *Definizione di punto di massimo (minimo) e di punto di massimo(minimo) locale per $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Un punto $x_0 \in E$ si dice punto di massimo per f in E se

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Un punto $x_1 \in E$ si dice punto di massimo locale (o di massimo relativo) per f in E se

$$\text{esiste } \delta > 0 \text{ tale che} \qquad f(x) \le f(x_1) \qquad \text{per ogni } x \in E \text{ tale che } |x - x_1| < \delta.$$

Esistenza del massimo/minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato (o sull'unione di un numero finito di intervalli chiusi e limitati).

Teorema 10 (Proposizione 1.6 pag 201 o Corollario 2.5 pag 214, è conosciuta come Teorema di Weierstrass[11]). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$. Allora esistono un punto di massimo ed un punto di minimo di f in $[a,b]$.*

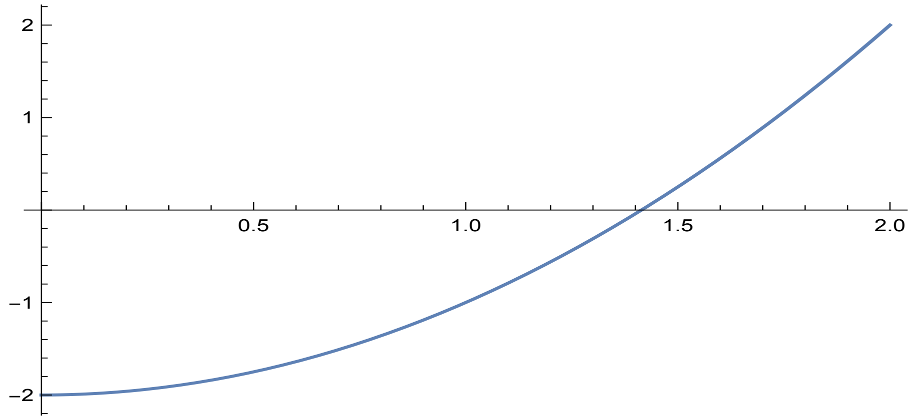
Esempi sulla necessità delle ipotesi nel Teorema di Weierstrass:

(1) $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_1(x) := x - 1$ per $x < 0$, $f(0) := 0$ e $f_1(x) := 1 - x$ per $0 < x$ è discontinua solo per $x = 0$ e non ha massimo e minimo;
(2) $f_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f_2(x) := \tan(\pi x/2)$ è continua in un intervallo limitato ma non chiuso e non ha massimo e minimo.
(3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_3(x) := \arctan(x)$ è continua nell'intervallo illimitato $\mathbb{R}$ e non ha in $\mathbb{R}$ né massimo né minimo.

[11]Karl Weierstrass (Ostenfelde, Westfalia 1815 – Berlino 1897))

```
In[210]:= Clear[a, b, f, nmax]
f[x_] = x^2 - 2;
a[1] := 0;
b[1] := 2;
Plot[f[x], {x, a[1], b[1]}]
nmax := 50
   Do[
     If[f[a[n] + (b[1] - a[1]) / 2^n] < 0,
  {a[n + 1] = a[n] + (b[1] - a[1]) / 2^n, b[n + 1] = b[n]},
  {a[n + 1] = a[n], b[n + 1] = b[n] - (b[1] - a[1]) / 2^n}],
      {n, nmax}]
Do[Print[{N[a[h], 10], N[b[h], 10]}], {h, 1, 15}]
```

Out[214]=




```
{0, 2.000000000}
{1.000000000, 2.000000000}
{1.000000000, 1.500000000}
{1.250000000, 1.500000000}
{1.375000000, 1.500000000}
{1.375000000, 1.437500000}
{1.406250000, 1.437500000}
{1.406250000, 1.421875000}
{1.414062500, 1.421875000}
{1.414062500, 1.417968750}
{1.414062500, 1.416015625}
{1.414062500, 1.415039063}
{1.414062500, 1.414550781}
{1.414062500, 1.414306641}
{1.414184570, 1.414306641}
```

FIGURE 2. Il metodo di bisezione applicato alla funzione $f(x) := x^2 - 2$ sull'intervallo $[0, 2]$. Sono nella lista sono elencati gli estremi dei segmenti ottenuti nelle prime 15 iterazioni.

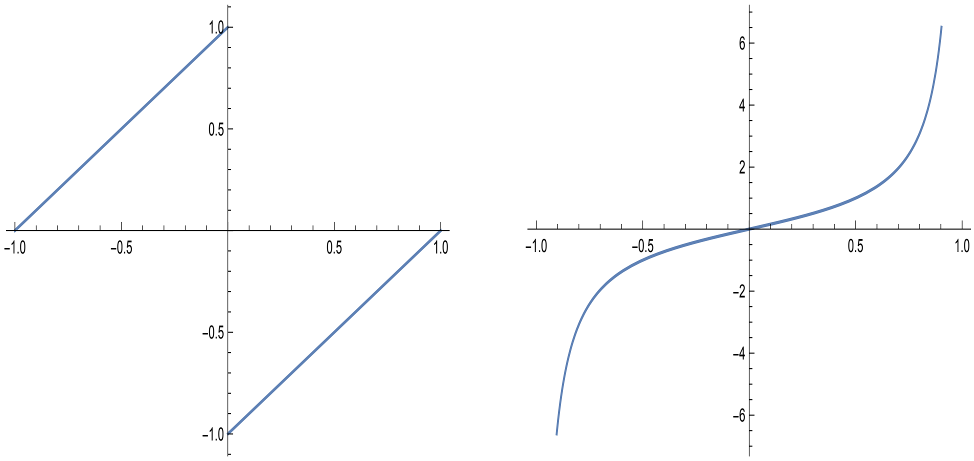


FIGURE 3. Grafici di f_1 e di f_2.

Continuità della funzione inversa di una funzione continua.

Teorema 11 (Teorema 2.10 pag 216)**.** *Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile (biunivoca). Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua.*

Caratterizzazione di esponenziali e logaritmi

Teorema 3.6. pag 225 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, non identicamente nulla, tale che

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

allora esiste $b > 0$ tale che $f(x) = b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.7. pag 226 Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, non identicamente nulla, tale che

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

allora esiste $b > 0$ tale che $f(x) = \log_b x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

7. Settimana 7

Derivate e differenziale: *Cap 6: par 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5*

Nozione intuitiva di derivata e di retta tangente.
Definizione di funzione derivabile in un punto e in un intervallo.

Definizione 5 (Definizione 1.1, pag 242)**.** Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$.

(1) f si dice *derivabile in* x_0 se esiste finito il limite del *rapporto incrementale*

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e tale limite viene chiamato *derivata di* f *in* x_0 ed è indicato come

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(2) f si dice *derivabile in* I se f è derivabile in ogni punto di I. Se f è derivabile in I la funzione

$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f'(x) \qquad \text{per ogni } x \in I$$

si dice funzione derivata di f.

Osservazione: f è derivabile in x_0 se e solo esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0)$ e tale retta non è una retta verticale. La retta tangente ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Teorema 12 (Proposizione 1.1, pag 244)**.** *Se f è derivabile in $x_0 \in I$ allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione: Dobbiamo provare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Infatti

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h = f'(x_0) \lim_{h \to 0} h = 0.$$

(Esempio 1.5, pag 244): Esistono funzioni continue ma non derivabili. La funzione *valore assoluto*

$$x \mapsto |x| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

Derivata destra, sinistra; punto angoloso, punto a tangente verticale, cuspide.

Derivate di ordine superiore. Se la funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ è a sua volta derivabile in $x_0 \in I$, la derivata di f' in x_0 si chiama *derivata seconda di* f e si denota $f''(x_0)$. Analogamente si parla di funzione derivata seconda e di derivate di ordine superiore.

(Esempi, 1.6, 1.7,18, 1.9 a pag 246) Derivate di alcune funzioni elementari.

Algebra delle derivate.

Teorema 13 (Teorema 1.2, pag 248. Derivata di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili)**.** *Se f e g sono funzioni derivabili in x_0 allora*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0); \qquad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Inoltre se $g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

L'insieme $\mathcal{C}^1(I)$ delle funzioni derivabili con derivata continua su un intervallo I è uno spazio vettoriale. L'applicazione "derivata" D

$$D : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I)$$
$$f \in \mathcal{C}^1(I) \mapsto Df \in \mathcal{C}^0(I)$$

è una applicazione lineare fra i due spazi vettoriali $\mathcal{C}^1(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$.

Teorema 14 (Teorema 1.3, pag 251: di derivazione di una funzione composta (e.g. regola della catena))**.** *Se f è derivabile in x_0 e se g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Teorema 15 (Teorema 1.4, pag 254: di derivazione della funzione inversa di una funzione derivabile)**.** *Se f è invertibile in un intorno di x_0, se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) \neq 0$ allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \textit{dove } y_0 = f(x_0).$$

Teoremi Fondamentali del Calcolo Differenziale. *Cap 6: par 2.1, 2.2, 2.3*

Teorema 16 (Teorema 2.1 pag 260. Conosciuto come Teorema di Fermat[12])**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in I$ è un estremo locale di f in I, se x_0 è un* punto interno di I *e se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$*

Definizione 6 (Definizione 2.1, pag. 261: di punto critico.)**.** Se $f : I \to \mathbb{R}$. $x_0 \in I$ si dice punto critico (o punto stazionario) di f in I se $f'(x_0) = 0$.

Applicazione del Teorema di Fermat alla ricerca degli estremi locali di una funzione.

Teorema 17. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ sia un estremo locale di f in I. Allora una delle seguenti possibilità è vera (non sono necessariamente tutte alternative fra di loro)*

- *x_0 è un punto di frontiera di I*
- *$f'(x_0) = 0$*
- *f non è derivabile in x_0*

Teorema 18 (Teorema 2.2, pag 262. Teorema di Rolle[13])**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e f derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione: pag 262.

Teorema 19 (Teorema 2.4, pag 263. Teorema del valor medio o di Lagrange[14])**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e f derivabile in (a,b) allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$.*

Dimostrazione: pag 263.

2.3: Prime conseguenze del Teorema di Lagrange:

- Relazioni fra monotonia di f e segno della derivata f'.

[12] Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, Francia 1601(?) – Castres, Francia 1665)

[13] Michel Rolle (Ambert, Francia 1652 – Parigi 1719)

[14] Joseph-Louis Lagrange (nato Giuseppe Lodovico Lagrangia) (Torino 1736 – Parigi 1813)

Teorema 20. *Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in I e se $f'(x) \geq 0$ in I allora f è crescente (i.e. non decrescente) in I. Nelle stesse ipotesi: se $f'(x) > 0$ in I allora f è strettamente crescente in I.*

Teorema 21. *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$ allora f è costante in I.*

- Utilizzo delle derivate di ordine superiore per lo studio della natura dei punti stazionari: massimi/minimi locali oppure punti di flesso.

  Teorema 22. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f è n volte derivabile in (a, b) e $f^{(n)}$ è continua in (a, b). Se $x_0 \in (a, b)$ e se*

  $$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^n(x_0) \neq 0$$

  allora se n è pari x_0 è un punto di massimo/minimo locale di f se n è dispari x_0 è un punto di flesso.

- Primitive o antiderivate di una funzione.

  Definizione 7 (Definizione 2.2 pag.265: di primitiva di una funzione su un insieme $E \subset \mathbb{R}$)**.** Sia $f : E \to \mathbb{R}$. Una funzione $G : E \to \mathbb{R}$ si dice primitiva (o antiderivata) di f in E se G è derivabile in ogni punto di E e se $G'(x) = f(x)$ in ogni punto di E.

  Se I è un intervallo, tutte le antiderivate di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ differiscono fra di loro per costanti. Precisamente:

  Teorema 23 (Corollario del Teorema **??**)**.** *Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ e $G : I \to \mathbb{R}$ sono antiderivate di f in I allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*

  $$F(x) - G(x) = c \qquad \textit{per ogni } x \in I.$$

Teorema 2.5 (di caratterizzazione delle funzioni esponenziali): se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile, se $f(0) = 1$, se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che f soddisfi

$$f'(x) = kf(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

allora $f(x) = e^{kx}$.

8. **Settimana 8**

Teoremi Fondamentali del Calcolo Differenziale. *Cap 6: par 2.4, 2.5*

2.4: Il teorema di de l'Hospital:

Teorema 24 (Teorema 2.6 conosciuto come Teorema di de l'Hôpital[15])**.** *Sia* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *e sia* f *derivabile in* (a,b)*. Se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \quad (\textit{oppure } +\infty \textit{ oppure } -\infty)$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \textit{per } x\in(a,b) \quad \textit{e} \qquad \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (\textit{oppure } \pm\infty)$$

allora

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l \quad (\textit{oppure } \pm\infty)$$

Valgono analoghe versioni quando $a=-\infty$ *oppure considerando i limiti per* $x\to b^-$ *oppure per* $b=+\infty$*.*

La dimostrazione del Teorema di de l'Hôpital si basa sulla seguente generalizzazione del Teorema di Lagrange.

Teorema 25 (Teorema (di Cauchy))**.** *Siano* f *e* g *continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* (a,b)*. Allora esiste* $c\in(a,b)$ *tale che*

$$g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)).$$

La migliore approssimazione lineare: Il differenziale. *Cap 6. par. 1.5*

Definizione 8 (Definizione 1.2, pag 257: di differenziale e di funzione differenziabile)**.** Sia I un intervallo, $x_0\in I$ e $f:I\to\mathbb{R}$. Se esiste $A\in\mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h} = 0$$

allora f si dice differenziabile in x_0.

La funzione

$$df_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad h\mapsto df_{x_0}(h) := f'(x_0)h$$

si dice *differenziale* di f in x_0.

Usando la notazione degli "o" possiamo scrivere equivalentemente che f è differenziabile in x_0 se

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) = df_{x_0}(h) + o(h).$$

Equivalenza fra derivabilità e differenziabilità.

Teorema 26. f *è differenziabile in* x_0 *se e solo se* f *è derivabile nel punto* x_0*. Inoltre* $A=f'(x_0)$*.*

[15] Guillaume Francois, Marchese de l'Hôpital (Parigi 1661 – Parigi 1704)

Infatti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

è equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A = 0$$

che è equivalente a

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste e } f'(x_0) = A.$$

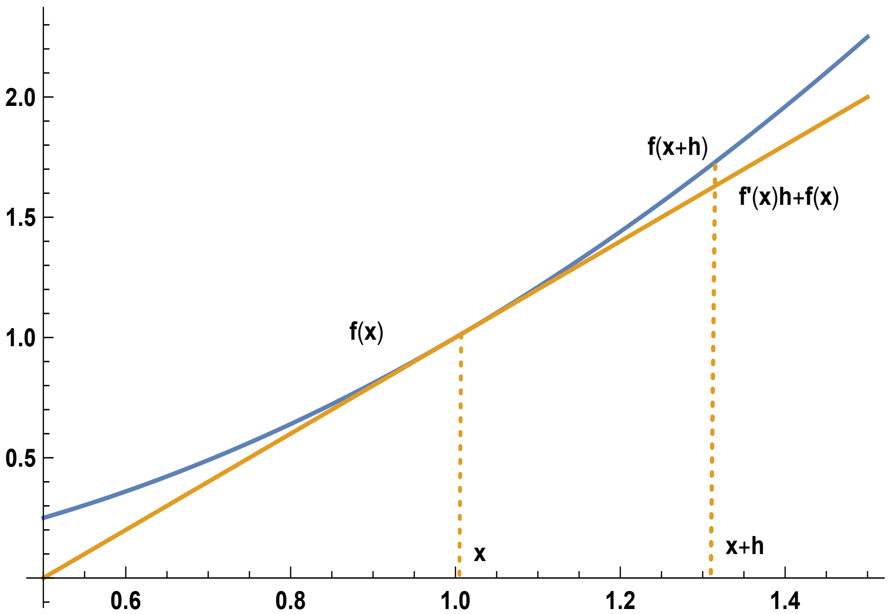


FIGURE 4. Significato geometrico del differenziale

9. **Settimana 9**

La formula di Taylor. *Cap 6. par. 2.5*

Migliore approssimazione di una funzione n volte derivabile con polinomi di grado $\leq n$.

Definizione 9 (Definizione 2.3, pag. 275)**.** $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dicono avere un contatto di ordine n in $x_0 \in (a, b)$ se f e g sono n volte derivabili in x_0 e se

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0), \quad \dots \quad , f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

Teorema 27 (Proposizione 2.8, pag. 276)**.** *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora esiste un unico polinomio di grado $\leq n$ che ha con f un contatto di ordine n in x_0. Tale polinomio prende il nome di polinomio di Taylor*[16] *di ordine n di f con centro in x_0 ed è*

$$T_{n,x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor si denota polinomio di MacLaurin[17] ed è spesso indicato T_n.

Esempio 1 (Esempi 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, pag 276–279: calcolo dei polinomi di MacLaurin per alcune funzioni elementari.)**.**

$$\begin{aligned}
e^x : \quad & T_1(x) = 1 + x \\
& T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\
& \dots \\
& T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) : \quad & T_1(x) = x \\
& T_2(x) = x \\
& T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} \\
& T_5(x) = T_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
& \dots \\
& T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

[16] Brook Taylor (Edmonton, Inghilterra 1685 – Londra 1731)
[17] Colin MacLaurin (Kilmodan, Scozia 1698 – Edinburgo 1746)

$$
\begin{array}{lll}
\cos(x): & T_{2n}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\arctan(x): & T_{2n+1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} \\
\sinh(x): & T_{2n+1}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cosh(x): & T_{2n}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\log(1+x): & T_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} \\
\dfrac{1}{1-x}: & T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \\
\dfrac{1}{1+x}: & T_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k
\end{array}
$$

La seguente formula estende le due precedenti

$$
(1+x)^\alpha: \quad T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n \quad = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k
$$

dove $\displaystyle\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 28 (Definizione 2.4 e Teorema 2.10, pag. 280: Formula di Taylor.)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e f sia n volte derivabile in x_0. Allora, se scriviamo*

(1) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + E_{n,x_0}(x)$$

dove, ovviamente, l'errore $E_{n,x_0}(x)$ è semplicemente

$$E_{n,x_0}(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - T_{n,x_0}(x)$$

e valgono le seguenti stime sull'errore $E_n(x,x_0)$

(1) Stima del resto secondo Peano[18]*:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{E_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k/k!}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Cioè,

$$E_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n \qquad per \quad x \to x_0.$$

In conseguenza (**??**) *viene scritta*

(2) $$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \qquad per\ x \to x_0.$$

[18]Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo 1858 – Torino 1932)

La (**??**) *è detta* Formula di Taylor con resto secondo Peano.

(2) Stima del resto secondo Lagrange*: Se $f \in \mathcal{C}^n(a,b)$ e se f è $(n+1)$ volte derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$ allora per ogni $x \in (a,b)$ esiste $c = c(x,x_0)$ compreso tra x e x_0 tale che*

$$E_{n,x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x - x_0)$$

e quindi (**??**) *prende la forma*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x - x_0). \tag{3}$$

La (**??**) *è detta* Formula di Taylor con resto secondo Lagrange.

Esempio 2 (vedi anche gli Esempi 2.16 e 2.18 pag. 282, 283)**.** Nei seguenti esempi $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x); \\ &= 1 + x + x^2/2! + o(x^2); \\ &\dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + o(x) \\ &= x + o(x^2) && \text{perchè } T_1(x) = T_2(x) \\ &= x - x^3/3! + o(x^4) && \text{perchè } T_3(x) = T_4(x) \\ &= x - x^3/3! + x^5/5! + o(x^6) \\ &\dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Con il resto nella forma di Lagrange:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{e^c}{2} x^2, && \text{per un } c \text{ opportuno} \\ &\dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, && \text{per un } c \text{ opportuno.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{\cos c}{3!} x^3, && \text{perchè } D^{(3)} \sin x = -\cos x \\ &= x - x^3/3! + x^5/5! - \frac{\cos c}{7!} x^7, && \text{perchè } D^{(7)} \sin x = -\cos x. \end{aligned}$$

In tutti gli esempi precedenti c è un numero opportuno, diverso da caso a caso, compreso fra 0 e x, quindi $0 < |c| < |x|$.

Analogamente, sono Formule di Taylor (Mc Laurin) con il resto nella forma di Peano:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1});$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + o(x^n);$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n);$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}); \qquad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1});$$

Il polinomio di Taylor T_{n,x_0} è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che le formule (**??**) o (**??**) valgano. Infatti

Teorema 29 (Proposizione 2.11, pag. 282)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e f sia n volte derivabile in x_0. Se esiste un polinomio P_{n,x_0} di grado $\leq n$ e tale che*

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \qquad \textit{per } x \to x_0$$

cioè se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

allora P_{n,x_0} è il polinomio di Taylor,

$$P_{n,x_0}(x) = T_{n,x_0}(x) \qquad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 3 (Esempio 2.17 pag. 282)**.**

$$\begin{aligned} \cos(x^2) &= 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8) && \text{per } x \to 0 \\ \arctan(2x) &= 2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + o(x^5) && \text{per } x \to 0 \\ \log(1+4x^2) &= 4x^2 - 8x^4 + o(x^4) && \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Applicazioni della formula di Taylor *(Cap 6: par 3.1, 3.2)*

Funzioni convesse e concave.

Definizione 10 (Vedi Definizioni 3.1 e 3.1', pag. 286)**.** Sia I un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa in I* se vale una delle due proprietà fra loro equivalenti:

(1) l'epigrafico di f è un insieme convesso;
(2) per ogni coppia x_1 e x_2 di punti di I, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non sta mai sotto il grafico di f. In formula:

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1), \qquad \text{per ogni } \lambda \in [0,1].$$

Una funzione si dice *concava in I* se la funzione $-f$ è convessa in I.

Le funzioni convesse in (a, b) sono continue in (a, b).
Le funzioni convesse e derivabili possono essere caratterizzate nel seguente modo

Teorema 30 (Teorema 3.3 pag 290)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e derivabile in (a, b). Allora*

(1) *f è convessa se e solo se f' è crescente;*
(2) *se f è anche due volte derivabile derivabile in (a, b) allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$, per ogni $x \in (a, b)$.*

3.2 Applicazioni della Formula di Taylor:

(1) Determinazione della natura dei punti stazionari.

Teorema 31. *(Teorema 3.5 pag. 293) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e*
$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^n(x_0) \neq 0$$
allora se n è pari x_0 è un punto di massimo/minimo locale di f se n è dispari x_0 è un punto di flesso.

Osservate che questo Teorema è una versione più forte dell'analogo risultato dimostrato come conseguenza del Teorema di Lagrange.

(2) Calcolo di ordini di infinito e infinitesimo. Applicazioni della formula di Taylor con resto di Peano al calcolo dei limiti.

(3) Applicazione della formula di Taylor con resto di Lagrange al calcolo approssimato del valore di una funzione. *Esempi 3.7, 3.8, 3.9.*
(4) Il metodo di Newton. *Teorema 3.6.*

Determinazione del grafico di una funzione

10. **Settimana 10**

Integrali di funzioni di una variabile: *Cap 8: par 1.1, 1.2, 1.3, 1.4*

1.1 Integrale di Riemann[19] *- Definizione di integrale..*

Definizione 11. (Definizione 1.1 pag 392) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo suddivisione $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a, b]$ una famiglia finita $x_0, x_1, \ldots, x_N$ di punti di $[a, b]$ tali che

$$\mathcal{D} := \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b\}.$$

e, per ogni partizione $\mathcal{D}$, definiamo somma superiore $S(\mathcal{D}, f)$ e somma inferiore $s(\mathcal{D}, f)$ di $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$$s(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{N} \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f(x)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$S(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{N} \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f(x)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Chiaramente $s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f)$

Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono due partizioni di $[a, b]$ diciamo che $\mathcal{D}_2$ è più fine di $\mathcal{D}_1$ se $\mathcal{D}_2 \supset \mathcal{D}_1$.

Lemma 32. *(Lemma 1.1 e Corollario 1.2. pag 393) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono due partizioni di $[a, b]$ allora valgono:*

- *se $\mathcal{D}_2$ è più fine di $\mathcal{D}_1$ allora*

$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq s(\mathcal{D}_2, f) \quad \textit{e inversamente} \quad S(\mathcal{D}_2, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f)$$

- *per qualsiasi coppia $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ di partizioni*

$$s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f),$$

  e quindi

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f).$$

Definizione 12 (Definizione 1.2 pag 394 (di integrale secondo Riemann))**.** Una funzione limitata $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann (Riemann integrabile) in $[a, b]$ se

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

e si definisce integrale secondo Riemann di f in (a, b), il numero

$$\int_{(a,b)} f(x)dx := \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f).$$

Indichiamo con $\mathcal{R}(a, b)$ l'insieme delle funzioni Riemann integrabili su (a, b).

Esempio 4. *Esempi 1.1 e 1.2*

- Integrale di una funzione costante. Se f è costante in (a, b), $f(x) = c$ per ogni $x \in (a, b)$ allora

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = c(b - a).$$

[19] Bernhard Riemann (Breselenz, Regno di Hanover 1826 – Selasca, Italia 1866)

- Esistono funzioni limitate ma non Riemann integrabili. La "funzione di Dirichlet" $d : (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $d(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ è limitata ma non Riemann integrabile. Infatti
$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, d) = 0 < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, d) = 1.$$

1.2 Caratterizzazione e significato geometrico dell'integrale.

Teorema 33 (Teorema 1.3 pag. 395)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è Riemann integrabile in (a,b) se e solo se*
$$\forall \varepsilon > 0 \textit{ esiste una suddivisione } \mathcal{D}_\varepsilon : S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Definizione 1.3, pag 396 Se $\mathcal{D} := \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ è una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$, definiamo ampiezza della suddivisione il numero $|\mathcal{D}|$ definito da
$$|\mathcal{D}| := \max_{1 \leq i \leq n} \{(x_i - x_{i-1})\}.$$
Allora vale il Teorema

Teorema 34 (Teorema 1.4 pag. 396)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è Riemann integrabile in $[a,b]$ se e solo se esiste un numero $\mathcal{I}$ tale che*
$$\forall \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta > 0 \textit{ tale che:} \quad |\mathcal{D}| < \delta \implies |\sigma(\mathcal{D}, f) - \mathcal{I}| < \varepsilon$$

Definizione 13. Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e $f(x) \geq 0$ in (a,b) allora definiamo
$$\text{Area del sottografico di } f := \int_{(a,b)} f(x)\, dx$$

1.3 Classi di funzioni integrabili

Teorema 35. *(Teorema 1.5 pag 398): Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ allora f è Riemann integrabile in (a,b).*

Teorema 36. *(Teorema 1.6 pag 399): Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è monotona e limitata allora f è Riemann integrabile in (a,b).*

Teorema 37. *(Proposizione 1.7 pag 399): Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è limitata e ha solo un numero finito di punti di discontinuità in (a,b) allora f è Riemann integrabile in (a,b).*

1.4 Proprietà dell'integrale

Sia I un intervallo limitato e sia J un sottointervallo di I, cioè $J \subset I$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in I allora f è Riemann integrabile in J.

Teorema 38. *(Teorema 1.8 pag 400) Se $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sono funzioni Riemann integrabili in (a,b) allora*
- *Linearità: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
$$\int_{(a,b)} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_{(a,b)} f(x) dx + \beta \int_{(a,b)} g(x) dx.$$
Quindi, in particolare, l'insieme $\mathcal{R}(a,b)$ è uno spazio vettoriale.

- *Monotonia:* *se* $f(x) \leq g(x)$ *in* (a,b) *allora*
$$\int_{(a,b)} f(x)dx \leq \int_{(a,b)} g(x)dx$$
e quindi in particolare
  - *se* $f(x) \leq 0$ *in* (a,b) *allora* $\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dx \leq 0$
  - *se* $m = \inf_{(a,b)} f(x)$ *e* $M = \sup_{(a,b)} f(x)$ *allora*
$$m(b-a) \leq \int_{(a,b)} f(x)dx \leq M(b-a)$$
- Teorema della media integrale*: se* $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che*
$$\int_{(a,b)} f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$
oppure
$$\frac{1}{b-a}\int_{(a,b)} f(x)\,dx = f(c)$$
- f_+ *parte positiva,* f_- *parte negativa e* $|f|$ *sono Riemann integrabili in* $[a,b]$ *e*
$$\left|\int_{(a,b)} f(x)dx\right| \leq \int_{(a,b)} |f(x)|dx$$

Definizione 14. [Definizione di integrale orientato] Sia I un intervallo limitato, $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile in I e siano $a, b \in I$. Allora f è Riemann integrabile sull'intervallo di estremi a e b e

$$\text{se } a < b \qquad \int_a^b f(x)dx := \int_{(a,b)} f(x)dx$$

$$\text{se } b < a \qquad \int_a^b f(x)dx := -\int_{(b,a)} f(x)dx$$

Teorema 39 (Teorema 1.9 pag 403. Additività rispetto all'intervallo di integrazione)**.** *Se* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *è Riemann integrabile in* (a,b)*, se* $c \in (a,b)$ *allora* f *è Riemann integrabile in* (a,c) *e in* (c,b) *e*
$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(a,c)} f(x)dx + \int_{(c,b)} f(x)dx.$$
Utilizzando la notazione introdotta nella Definizione **??** *vale anche la seguente forma più generale: sia* f *Riemann integrabile in un intervallo limitato* I *e siano* $a, b, c \in I$*, (non facciamo ipotesi sull'ordine reciproco dei punti* a, b, c*)*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

11. **Settimana 11**

Integrali di funzioni di una variabile: *Cap 8: par 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10*

1.5 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 40 (Teorema 1.10 pag 404: Primo teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e sia $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in (a,b). Supponiamo che esistano finiti*

$$G(a^+) := \lim_{x\to a^+} G(x) \qquad G(b^-) := \lim_{x\to b^-} G(x).$$

Allora

$$\int_{(a,b)} f(x)\,dx = G(b^-) - G(a^+).$$

Utilizzando la definizione di integrale orientato, vale anche la seguente versione dell'uguaglianza precedente. Sia f Riemann integrabile in un intervallo di estremi c e d, senza supporre che $c < d$, allora

$$\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c),$$

dove, a seconda che $c < d$ o $d < c$ abbiamo posto $G(c) := \lim_{x\to c^+} G(x)$ o $G(c) := \lim_{x\to c^-} G(x)$ e analogamente per $G(d)$.

Dimostrazione a pag 404.

1.6 Funzione integrale: secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 41 (Teorema 1.11 pag 406: Secondo teorema fondamentale)**.** *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile in (a,b) e sia x_0 un punto fissato in (a,b). Per ogni $x \in (a,b)$ la funzione f è Riemann integrabile sull'intervallo di estremi x e x_0. Utilizzando la nozione di integrale orientato, definiamo quindi $F = F_{x_0} : (a,b) \to \mathbb{R}$ come*

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Le funzione F_{x_0} si dice funzione integrale di f *(relativa al punto x_0). Le funzioni integrali hanno le seguenti proprietà*

(1) *Ogni funzione integrale F è continua in $[a,b]$.*
(2) *Ogni funzione integrale F è derivabile nei punti di continuità di f e se x è un punto di continuità di f allora*
$$F'(x) = f(x).$$
(3) *Se $f \in \mathcal{C}((a,b))$ allora ogni funzione integrale F di f è una primitiva di f in (a,b). Inoltre ogni primitiva di f in (a,b) è una funzione integrale di f (con una opportuna scelta di x_0).*

Dimostrazione a pag 407.

1.7, 1.8 Integrale indefinito e alcune tecniche per il calcolo algebrico di primitive.

Definizione 15. L'insieme di tutte le primitive di una funzione f prende il nome di *integrale indefinito di f* e si indica spesso con il simbolo

$$\int f(x)dx.$$

Osservate la seguente ambiguità nella notazione: $\int f(x)dx$ indica sia una specifica primitiva che l'insieme di tutte le primitive.

(1) *Tecnica di integrazione per scomposizione.*
(2) *Tecnica di integrazione per parti* :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

(3) Tecnica di integrazione per sostituzione:
se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ e $\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d])$ e tale che $\varphi([c,d]) = [a,b]$ allora:

$$\int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Formula del cambiamento di variabile negli integrali. Se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ e $\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d])$ e tale che $\varphi([c,d]) = [a,b]$ allora:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \tag{4}$$
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

Esempio 5 (Cambiamenti di scala)**.** Sia $\lambda > 0$ e supponiamo che $f : (\lambda a, \lambda b) \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile in $(\lambda a, \lambda b)$ allora $f_\lambda : (a,b) \to \mathbb{R}$ definita da $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$ è Riemann integrabile in (a,b) e

$$\int_{(a,b)} f(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{(\lambda a,\lambda b)} f(x)\,dx.$$

Infatti: se $F : (\lambda a, \lambda b) \to \mathbb{R}$ è una antiderivata di f in $(\lambda a, \lambda b)$ allora $\frac{1}{\lambda}F_\lambda$ è una antiderivata di f_λ in (a,b) e quindi

$$\int_a^b f(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}F(\lambda b) - \frac{1}{\lambda}F(\lambda a) = \frac{1}{\lambda}\left(F(\lambda b) - F(\lambda a)\right) = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\,dx.$$

Alternativamente si può utilizzare (**??**) con $\phi(x) := \lambda x$.

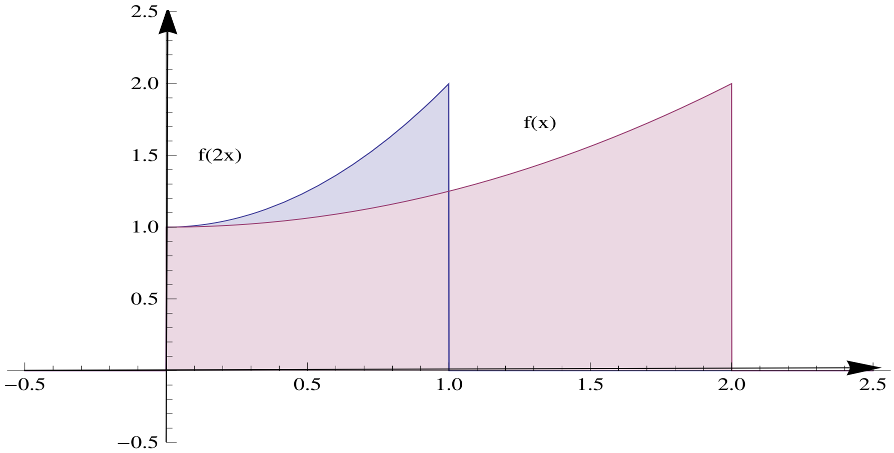


FIGURE 5. Cambiamento di scala

$$\frac{1}{2}\int_{(0,2)} f(x)\,dx = \int_{(0,1)} f(2x)\,dx.$$

Esempio 6 (Invarianza per traslazione)**.** Supponiamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile in (a, b). Allora per ogni $\tau \in \mathbb{R}$, la funzione *traslata* $f_\tau : (a-\tau, b-\tau) \to \mathbb{R}$ definita da $f_\tau(x) := f(x+\tau)$ è Riemann integrabile in $(a - \tau, b - \tau)$ e

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(a-\tau,b-\tau)} f(x + \tau)dx = \int_{(a-\tau,b-\tau)} f_\tau(x)dx.$$

Basta utilizzare (**??**) con $\phi(x) := x + \tau$.

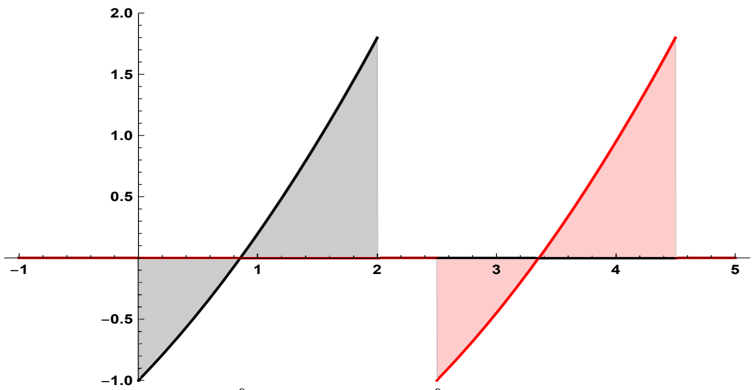


FIGURE 6. $\displaystyle\int_{(0,2)} f(x)dx = \int_{(2.5,4.5)} f(x - 2.5)dx$

Esempio 7 (Invarianza per riflessione)**.** Supponiamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile in (a, b). Allora, la funzione *simmetrica* $f_s : (-b, -a) \to \mathbb{R}$ definita da $f_s(x) := f(-x)$ è Riemann integrabile in $(-b, -a)$ e

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(-b,-a)} f(-x)dx = \int_{(-b,-a)} f_s(x)dx.$$

Basta utilizzare (**??**) con $\phi(x) := -x$.

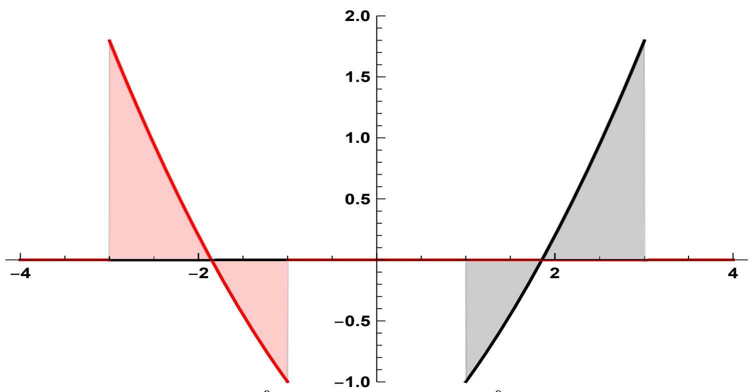


FIGURE 7. $\displaystyle\int_{(-3,-1)} f(x)dx = \int_{(1,3)} f(-x)dx$

Esempio 8 (Simmetrie)**.** Allora

- Supponiamo che $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ sia una funzione *dispari* e sia Riemann integrabile in $(-a, a)$. Allora

$$\int_{(-a,a)} f(x)dx = 0.$$

- Supponiamo che $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ sia una funzione *pari* e sia Riemann integrabile in $(-a, a)$. Allora

$$\int_{(-a,a)} g(x)dx = 2 \int_{(0,a)} g(x)dx.$$

Teorema 42 (La formula di Taylor con resto in forma integrale)**.** *Supponiamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sia $(n + 1)$-volte derivabile in (a, b) e che $f^{(n+1)}$ sia Riemann integrabile in (a, b). Allora per ogni $x_0, x \in (a, b)$ vale*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n \, dt. \tag{5}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)dt, \qquad \textit{e poichè } \frac{d}{dt}(x - t) = -1 \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}(x - t)\, f'(t)dt, \qquad \textit{e integrando per parti} \\
&= -(x - t)\, f'(t)|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x - t)\, f''(t)dt \\
&= (x - x_0)\, f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)\, f''(t)dt.
\end{aligned}$$

Ora si osserva che $(x - t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x - t)^2$, con una ulteriore integrazione per parti si ottiene

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x - t)^2\, f^{(3)}(t)dt.$$

Esempio 9 (Uso della Formula di Taylor con resto integrale per il calcolo numerico del valore di una funzione)**.** La funzione $x \mapsto f(x) := e^x$ è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$. Possiamo quindi utilizzare la formula (**??**) con $x_0 = 0$ e qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(D^{(k)} e^x\right)|_{x=0} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x \left(D^{(n+1)} e^t\right) \cdot (x - t)^n \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t \cdot (x - t)^n \, dt.
\end{aligned}$$

In particolare, per $x = 1$

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \int_{(0,1)} e^t \cdot (1 - t)^n \, dt.$$

Usando la stima elementare $0 < e < 4$ e la proprietà di monotonia degli integrali, segue che

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{4}{n!} \int_{(0,1)} (1 - t)^n \, dt = \frac{4}{(n + 1)!}$$

e per il teorema del confronto

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$$

che viene di solito scritto come

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e.$$

1.9 Integrali dipendenti da un parametro

Osservazione 1 (Dipendenza di un integrale dagli estremi di integrazione). Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile sull'intervallo I e sia $y_0 \in I$. Supponiamo che $\gamma : J \to I$ sia derivabile. Allora anche $\Phi : J \to \mathbb{R}$ definita da

$$x \mapsto \Phi(x) := \int_{y_0}^{\gamma(x)} f(y)dy$$

è derivabile e

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{\gamma(x)} f(y)dy\right) = f(\gamma(x))\,\gamma'(x).$$

Più in generale: supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia Riemann integrabile sull'intervallo I e che $\gamma, \beta : J \to I$ siano derivabili. Allora anche $\Psi : J \to \mathbb{R}$ definita da

$$x \mapsto \Psi(x) := \int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} f(y)dy$$

è derivabile e

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\beta(x)}^{\gamma(x)} f(y)dy\right) = f(\gamma(x))\,\gamma'(x) - f(\beta(x))\,\beta'(x).$$

Osservazione 2 (Dipendenza di un integrale da un parametro nella funzione integranda).

Teorema 43 (Proposizione 1.14, pag 414)**.** *Supponiamo che $f(x,y) : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$. Supponiamo inoltre che $y_0 \in (c,d)$. Allora*

$$y \mapsto \int_{(a,b)} f(x,y)dx$$

è una funzione continua in (c,d) e

$$\lim_{y\to y_0}\int_{(a,b)} f(x,y)dx = \int_{(a,b)} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

Teorema 44 (Teorema 1.16, pag 415)**.** *Supponiamo che $f(x,y) : [a,b]\times(c,d) \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$. Supponiamo inoltre che anche $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ esista e sia continua nel rettangolo $[a,b] \times (c,d)$. Allora*

$$y \mapsto \int_{(a,b)} f(x,y)dx$$

è una funzione derivabile in (c,d) e

$$\frac{d}{dy}\int_{(a,b)} f(x,y)dx = \int_{(a,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Alcune applicazioni geometriche della nozione di integrale definito.

- Area della regione fra due curve

$$A := \int_{(a,b)} |f(x) - g(x)| dx$$

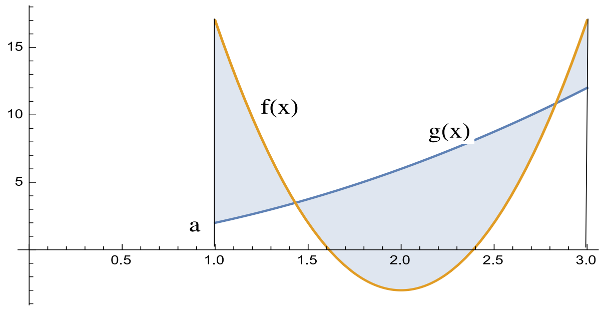


FIGURE 8. **Area fra due curve**

- *[Principio di Torricelli] Volume di un solido.* Supponiamo che $E \subset \mathbb{R}^3$ sia compreso fra i due piani $\Pi_a := \{(a, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e $\Pi_b := \{(b, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ cioè

$$E \subset \{(x, y, z) : a \leq x \leq b;\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Per ogni $t \in [a, b]$ indichiamo con $E_t := E \cap \Pi_t$ la sezione di E con il piano Π_t e indichiamo con $\mathcal{A} : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ la funzione "area della sezione E_t",

$$t \mapsto \mathcal{A}(t) := Area(E_t).$$

Allora, se $\mathcal{A}$ è Riemann integrabile in (a, b), il volume $\mathcal{V}$ di E è

$$\mathcal{V} := \int_{(a,b)} \mathcal{A}(x)\, dx.$$

- *Volume di un solido di rotazione.*
  (1) *Rotazione attorno all'asse delle ascisse.* Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto "facendo ruotare attorno all'asse x la regione compresa fra il grafico di f e l'asse delle x". Precisamente

$$E := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\}$$

allora il volume $\mathcal{V}$ di E è

$$\mathcal{V} := \pi \int_{(a,b)} f^2(x) dx$$

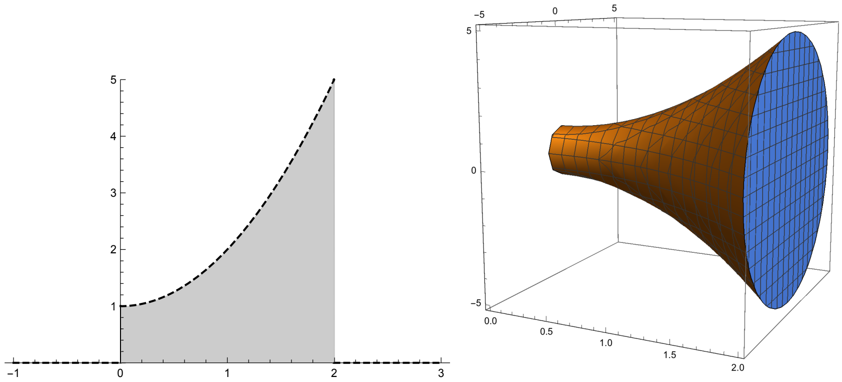


FIGURE 9. E è ottenuto "ruotando" il sottografico di $f(x) := 1 - x^2$.

(2) *Rotazione attorno all'asse delle ordinate.* Supponiamo che $0 \leq a < b$ e che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia continua e non negativa in $[a, b]$. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto "facendo ruotare attorno all'asse verticale z la regione compresa fra il grafico di f e l'asse delle x". Precisamente

$$E := \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq f(x)\}$$

allora il volume $\mathcal{V}$ di E è

$$\mathcal{V} := 2\pi \int_{(a,b)} x f(x) dx$$

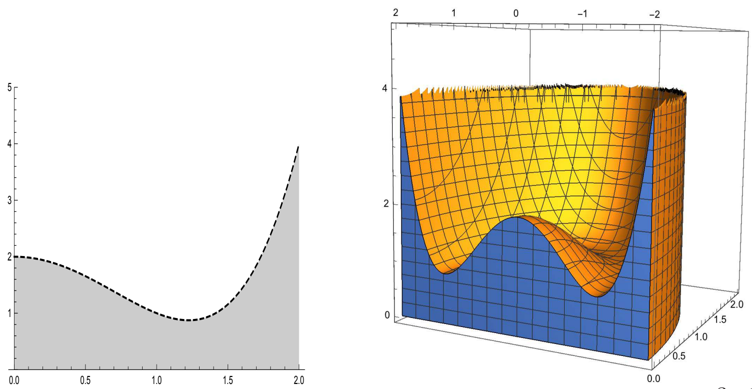


FIGURE 10. E è ottenuto "ruotando" il sottografico di $f(x) := 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$. Nel secondo disegno è mostrata una sezione di E.

- *Lunghezza di un grafico.* Supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia di classe C^1 in $[a, b]$. Allora la lunghezza ℓ del grafico di f è

$$\ell := \int_{(a,b)} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- *Area della superficie laterale di un solido di rotazione attorno all'asse delle ascisse.* Supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia di classe C^1 in $[a, b]$. Sia, come in un esempio precedente, $S \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto "facendo ruotare attorno all'asse x la regione compresa fra il grafico di f e l'asse delle x". Indichiamo con S la "superficie laterale di E, precisamente

$$S := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = f(x)^2, a \leq x \leq b\}$$

allora l'area $\mathcal{S}$ della superficie laterale S è

$$\mathcal{S} := 2\pi \int_{(a,b)} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

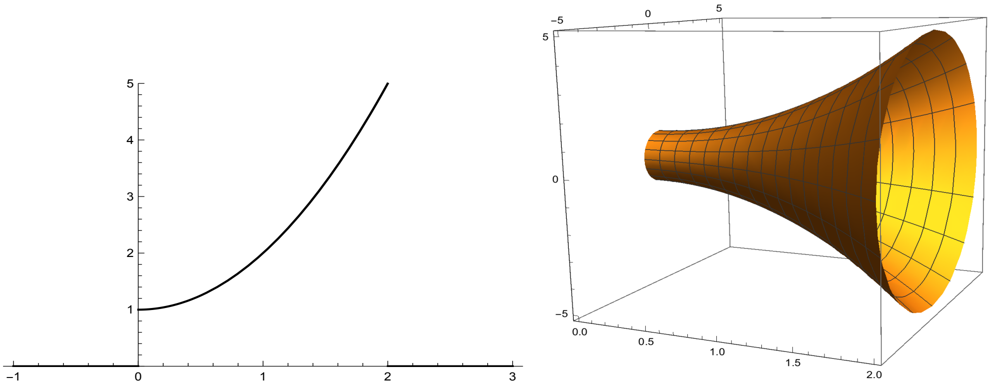


FIGURE 11. S è ottenuto "ruotando" il grafico di $f(x) := 1 - x^2$.

12. **Settimana 12**

12.1. **Alcuni esempi di equazioni differenziali ordinarie.** *Vedi, per esempio il Capitolo 1, Par. 1, 2 ,3 di M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2, Zanichelli, Milano 2009.*

Definizione 16 (Equazioni differenziali del primo ordine. Soluzioni)**.** Un'equazione differenziale del primo ordine è un'espressione del tipo

$$y' = f(t, y) \tag{i}$$

oppure più in generale del tipo

$$F(t, y, y') = 0. \tag{ii}$$

Una funzione $y = y(t)$, definita e derivabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice soluzione dell'equazione (i), rispettivamente di (ii), in I, se

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \text{oppure} \quad F(t, y(t), y'(t)) = 0, \text{ per ogni } t \in I.$$

Definizione 17 (Problema di Cauchy)**.** Un *problema di Cauchy* per una equazione differenziale del primo ordine è l'accoppiamento fra una equazione differenziale solitamente nella forma (i) e una *condizione iniziale* cioè l'assegnazione del valore della soluzione in un punto assegnato.

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases} \tag{iii}$$

Una soluzione del problema (iii) è una funzione derivabile, definita in un intervallo I contenente il punto t_0, e tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{per ogni } t \in I, \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

Analogamente

Definizione 18. Un'equazione differenziale del secondo ordine è un'espressione del tipo

$$y'' = f(t, y, y') \tag{iv}$$

oppure più in generale del tipo

$$F(t, y, y', y'') = 0.$$

Una funzione $y = y(t)$, definita e *due volte derivabile* in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, si dice soluzione di una delle equazioni precedenti in I se

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad \text{oppure} \quad F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Definizione 19 (Problema di Cauchy)**.** Per una equazione differenziale del secondo ordine il problema di Cauchyè l'accoppiamento fra l'equazione differenziale, solitamente nella forma (iv), e due *condizioni iniziali* che impongono il valore della soluzione e della sua derivata prima in un (unico) punto.

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Risolvere un'equazione differenziale può avere molti significati. Un obiettivo, spesso sfortunatamente troppo ambizioso, è ottenere un *integrale generale* cioè una formula costruita a partire da funzioni elementari e da loro funzioni integrali che, al variare di uno o più parametri arbitrari dia *tutte (o quasi tutte)* le soluzioni dell'equazione differenziale.

Esempio 10. [Esempi di integrali generali] Alcuni esempi per equazioni del primo o del secondo ordine.

(1) La famiglia di funzioni $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto y_c(t) := ce^{\lambda t}, \qquad \text{al variare del parametro } c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'equazione del primo ordine $y' = \lambda y$. Infatti, per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$,

$$y_c'(t) = c\lambda e^{\lambda t} = \lambda y_c(t), \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

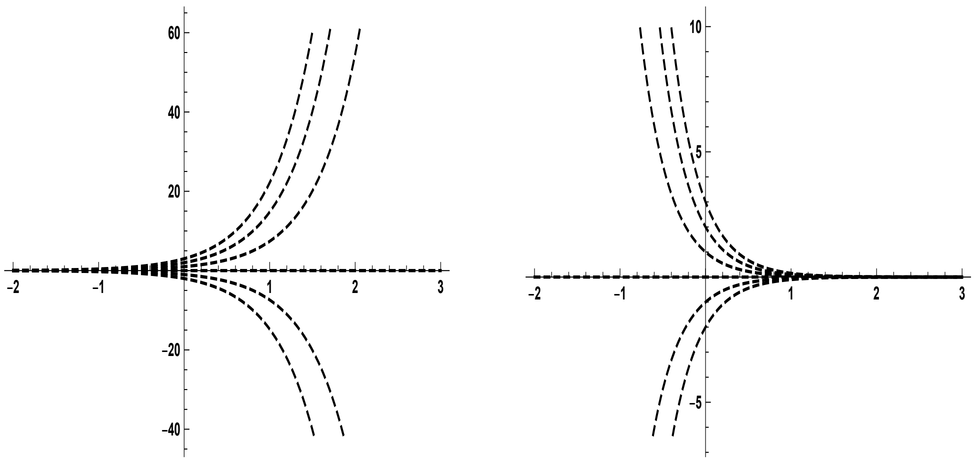


FIGURE 12. Parte dei grafici di alcune soluzioni di $y' = \lambda y$, per $\lambda = 2$ e per $\lambda = -3$.

(2) La famiglia di funzioni $y_c : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ oppure $y_c : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, e definite da

$$t \mapsto y_c(t) := \frac{1}{c - t}$$

è un integrale generale dell'equazione del primo ordine $y' = y^2$. Infatti, per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$,

$$y_c'(t) = \frac{1}{(c-t)^2} = (y_c(t))^2, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}.$$

In questo caso la famiglia $t \mapsto \frac{1}{c-t}$ comprende solo *quasi tutte* le soluzioni dell'equazione, infatti anche la funzione costante $t \mapsto y(t) := 0$ è una soluzione, ma non è esprimibile con l'espressione analitica precedente.

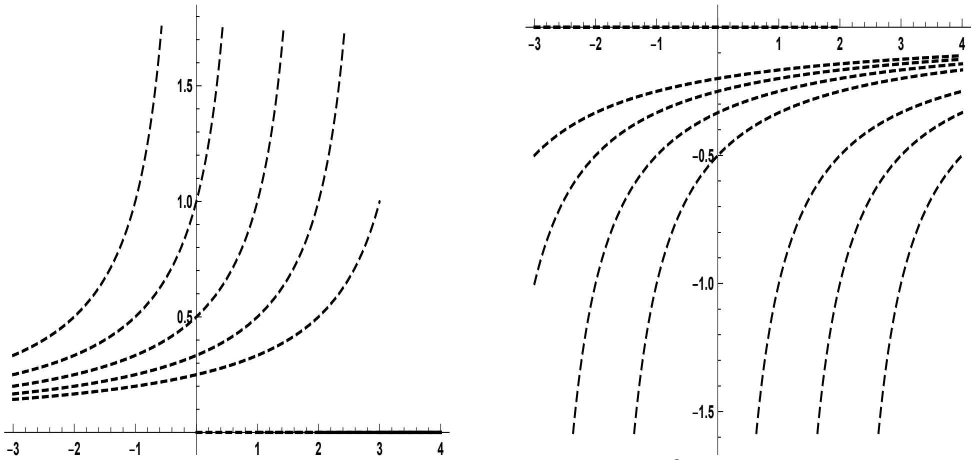


FIGURE 13. Parte dei grafici di alcune soluzioni di $y' = y^2$. Nei disegni sono funzioni definite su $(-\infty, c)$ oppure su $(c, +\infty)$, per vari valori di c.

(3) La famiglia di funzioni $y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite, al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, da

$$x \mapsto y_c(x) := ce^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds$$

è un integrale generale dell'equazione del primo ordine $y' = 2xy + \sin x$. Infatti

$$\begin{aligned} y_c'(x) &= c2xe^{x^2} + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds + e^{x^2} e^{-x^2} \sin x \\ &= 2x \left(ce^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-s^2} \sin s \, ds \right) + \sin x \\ &= 2xy_c(x) + \sin x. \end{aligned}$$

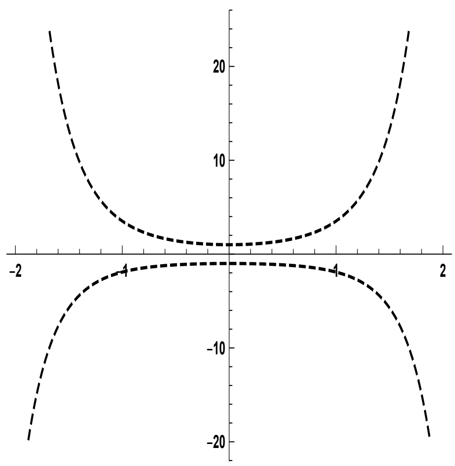


FIGURE 14. Parte di due grafici di soluzioni di $y' = 2xy + \sin x$.

(4) La famiglia di funzioni $y_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da

$$y_{\alpha,\beta}(x) := \alpha \cos x + \beta \sin x$$

è un integrale generale dell'equazione (del secondo ordine e lineare) $y'' + y = 0$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y'_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha \sin x + \beta \cos x; \\ y''_{\alpha,\beta}(x) &= -\alpha \cos x - \beta \sin x = -y_{\alpha,\beta}(x). \end{aligned}$$

12.2. **Equazioni differenziali a variabili separabili.** Sono equazioni del tipo

$$y' = g(t)f(y) \tag{6}$$

dove $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue rispettivamente definite nei due intervalli J e I.

Il relativo problema di Cauchy è della forma

$$\begin{cases} y' = g(t)f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

dove $t_0 \in I$ e $y_0 \in J$.

La ricerca dell'integrale generale di (**??**) si basa sulle seguenti osservazioni:

- se $\bar{y} \in \mathbb{R}$ è tale che $f(\bar{y}) = 0$ allora la funzione costante

  $$t \mapsto \bar{y}$$

  è una soluzione dell'equazione (**??**);
- se $t \mapsto y(t)$ per $t \in I$ è una soluzione di (**??**) per la quale $f(y(t)) \neq 0$ in I allora

  $$y'(t) = f(y(t))g(t) \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

  e quindi

  $$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\, dt = \int g(t)\, dt.$$

  e, per la formula di cambiamento di variabile,

  $$\int \frac{1}{f(y)}\, dy_{|y=y(t)} = \int g(t)\, dt.$$

  Se si è in grado di calcolare esplicitamente una primitiva di $y \mapsto \frac{1}{f(y)}$ può essere possibile ottenere una espressione esplicita dell'integrale generale.

Osservate che le difficoltà analitiche non sono solo nella ricerca di primitive elementari di $y \mapsto \frac{1}{f(y)}$ ma anche nella ricerca di una funzione inversa per eventualmente esplicitare $t \mapsto y(t)$.

Esempio 11. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x(y-1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- Ricerca dell'integrale generale di $y' = 2x(y-1)$.

  L'equazione è della forma $y' = f(x)g(y)$. Poichè $y - 1$ si annulla per $y = 1$, l'equazione differenziale $y' = 2x(y-1)$ ammette la soluzione costante

  $$x \mapsto y(x) = 1.$$

  Se $x \mapsto y(x)$ è $\neq 1$ allora l'equazione $y'(x) = 2x(y(x) - 1)$ è equivalente a

  $$\frac{y'(x)}{y(x) - 1} = 2x.$$

Quindi sono uguali anche le rispettive primitive

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-1}\, dx = \int 2x\, dx$$

$$\log|y(x)-1| = x^2 + c \qquad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)-1| = e^{x^2+c} \qquad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

e infine

$$\begin{array}{lll} \text{se } y(x) > 1: & y(x) = 1 + e^{x^2+c} & = 1 + Ke^{x^2}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ oppure } K \in \mathbb{R}^+ \\ \text{se } y(x) < 1: & y(x) = 1 - e^{x^2+c} & = 1 - Ke^{x^2}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ oppure } K \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Riassumendo, con una espressione analitica unica, l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 2x(y-1)$ è la famiglia di funzioni $y_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto y_C(x) := 1 + Ce^{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

- Soluzione del problema di Cauchy.
  Cerchiamo fra le soluzioni in (**??**) una che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 2$. Poichè

  $$y_C(0) = 1 + C$$

  basta scegliere $C = 1$. Quindi la funzione

  $$\mathbb{R} \ni x \mapsto 1 + e^{x^2}$$

  è una soluzione del problema di Cauchy. In realtà la teoria assicura che questa è anche l'unica soluzione (definita su $\mathbb{R}$) del problema di Cauchy.
- Disegno di parte dei grafici delle soluzioni.

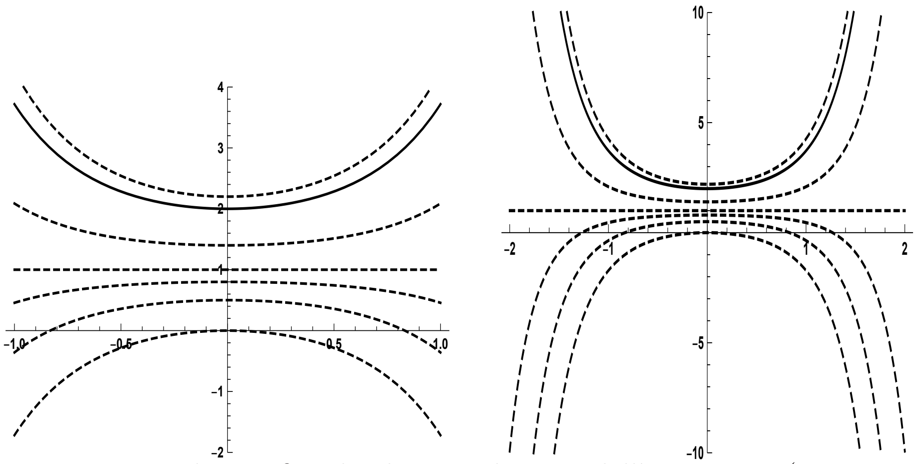


FIGURE 15. Parte dei grafici di alcune soluzioni dell'equazione (tratteggiate) e dell'unica soluzione del problema di Cauchy (linea continua), a diverse scale.

Esempio 12. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x(y^2 - 1) \\ y(x_0) = \alpha. \end{cases} \tag{9}$$

- *Ricerca dell'integrale generale di $y' = 2x(y^2 - 1)$.*
  L'equazione è della forma $y' = f(x)g(y)$. Poichè $y^2 - 1$ si annulla per $y = 1$ e $y = -1$, l'equazione differenziale $y' = 2x(y^2 - 1)$ ammette due soluzioni costanti

$$x \mapsto y_1(x) = -1 \qquad x \mapsto y_2(x) = 1.$$

Se $y(x) \neq \pm 1$ allora l'equazione differenziale è equivalente a

$$\frac{y'(x)}{y(x) - 1} = 2x$$

e quindi, dall'uguaglianze delle rispettive primitive $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)-1}dx = \int 2xdx$, otteniamo

$$\log\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = 2x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

e quindi

(10) $$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = Ke^{2x^2}, \qquad \text{per } K := e^c \in \mathbb{R}^+.$$

Se $y(x) < -1$ *oppure se* $1 < y(x)$ allora $\dfrac{y(x)-1}{y(x)+1} > 0$ e quindi (**??**) è equivalente a

$$\frac{y(x)-1}{y(x)+1} = Ke^{2x^2}, \qquad \text{per } K \in \mathbb{R}^+$$

da cui otteniamo una prima famiglia di soluzioni di $y' = 2x(y^2 - 1)$

(11) $$y(x) := -1 + \frac{2}{1 - Ke^{2x^2}} \qquad \text{per } K \in \mathbb{R}^+.$$

Se $-1 < y(x) < 1$ allora $\dfrac{y(x)-1}{y(x)+1} < 0$ e quindi (**??**) è equivalente a

$$\frac{y(x)-1}{y(x)+1} = -Ke^{2x^2}, \qquad \text{per } K \in \mathbb{R}^+$$

da cui otteniamo una seconda famiglia di soluzioni di $y' = 2x(y^2 - 1)$

(12) $$y(x) := -1 + \frac{2}{1 + Ke^{2x^2}} \qquad \text{per } K \in \mathbb{R}^+.$$

Le due famiglie di funzioni in (**??**) e (**??**) possono essere riunite nell'unica famiglia di funzioni

(13) $$y_C(x) := -1 + \frac{2}{1 + Ce^{2x^2}}, \qquad \text{per } C \in \mathbb{R}.$$

Anche se non è strettamente necessario per la risoluzione del problema di Cauchy (**??**), studiamo approssimativamente l'andamento delle funzioni y_C al variare del parametro $C \in \mathbb{R}$.

Se $C < -1$: allora $1 + Ce^{2x^2} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le funzioni y_C sono di classe C^1 in $\mathbb{R}$, sono pari, inoltre $y_C(0) = \frac{1-C}{1+C}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} y_C(x) = -1^-$. I grafici sono del tipo

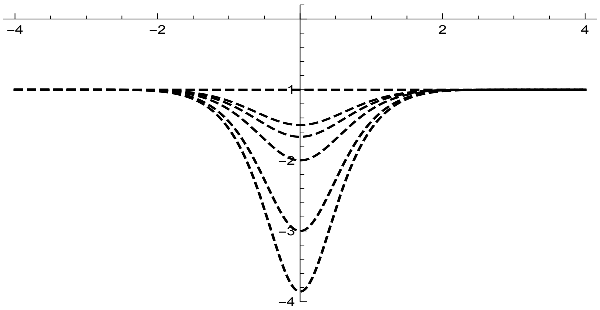


FIGURE 16. Grafici di $x \mapsto y_C(x) := -1 + \frac{2}{1+Ce^{2x^2}}$ per alcuni valori di C, $-5 \le C \le -1.7$

Se $1 < C$: allora $1 + Ce^{2x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le funzioni y_C sono di classe C^1 in $\mathbb{R}$, sono pari, $-1 \le y_C(x) \le 1$ inoltre $y_C(0) = \frac{1-C}{1+C}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} y_C(x) = -1^+$. I grafici sono del tipo

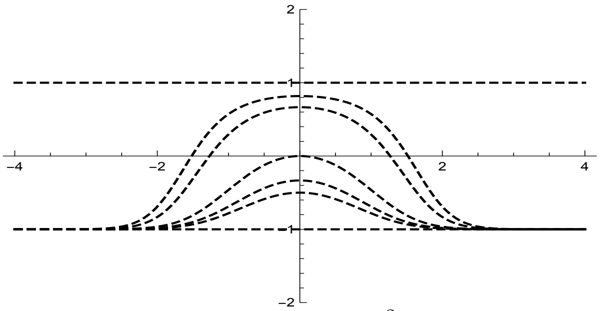


FIGURE 17. Grafici di $x \mapsto y_C(x) := -1 + \frac{2}{1+Ce^{2x^2}}$ per alcuni valori di C, $0.1 \le C \le 3$. Sono mostrate anche le soluzioni costanti $x \mapsto -1$ e $x \mapsto 1$.

Se $-1 \le C \le 1$: allora $1 + Ce^{2x^2} = 0$ per $x = x_C^- := -\sqrt{\log\sqrt{-1/C}}$ e per $x = x_C^+ := \sqrt{\log\sqrt{-1/C}}$ ed è positivo per valori di x compresi fra le due radici e negativo per valori esterni. Abbiamo quindi tre famiglie di soluzioni dell'equazione differenziale, che sono di classe C^1 rispettivamente nelle semirette $(-\infty, x_C^-)$, $(x_C^+, +\infty)$ e nel segmento (x_C^-, x_C^+). Le varie funzioni hanno asintoti verticali per $x \to \pm x_C^\pm$. I grafici sono del tipo

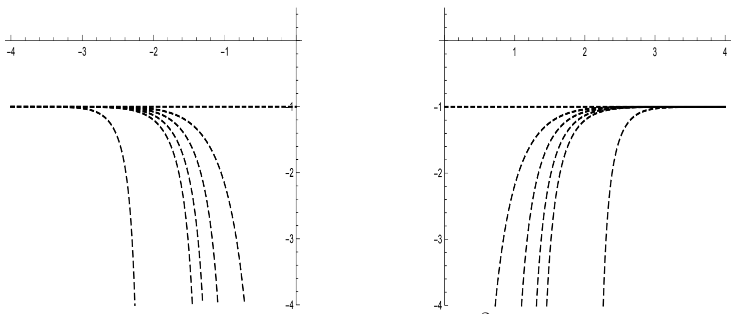


FIGURE 18. Grafici di $x \mapsto y_C(x) := -1 + \frac{2}{1+Ce^{2x^2}}$ per $-0.5 \le C \le -0.01$ e rispettivamente nelle semirette $(-\infty, x_C^-)$ e $(x_C^+, +\infty)$

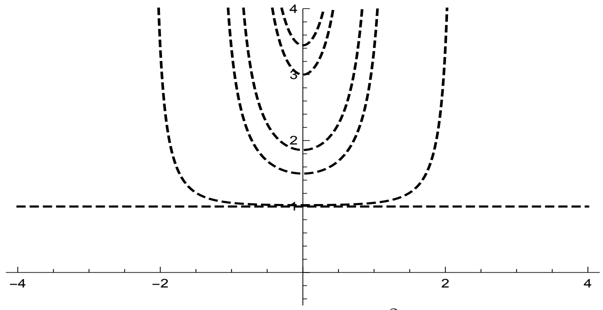


FIGURE 19. Grafici di $x \mapsto y_C(x) := -1 + \frac{2}{1+Ce^{2x^2}}$ per $-0.5 \le C \le -0.01$ negli intervalli (x_C^-, x_C^+).

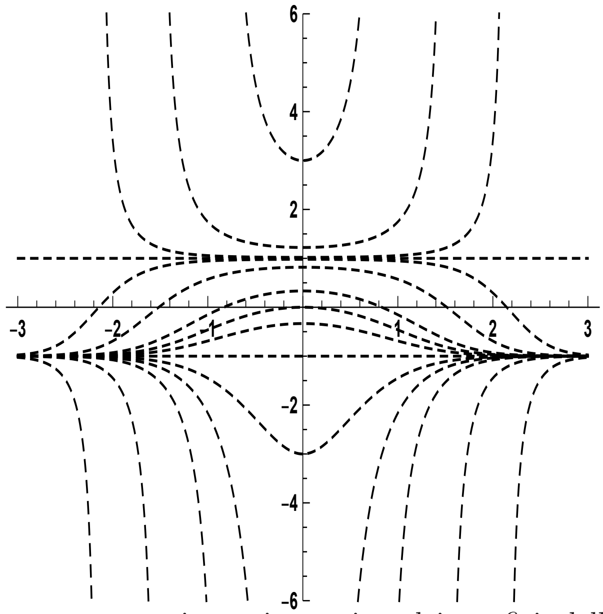


FIGURE 20. Una rappresentazione riassuntiva dei grafici delle funzioni $x \mapsto y_C(x) := -1 + \frac{2}{1+Ce^{2x^2}}$ e delle due soluzioni costanti $x \mapsto 1$ e $x \mapsto -1$. Osservate che, non ostante l'apparenza, per ogni punto del piano passa esattamente una curva della famiglia. Risolvere il problema di Cauchy si interpreta *geometricamente* come la ricerca dell'unica curva passante per il punto (x_0, α).

- *Soluzione del problema di Cauchy.* Si può trovare *analiticamente* la soluzione del problema di Cauchy (**??**) individuando l'unico valore del parametro C in (**??**) per il quale è vero che

$$y_C(x_0) = \alpha.$$

Vediamo alcuni esempi:

Supponiamo $x_0 := 0$. La condizione $y_C(0) := -1 + \frac{2}{1+C} = \alpha$ implica

$$C = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \text{se } \alpha \neq -1.$$

Se $\alpha = 3$ allora $C = -\frac{1}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy (**??**) è $y = y_{-1/2}$

$$y : \left(-\sqrt{\log\sqrt{2}}, \sqrt{\log\sqrt{2}}\right) \to \mathbb{R}, \quad \text{tale che } x \mapsto y(x) := -1 + \frac{2}{1 - e^{2x^2}/2}.$$

Se $\alpha = 0$ allora $C = 1$ e la soluzione del problema di Cauchy (**??**) è $y = y_1$

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{tale che } x \mapsto y(x) := -1 + \frac{2}{1 + e^{2x^2}}.$$

Se $\alpha = -3$ allora $C = -2$ e la soluzione del problema di Cauchy (**??**) è $y = y_{-2}$

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{tale che } x \mapsto y(x) := -1 + \frac{2}{1 - 2te^{2x^2}}.$$

Osservate che il dominio della soluzione dipende anche dal dato iniziale.

Esempio 13. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \tan y \\ y(x_0) = \pi/4. \end{cases} \tag{14}$$

Nell'intervallo aperto $-\pi/2 < y < \pi/2$ la funzione $y \mapsto \tan y$ è derivabile con derivata continua. La teoria garantisce che all'interno di questo intervallo il problema di Cauchy (**??**) ha un'unica soluzione.

Nell'intervallo $-\pi/2 < y < \pi/2$ l'equazione ha l'unica soluzione costante $x \mapsto y(x) := 0$.

Per $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili ottenendo

$$\frac{y(x)'}{\tan y(x)} = 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} \log(|\sin y(x)|) &= x + c, \qquad & c \in \mathbb{R} \\ |\sin y(x)| &= Ke^x, \qquad & K \in \mathbb{R}^+ \\ \sin y(x) &= Ke^x, \qquad & K \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \arcsin\left(Ke^x\right), \qquad & K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La costante K può essere determinata in modo univoco imponendo che la soluzione soddisfi la condizione iniziale $y(x_0) = \pi/4$. Otteniamo: $y(0) := \arcsin(K) = \pi/4$ e quindi $K = \sqrt{2}/2$. L'unica soluzione di (**??**) è

$$x \mapsto y(x) := \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^x\right)$$

il cui naturale dominio di definizione è la semiretta $(-\infty, \log\sqrt{2})$.

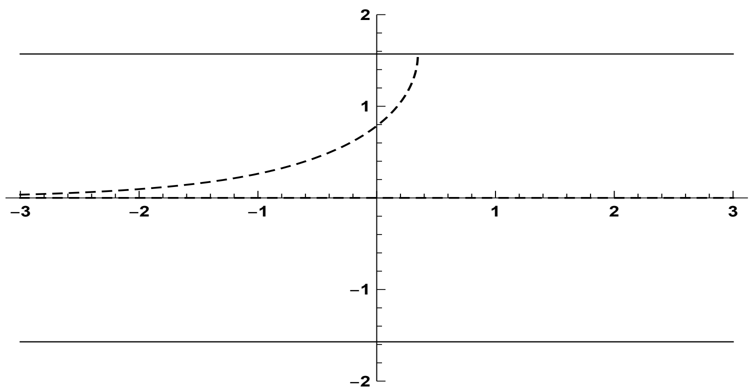


FIGURE 21. La soluzione del problema di Cauchy (**??**)

Esempio 14. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x \tan y \\ y(x_0) = \pi/4. \end{cases} \tag{15}$$

In modo completamente analogo all'esempio precedente: nell'intervallo aperto $-\pi/2 < y < \pi/2$ la funzione $y \mapsto \tan y$ è derivabile con derivata continua. La teoria garantisce che all'interno di questo intervallo il problema di Cauchy (**??**) ha un'unica soluzione.

Nell'intervallo $-\pi/2 < y < \pi/2$ esiste un'unica soluzione costante $x \mapsto y(x) := 0$.

Per $y(x) \neq 0$ possiamo separare le variabili ottenendo

$$\frac{y(x)'}{\tan y(x)} = 2x$$

e quindi

$$\begin{aligned} \log(|\sin y(x)|) &= x^2 + c, \qquad && c \in \mathbb{R} \\ |\sin y(x)| &= Ke^{x^2}, && K \in \mathbb{R}^+ \\ \sin y(x) &= Ke^{x^2}, && K \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \arcsin\left(Ke^{x^2}\right), && K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La costante K può essere determinata in modo univoco imponendo che la soluzione soddisfi la condizione iniziale $y(x_0) = \pi/4$. Otteniamo: $y(0) := \arcsin(K) = \pi/4$ e quindi $K = \sqrt{2}/2$. L'unica soluzione di (**??**) è

$$x \mapsto y(x) := \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{x^2}\right)$$

il cui naturale dominio di definizione, determinato dalla condizione che $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{x^2} \in (-1,1)$, è il segmento $(-\sqrt{\log\sqrt{2}}, \sqrt{\log\sqrt{2}})$.

12.3. **Equazioni lineari del primo ordine.** Sono equazioni del tipo

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{16}$$

dove a e b sono funzioni (a valori reali) continue e definite su uno stesso intervallo I.

Teorema 45. *Se $A : I \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi (anche fissata) primitiva di a in I allora*

$$x \mapsto y(x) := e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\, dx$$

*è una soluzione di (**??**). Nella formula precedente $x \mapsto \int b(x)e^{A(x)}\, dx$ indica la famiglia delle primitive di $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ in I.*

*Al variare della costante in $x \mapsto \int b(x)e^{A(x)}\, dx$ l'espressione precedente fornisce l'integrale generale di (**??**). Osservate che tutte le soluzioni sono definite sullo stesso intervallo I.*

*L'integrale generale di (**??**) può essere scritto usando integrali definiti. Fissiamo infatti $x_0 \in I$ e come funzione A scegliamo $A(x) := \int_{x_0}^x a(s)ds$. Allora una famiglia di soluzioni $y_c : I \to \mathbb{R}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ è*

$$\begin{aligned} x \mapsto y_c(x) &:= c\, e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds} + e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds} \int_{x_0}^x b(s) e^{\int_{x_0}^s a(t)dt}\, ds \\ &= c\, e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds} + \int_{x_0}^x b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}\, ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Questo è uno dei pochissimi casi in cui è possibile scrivere una *formula generale esplicita* che dia l'integrale generale.

Il relativo problema di Cauchy è della forma

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{18}$$

dove $x_0 \in I$.

Teorema 46. *Se $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue nell'intervallo I, allora l'unica soluzione $y : I \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy* (**??**) *è*

$$x \mapsto y(x) := y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_t^x a(s)\,ds}\,dt. \tag{19}$$

Esempio 15. Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^3 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{20}$$

Utilizzando la formula (**??**) con $x_0 := 0$, $y_0 := 2$, $a(x) := x$ e $b(x) := x^3$ otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= 2e^{-\int_0^x t\,dt} + \int_0^x t^3 e^{\int_x^t s\,ds}\,dt \\ &= 2e^{-x^2/2} + \int_0^x t^3 e^{t^2/2 - x^2/2}\,dt \\ &= e^{-x^2/2}\left(2 + \int_0^x t^3 e^{t^2/2}\,dt\right). \end{aligned}$$

Integrando per parti

$$\int_0^x t^3 e^{t^2/2} = x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + 2,$$

quindi la soluzione di (**??**) è

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x^2/2}\left(2 + x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + 2\right) \\ &= x^2 - 2 + 4e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Un grafico approssimativo è

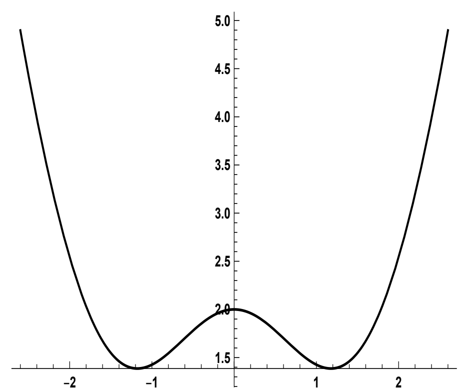


FIGURE 22. Parte del grafico della soluzione del problema di Cauchy (**??**)

Il seguente problema è molto simile.

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{21}$$

Utilizzando la formula (**??**) con $x_0 = 0$, $c = 2$, $a(x) = x$ e $b(x) = x^2$ otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= 2e^{-\int_0^x t\,dt} + \int_0^x t^2 e^{\int_x^t s\,ds}\,dt \\ &= 2e^{-x^2/2} + \int_0^x t^2 e^{t^2/2 - x^2/2}\,dt \\ &= e^{-x^2/2}\left(2 + \int_0^x t^2 e^{t^2/2}\,dt\right). \end{aligned}$$

In questo caso l'integrale interno non può essere scritto in termini di funzioni elementari. Si può comunque disegnare approssimativamente il grafico della soluzione.

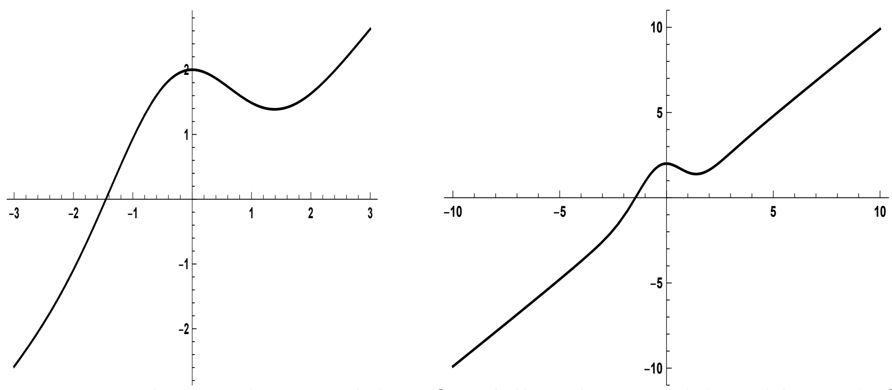


FIGURE 23. Due disegni di parte del grafico della soluzione del problema di Cauchy (**??**) a due scale differenti.

Osservazione Nella formula (**??**) che dà l'integrale generale dell'equazione (**??**) il primo addendo, cioè la famiglia di funzioni, parametrizzata dal parametro c,

$$x \mapsto w_c(x) := ce^{-\int_{x_0}^x a(s)ds}$$

è l'integrale generale dell'*equazione omogenea*

$$y' + a(x)y = 0.$$

Infatti

$$w_c'(x) = -ca(x)e^{-\int_{x_0}^x a(s)ds} = -a(x)w_c(x).$$

Invece il secondo addendo

$$x \mapsto \phi(x) := \int_{x_0}^x b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}\,ds$$

è una soluzione dell'*equazione completa*

$$y' + a(x)y = b(x)$$

infatti

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= b(x)e^{\int_x^x a(t)dt} + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}(-a(x))\, ds \\
&= b(x) - a(x)\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_x^s a(t)dt}\, ds \\
&= b(x) - a(x)\phi(x).
\end{aligned}$$

Quindi vediamo che l'integrale generale dell'equazione $y' + a(x)y = b(x)$ è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

12.4. **Equazioni lineari del secondo ordine.** La forma generale di queste equazioni è

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x) \tag{22}$$

dove α, β e g sono funzioni continue definite su uno stesso intervallo I. Il relativo problema di Cauchy ha la forma

$$\begin{cases} y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{23}$$

dove $x_0 \in I$.

Teorema 47. *L'integrale generale dell'equazione completa* (**??**) *si ottiene sommando l'integrale generale dell'*equazione omogenea

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$$

e una soluzione particolare dell'equazione completa (**??**).
A sua volta l'insieme delle soluzioni (cioè l'integrale generale) dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione 2 ottenuto combinando linearmente due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

Teorema 48. *Se le funzioni α, β, g sono definite e continue sullo stesso intervallo I e se $x_0 \in I$ allora il problema di Cauchy* (**??**) *ha una unica soluzione $y = y(x) \in C^2(I)$ per ogni coppia di dati iniziali y_0, y_1.*

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Sono un caso particolare delle equazioni precedenti. Sono del tipo

$$y'' + Ay' + By = f(t), \qquad A, B \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Per queste equazioni è facile calcolare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata

$$y'' + Ay' + By = 0. \tag{25}$$

Ci limitiamo qui ad un breve cenno sul calcolo dell'integrale generale.

Poichè l'operatore differenziale $y \mapsto y'' + Ay' + By$ è *lineare* l'integrale generale $t \mapsto y(t, c_1, c_2)$ di (**??**) è la somma di due parti

$$y(t, c_1, c_2) = w(t, c_1, c_2) + \varphi(t)$$

dove

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) \quad \text{è l'integrale generale di } y'' + Ay' + By = 0$$

e

$$t \mapsto \varphi(t) \quad \text{è una soluzione di } y'' + Ay' + By = f(t).$$

Quindi il problema di trovare l'integrale generale di (**??**) si spezza nei due problemi 'più semplici'

(1) trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea

$$y'' + Ay' + By = 0,$$

(2) trovare una cosiddetta *soluzione particolare* cioè almeno una soluzione dell'equazione completa (**??**).

Per la ricerca dell'integrale dell'equazione omogenea ci si riconduce alla ricerca delle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \tag{ec}$$

Si presentano tre casi

se $A^2 - 4B > 0$: allora (ec) ha due soluzioni reali distinte, siano esse λ_1 e λ_2. In questo caso l'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

se $A^2 - 4B = 0$: allora (ec) ha la sola soluzione $\bar{\lambda} = -B/2$. In questo caso l'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = (c_1 + tc_2) e^{-Bt/2}.$$

se $A^2 - 4B < 0$: allora (ec) ha due soluzioni complesse coniugate. Ponendo $\omega := \sqrt{4B - A^2}/2$, l'integrale generale è

$$t \mapsto w(t, c_1, c_2) = e^{-Bt/2} \left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \right).$$

Per la ricerca della soluzione particolare esistono tecniche di applicazione generale, per esempio il cosiddetto metodo di variazione delle costanti arbitrarie ed altre, più semplici, ma di applicabilità molto più limitata, come il metodo di similarità.

Seguendo questo secondo metodo, se il *termine noto* f in (**??**) ha una forma algebrica particolare è possibile trovare la soluzione particolare φ della stessa forma algebrica. Per esempio se f fosse un polinomio di grado n nella variabile t allora è possibile trovare (tranne che in casi molto particolari) una soluzione particolare che sia anche essa un polinomio di grado n. Analogamente se f fosse un esponenziale o una funzione trigonometrica.

Esempio 16. Iniziamo con un esempio "di scuola".

Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{26}$$

- Troviamo l'integrale generale dell'equazione $y'' - 5y' + 6y = 0$.

  L'equazione caratteristica associata è

  $$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

  che ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi le due funzioni $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

  $$t \mapsto v_1(t) := e^{2t}, \qquad t \mapsto v_2(t) := e^{3t}$$

  sono due soluzioni di $y'' - 5y' + 6y = 0$. Esse sono inoltre, chiaramente, linearmente indipendenti e quindi l'integrale generale di $y'' - 5y' + 6y = 0$ è la famiglia di funzioni $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendente dai due parametri reali c_1 e c_2,

  $$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

- Determiniamo i due parametri c_1 e c_2 in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte. Poichè
$$w_{c_1,c_2}(0) = c_1 + c_2, \text{ e } \quad w'_{c_1,c_2}(0) = 2c_1 + 3c_2,$$
c_1 e c_2 sono determinati risolvendo il sistema lineare
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ 2c_1 + 3c_2 = y_1. \end{cases}$$
Le soluzioni sono $c_1 = 3y_0 - y_1$ e $c_2 = y_1 - 2y_0$. Quindi l'unica soluzione di (**??**) è
$$t \mapsto y(t) := (3y_0 - y_1)e^{2t} + (y_1 - 2y_0)e^{3t}.$$
- Andamento di due soluzione per diversi dati iniziali.

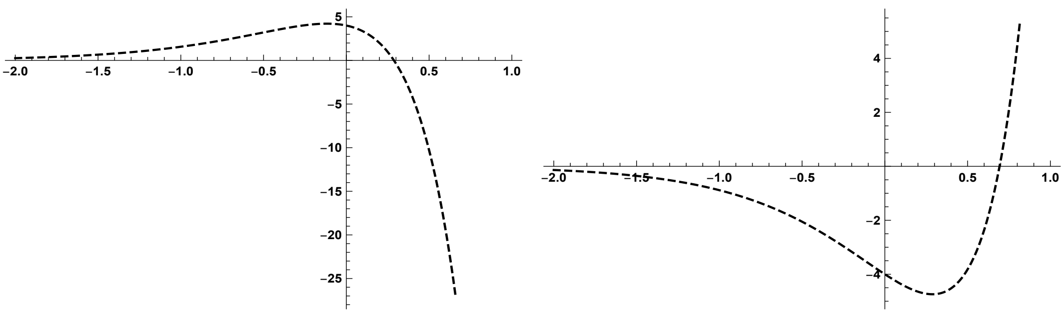


FIGURE 24. Parte dei grafici di due soluzioni del problema (**??**):

Esempio 17. Ancora un esempio "di scuola".
Risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = \cos 2t \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{27}$$

- Troviamo l'integrale generale dell'equazione *omogenea* $y'' + 5y' + 6y = 0$.
L'equazione caratteristica associata è
$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$
che ha le due soluzioni reali $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Quindi le due funzioni $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da
$$t \mapsto v_1(t) := e^{-2t}, \qquad t \mapsto v_2(t) := e^{-3t}$$
sono due soluzioni di $y'' + 5y' + 6y = 0$. Esse sono linearmente indipendenti e quindi l'integrale generale di $y'' + 5y' + 6y = 0$ è la famiglia di funzioni $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendente dai due parametri reali c_1 e c_2,
$$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}.$$
- Determiniamo una *soluzione particolare* dell'equazione $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$.
Usando il *metodo di similarità*, cerchiamo una soluzione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo
$$t \mapsto \psi(t) := A \sin 2t + B \cos 2t$$
e determiniamo A e B in modo che ψ sia una soluzione di $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$.
$$\psi'(t) := 2A \cos 2t - 2B \sin 2t$$
$$\psi''(t) := -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

che sostituiti nell'equazione

$$-4A\sin 2t - 4B\cos 2t + 5(2A\cos 2t - 2B\sin 2t) + 6(A\sin 2t + B\cos 2t) = \cos 2t$$

$$(2A - 10B)\sin 2t + (2B + 10A)\cos 2t = \cos 2t.$$

Questa equazione è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ se i coefficienti A, B sono tali che

$$\begin{cases} 2A - 10B = 0 \\ 10A + 2B = 1 \end{cases}$$

quindi per $A = 5/52$ e $B = 1/52$. La *soluzione particolare* ψ è

$$t \mapsto \psi(t) := 5/52 \sin 2t + 1/52 \cos 2t.$$

- L'integrale generale y_{c_1,c_2} dell'equazione completa è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Quindi

$$t \mapsto y_{c_1,c_2}(t) := c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + 5/52 \sin 2t + 1/52 \cos 2t.$$

- Determiniamo i due parametri c_1 e c_2 in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte. Poichè

$$y_{c_1,c_2}(0) = c_1 + c_2 + 1/52, \qquad y'_{c_1,c_2}(0) = -2c_1 - 3c_2 + 5/26,$$

c_1 e c_2 sono determinati risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 - 1/52 \\ -2c_1 - 3c_2 = y_1 - 5/26. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $c_1 = 3y_0 + y_1 - 1/4$ e $c_2 = -2y_0 - y_1 + 6/26$. Quindi l'unica soluzione di (**??**) è

$$t \mapsto y(t) := (3y_0 + y_1 - 1/4)e^{-2t} + (-2y_0 - y_1 + 6/26)e^{-3t} + 5\sin 2t/52 + \cos 2t/52.$$

- Andamento di due soluzione per diversi dati iniziali.

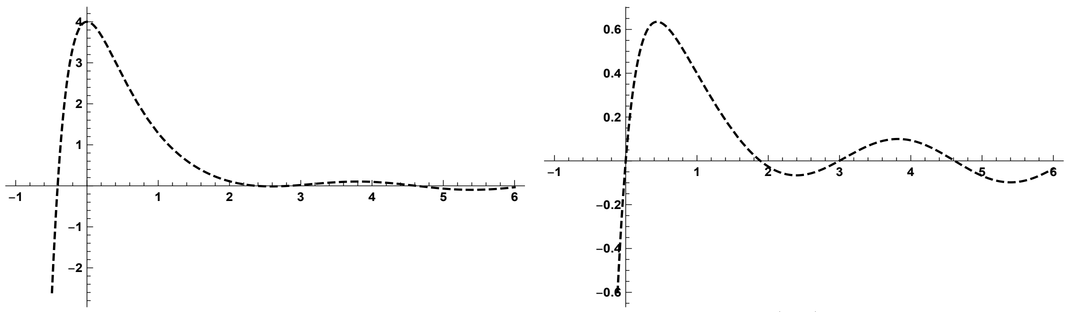


FIGURE 25. Parte dei grafici di due soluzioni del problema (**??**): nel primo $y_0 = 4$ e $y_1 = 0$; nel secondo $y_0 = 0$ e $y_1 = 4$.

Esempio 18. [Caduta di un grave senza resistenza dell'aria] Supponiamo che $y(t)$ rappresenti l'altezza rispetto al suolo di un grave. Se l'oggetto è sottoposto solo alla forza di gravità la funzione $t \mapsto y(t)$ soddisfa l'equazione

$$y'' = -g$$

dove $g > 0$ è l'accelerazione gravitazionale (che supponiamo costante in questo modello semplificato). Tutte le soluzioni sono del tipo

$$t \mapsto y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_0 \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

dove c_1 e c_0 sono costanti arbitrarie. Questo due costanti hanno un chiaro significato fisico: $c_0 = h_0$ è la posizione all'istante iniziale 0 e $c_1 = v_0$ è la velocità nel medesimo istante. La funzione

$$t \mapsto y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0 \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = h_0, \\ y'(0) = v_0. \end{cases}$$

Esempio 19 (Caduta di un grave con resistenza dell'aria)**.** Studiamo ora lo stesso modello tenendo conto della resistenza dell'aria. Supponiamo che la resistenza sia proporzionale alla velocità attraverso un coefficiente di proporzionalità $\beta > 0$. Otteniamo l'equazione

$$y'' = -g - \beta y'.$$

È una equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e può essere trattata come negli esempi precedenti. Però osserviamo che l'equazione non dipende esplicitamente da y, possiamo quindi considerarla come una equazione del primo ordine nella variabile y'. Con il cambio di variabile

$$p(t) := y'(t)$$

la funzione $t \mapsto p(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$p' = -g - \beta p.$$

Questa è una equazione lineare del primo ordine (a coefficienti costanti) il cui integrale generale, al variare del parametro c_1 è

$$t \mapsto p(t) = -\frac{g}{\beta} + \frac{c_1}{\beta} e^{-\beta t}, \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Integrando in t otteniamo un'espressione per $t \mapsto y(t)$, dipendente da due parametri c_0 e c_1,

$$t \mapsto y(t) = c_0 - \frac{g}{\beta} t + \frac{c_1}{\beta^2}\left(e^{-\beta t} - 1\right), \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Se imponiamo le due *condizioni iniziali* su posizione h_0 e velocità v_0 all'istante $t = 0$ possiamo determinare univocamente c_0 e c_1 ottenendo

$$c_0 = h_0 \text{ e } c_1 = -g - \beta v_0.$$

Quindi la funzione

$$t \mapsto y(t) = h_0 - \frac{g}{\beta} t + \frac{g - \beta v_0}{\beta^2}\left(e^{-\beta t} - 1\right) \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} y'' = -g - \beta y \\ y(0) = h_0, \\ y'(0) = v_0. \end{cases}$$

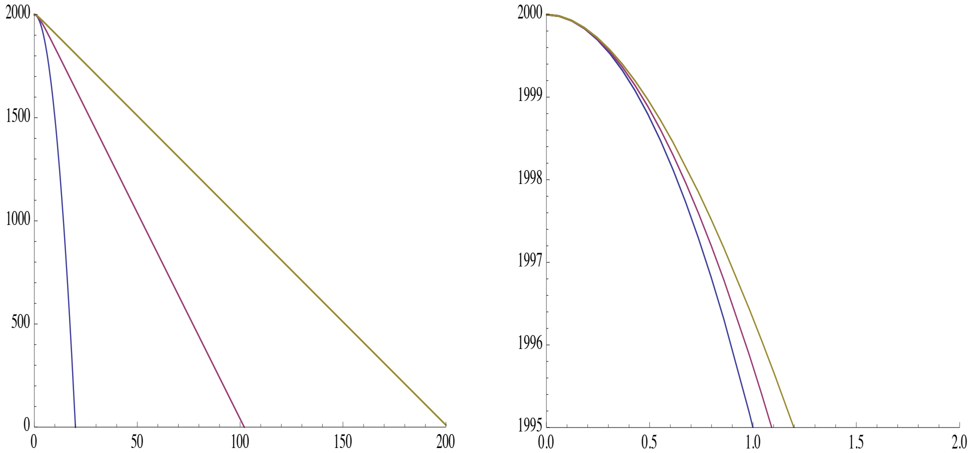


FIGURE 26. Il grafico della soluzione di (i) (un arco di parabola) e di due soluzioni di (ii) (curve asintoticamente lineari) per diversi valori di β. In tutti casi $h_0 = 2000$ e $v_0 = 0$. Le tre curve precedenti sono vicine, anzi tangenti per $t = 0$, perchè quando la velocità $y'(t)$ è piccola la resistenza dell'aria è trascurabile.

Esempio 20. [Vibrazioni meccaniche libere] Consideriamo il movimento di un punto materiale P vincolato a muoversi su una retta e soggetto ad una forza elastica attrattiva, cioè proporzionale alla distanza del punto materiale P da un centro fisso che identifichiamo con l'origine O. Indichiamo con $t \mapsto y(t)$ la posizione del punto P sulla retta e supponiamo che O coincida con il punto di coordinata $y = 0$. L'equazione del moto è data da

$$my''(t) = -ky(t)$$

dove m è la massa di P e $k > 0$ è una costante caratteristica della forza elastica (per esempio potrebbe essere il coefficiente di elasticità di una molla).

Se poniamo $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ otteniamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' = -\omega^2 y \tag{28}$$

e il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{29}$$

Il problema (**??**) può essere esplicitamente risolto seguendo la seguente procedura.

- Troviamo l'integrale generale dell'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$.
  L'equazione caratteristica associata è
  $$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$
  che ha le due soluzioni (complesse coniugate) $\lambda_1 = \omega i$ e $\lambda_2 = -\omega i$. Quindi le due funzioni $v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da
  $$t \mapsto v_1(t) := \cos(\omega t), \qquad t \mapsto v_2(t) := \sin(\omega t)$$
  sono due soluzioni di $y''+\omega^2 y = 0$. Esse sono inoltre, chiaramente, linearmente indipendenti e quindi l'integrale generale di $y'' + \omega^2 y = 0$ è la famiglia di funzioni $w_{c_1,c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dipendente dai due parametri reali c_1 e c_2,

$$t \mapsto w_{c_1,c_2}(t) := c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)^{20}.$$

- Determiniamo i due parametri c_1 e c_2 in modo che le condizioni iniziali siano soddisfatte.

$$w_{c_1,c_2}(0) = c_1, \text{ quindi la prima condizione implica } c_1 = y_0.$$

Infine, $w'_{c_1,c_2}(t) = -c_1\,\omega \sin(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t)$ e quindi

$$w'_{c_1,c_2}(0) = c_2\,\omega, \text{ e la seconda condizione implica } c_2 = y_1/\omega.$$

Infine: la funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$t \mapsto y(t) := y_0\,\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega} \sin(\omega t)$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (**??**).
- Andamento della soluzione per alcuni valori di ω, y_0, y_1.

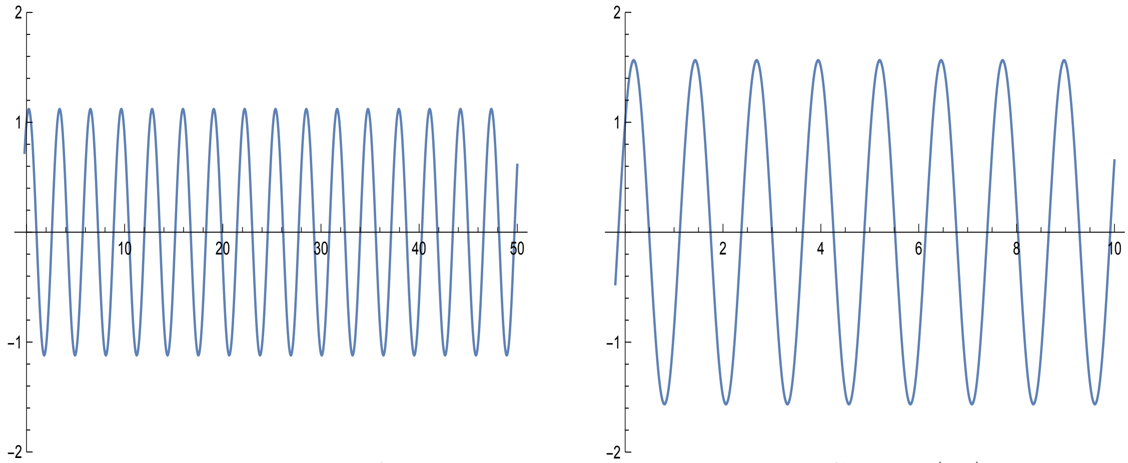


FIGURE 27. Parte dei grafici delle soluzioni del problema di Cauchy (**??**): nel disegno di sinistra $\omega = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$; nel disegno di destra $\omega = 5$, $y_0 = 1$, $y_1 = 6$. Osservate la differenza di scala nella direzione orizzontale.

Esempio 21. [Vibrazioni meccaniche con una forza esterna periodica] Con considerazioni analoghe a quelle del problema precedente otteniamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = M\cos(\alpha t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{30}$$

nel quale supponiamo che $0 < \alpha < \omega$ e $M > 0$.

Procedendo come nei casi precedenti otteniamo l'unica soluzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di (**??**) che è

$$y(t) := \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}\,(\cos(\alpha t) - \cos(\omega t)) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

[20] *Esercizio:* Scrivete, usando le solite formule trigonometriche, $t \mapsto c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ nella forma

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \omega_0)$$

e date un'interpretazione fisica delle costanti $A > 0$ (ampiezza del moto) e ω_0 (fase iniziale).

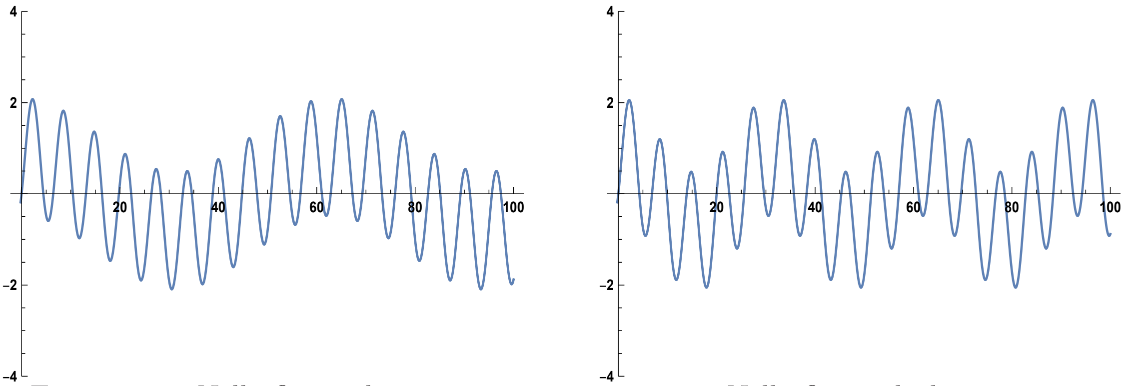


FIGURE 28. Nella figura di sinistra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.1$. Nella figura di destra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.2$. In entrambi i casi si vede l'effetto della forza esterna di frequenza molto piú bassa di quella propria dell'oscillatore.

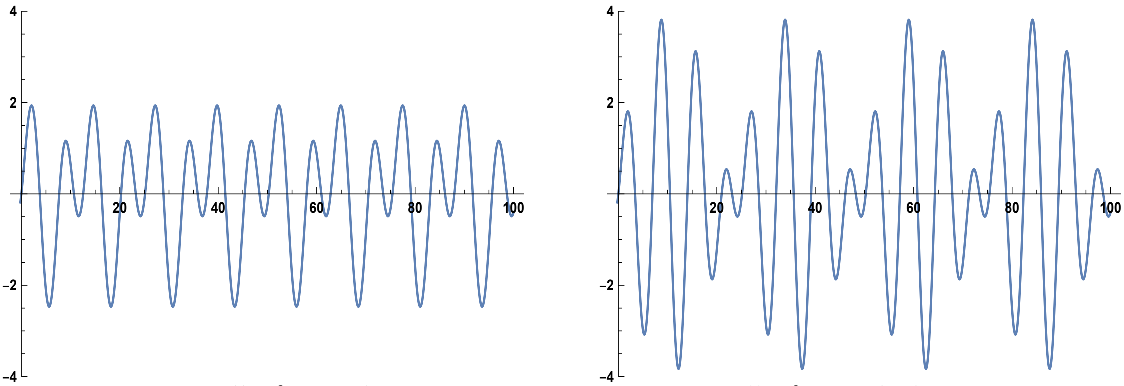


FIGURE 29. Nella figura di sinistra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.5$. Nella figura di destra $\omega = 1$ e $\alpha = 0.75$. Nel secondo caso inizia a diventare evidente un fenomeno di risonanza.

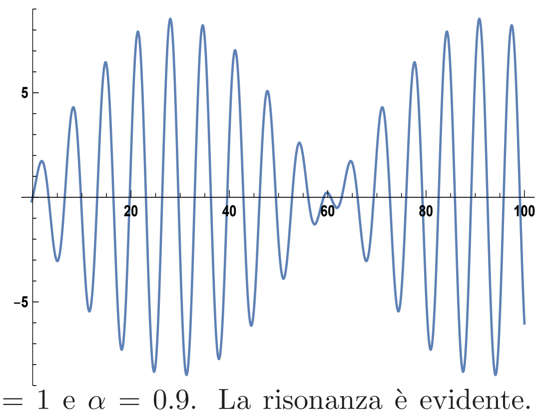


FIGURE 30. Qui $\omega = 1$ e $\alpha = 0.9$. La risonanza è evidente. Osservaste anche il cambiamento di scala nella direzione verticale.

Esempio 22. [Vibrazioni meccaniche con resistenza] Se sul punto materiale P agisce anche una resistenza di tipo viscoso, come nell'esempio **??**, allora l'equazione del moto è

$$my''(t) = -kx(t) - \beta y'(t)$$

dove $\beta > 0$. Ponendo $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\gamma := \frac{1}{2}\frac{\beta}{m}$ si ottiene l'equazione differenziale

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0. \tag{31}$$

Da considerazioni fisiche sappiamo che il moto di P ha caratteristiche molto diverse a seconda della relativa grandezza delle costanti fisiche γ e ω. Per esempio se $\gamma << \omega$, cioè se la resistenza viscosa fosse molto piccola rispetto alla forza elastica, ci possiamo aspettare un moto ancora oscillante e (quasi) periodico. Al contrario se la resistenza viscosa fosse molto grande ($\gamma >> \omega$) ci possiamo aspettare una scomparsa totale del moto oscillatorio. Se abbiamo fiducia che l'equazione (ii) sia un buon modello per la descrizione del moto del punto materiale P ci dobbiamo aspettare che queste differenze di comportamento appaiano nelle soluzioni di (ii). Questo è quello che avviene e le differenze di comportamento appaiono nella differente forma analitica delle soluzioni.

Se $\omega > \gamma$ l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

ha le due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \qquad \lambda_2 = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

e le soluzioni dell'equazione differenziale sono del tipo

$$t \mapsto y(t) := e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t)\right)$$

che può anche essere scritta come

$$t \mapsto y(t) := Ae^{-\gamma t}\cos(\nu t + \nu_0)$$

dove $\nu = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$; A e ν_0 sono costanti arbitrarie legate a c_1 e c_2 dalle relazioni $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\nu_0 = \arccos \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$.

Per qualsiasi scelta di c_1 e c_2, oppure di A e ν_0, le soluzioni hanno limite 0 per $t \to +\infty$ e conservano un carattere oscillatorio, con una frequenza $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < \omega$ diversa da quella delle soluzioni del problema senza attrito.

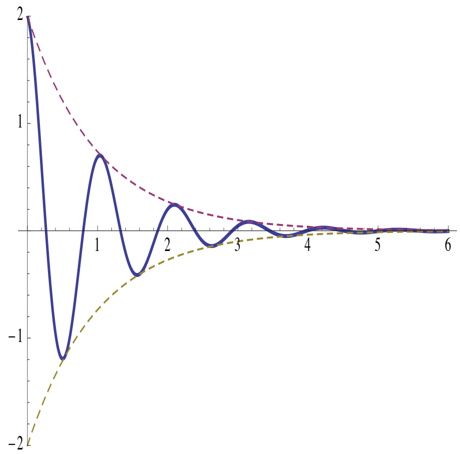


FIGURE 31. $\omega > \gamma$

Se $\gamma > \omega$ allora le soluzioni sono

$$t \mapsto y(t) := c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove $\lambda_1 := -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$ e $\lambda_2 := -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$ sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$. Per qualsiasi scelta di c_1 e c_2 le soluzioni hanno limite 0 per

$t \to +\infty$ e ogni comportamento oscillatorio è completamente scomparso. Andamenti tipici sono i seguenti

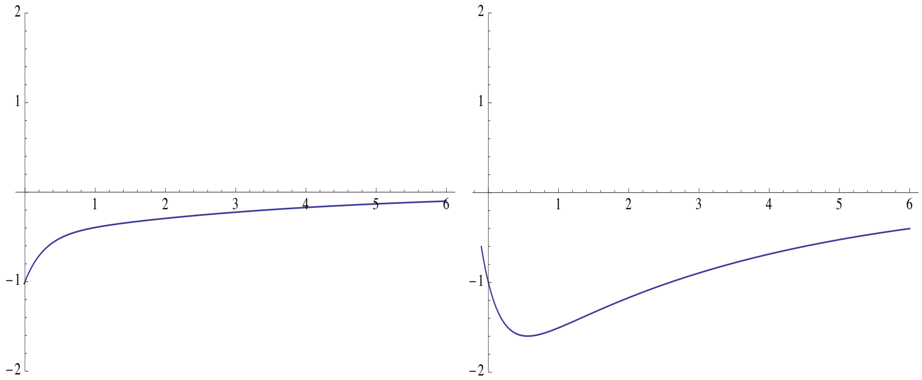


FIGURE 32. $\gamma > \omega$

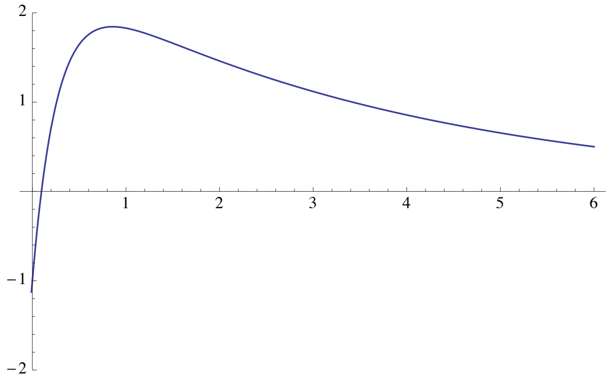
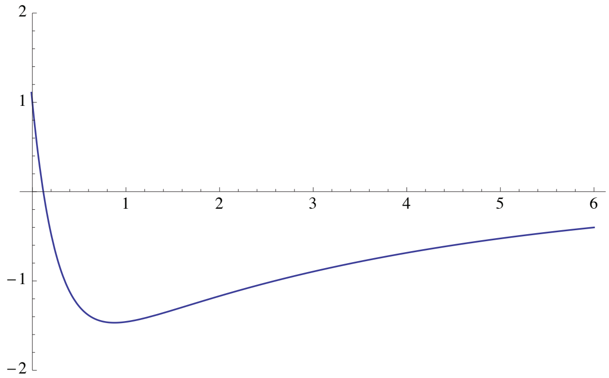


FIGURE 33. $\gamma > \omega$

Se $\omega = \gamma$ l'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$ ha una sola soluzione reale $\lambda := -\gamma$ e le soluzioni sono

$$t \mapsto y(t) := (c_1 + c_2 t)\, e^{-\gamma t}$$



13. **Settimana 13**

Serie numeriche: *Cap 8: par 2.1, 2.2, 2.3*

2.1 Definizione di serie e prime proprietà

Si tratta di dare un senso opportuno alla nozione di *somma di infiniti addendi* reali o complessi. Si usa la seguente terminologia e simbologia

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Gli a_n sono detti termini o addendi della serie. Qui ci limitiamo a considerare $a_n \in \mathbb{R}$ oppure, in qualche caso, $a_n \in \mathbb{C}$. La successione

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$$

si dice *successione delle somme parziali* della serie.

Definizione 20 (Definizione 2.1, pag 428)**.** Definiamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n,$$

se il limite esiste finito o $\pm\infty$.

Se il limite esiste finito diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *convergente.* Se il limite è $\pm\infty$ diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è *divergente.* Diciamo che la serie è *irregolare* negli altri casi. Quindi, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice *convergente, divergente o irregolare* quando la corrispondente successione delle somme parziali è convergente, divergente o irregolare.

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente si definisce *somma della serie* il limite della successione delle somme parziali. In particolare se

$$S := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \lim_{N\to+\infty} \left(S - \sum_{n=1}^{N} a_n \right) = 0$$

si usa spesso la notazione

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Osservazione 3. Il *carattere di una serie*, cioè il suo essere convergente, divergente o irregolare, non è modificato se vengono comunque modificati un *numero finito* di addendi della serie.
Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente allora per ogni $N > 1$ la serie $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ è convergente e

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = 0.$$

La quantità $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ si denota *coda* o *resto* della serie.

Osservazione 4. Se $z_n := a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ allora

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + ib_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + i \sum_{n=1}^{N} b_n$$

e quindi

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} z_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S := \alpha + i\beta \qquad \text{se e solo se} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \alpha \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \beta.$$

Esempio 23 (Esempio 2.1 pag 429)**.** Si dice serie geometrica una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

dove $\alpha \in R$ oppure $\alpha \in C$ si chiama *ragione della serie.* In questo caso è possibile scrivere in forma chiusa il valore delle somme parziali, infatti

$$s_N := \sum_{k=0}^{N} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}.$$

Quindi, se $\alpha \in R$,

$$s_N = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & -1 < \alpha < 1 \\ \text{irregolare} & \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Nel caso in cui la ragione della serie sia il numero $w \in \mathbb{C}$ allora anche in questo caso, se $|w| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w^k = \frac{1}{1-w}.$$

Infatti, perchè $|w^{N+1}| = |w|^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora anche $w^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e

$$s_N = \frac{1-w^{N+1}}{1-w} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-w}.$$

Esempio 24 (Esempio 2.2 pag 430)**.** La serie 'telescopica' di Mengoli[21]:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è una serie convergente e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Infatti anche in questo caso è possibile scrivere in forma chiusa il valore delle somme parziali:

$$\begin{aligned} s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(N-1)\cdot N} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N} \quad \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

[21]Pietro Mengoli (Bologna 1626 – Bologna 1686)

Esempio 25 (Esempio 2.3 pag 431)**.** Le serie armonica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \ldots$$

è una serie divergente. Questo può essere visto stimando le somme parziali nel seguente modo

$$\begin{aligned}
s_4 =& 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} > 2 \\
s_8 =& 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} > \frac{5}{2} \\
s_{16} =& 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} > 3 \\
s_{2^N} =& 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N} > 1 + \frac{N}{2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

e quindi l'intera successione s_N che è monotona crescente ha limite $+\infty$.

Esempio 26. *Esempi 2.4, 2.5* [La serie armonica generalizzata] Se $s > 0$, si dice *serie armonica generalizzata* la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Per quanto riguarda la loro convergenza, vale il seguente risultato

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \begin{cases} \text{diverge per } s \leq 1 \\ \\ \text{converge per } s > 1 \end{cases}$$

Infatti

se $s \leq 1$:

$$\begin{aligned}
s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } N \to +\infty
\end{aligned}$$

se $s > 1$:

$$\begin{aligned}
s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} \\
&\leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^s} dx \\
&= 1 + \frac{1}{1-s}\left(N^{1-s} - 1\right) \longrightarrow 1 - \frac{1}{1-s} \quad \text{per } N \to +\infty
\end{aligned}$$

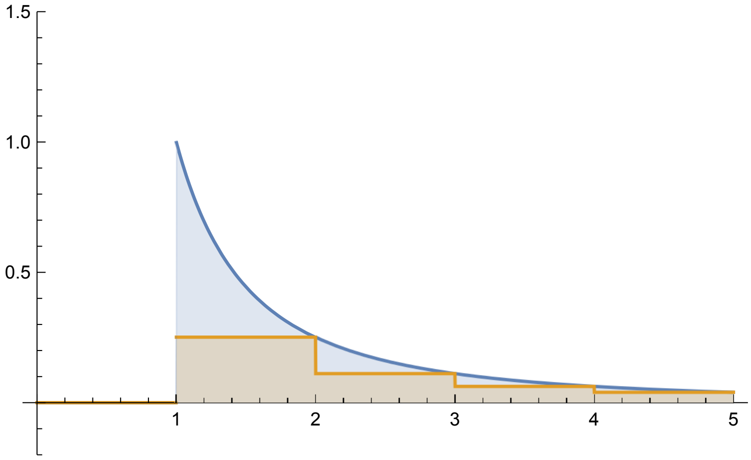


FIGURE 34. $\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s} < \int_1^N \frac{1}{x^s} dx$

Per $s > 1$ si definisce $\zeta(s)$ il valore della somma della serie armonica di esponente s:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

e la funzione $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ prende il nome di *funzione ζ di Riemann.*

Alcune "serie di Taylor" forniscono esempi molto interessanti di serie numeriche che sono convergenti, almeno per certi valori di $x \in \mathbb{R}$, e di cui è nota la somma.

Esempio 27. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato e la sua somma è, per ogni $x \in \mathbb{R}$, uguale a e^x.

Infatti, la funzione $x \mapsto f(x) := e^x$ è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ ed è quindi possibile scriverne i polinomi di Taylor di qualsiasi grado. La formula di Taylor con centro $x_0 = 0$ e resto in forma integrale dice che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt.$$

Quindi

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt \right|.$$

Cerchiamo ora di stimare l'integrale sulla destra. Separiamo i casi in cui $x > 0$ o $x < 0$.

Se $x > 0$, poichè la funzione integranda è positiva, $\int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt > 0$ e quindi, usando la stima elementare $0 < e < 4$ e la proprietà di monotonia degli integrali, segue che

$$\frac{1}{n!} \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt \leq \frac{1}{n!} 4^x \int_0^x (x-t)^n \, dt = \frac{1}{n!} 4^x \frac{1}{n+1} x^{n+1} = 4^x \frac{x^{n+1}}{n+1!}.$$

Se $x < 0$, poichè la funzione integranda è negativa,

$$\frac{1}{n!} \left| \int_0^x e^t \cdot (x-t)^n \, dt \right| = \frac{1}{n!} \int_x^0 e^t \cdot (t-x)^n \, dt \leq \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n \, dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Unendo le due stime, otteniamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| < \max(1, 4^x) \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e, poichè $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ per ogni x fissato,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Per esempio, per $x = 3$, $x = 1/2$ o per $x = -1$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = e^3, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} = \sqrt{e}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}.$$

I due esempi seguenti sono analoghi

Esempio 28. Le due serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ sono entrambe convergenti per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, ancora per ogni $x \in \mathbb{R}$, le loro somme sono rispettivamente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

Proviamo per esempio la prima delle due.

Scriviamo, in modo perfettamente analogo a quanto fatto nell'esempio precedente, la formula di Taylor con resto integrale per la funzione $x \mapsto \sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (D^{(2n+2)} \sin t) \cdot (x-t)^{2n+1} dt.$$

Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| &= \frac{1}{(2n+1)!} \left| \int_0^x (D^{(2n+2)} \sin t) \cdot (x-t)^{2n+1} dt \right| \\ &\le \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{|x|} \left| (D^{(2n+2)} \sin t) \cdot (x-t)^{2n+1} \right| dt \\ &\le \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{|x|} \left| (x-t)^{2n+1} \right| dt, \qquad \text{perchè } |D^{(2n+2)} \sin t| \le 1 \\ &= \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Questo dimostra che

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x.$$

Osservazione 5 (La scrittura esponenziale dei numeri complessi). Abbiamo dimostrato che

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Poichè il lato destro di questa uguaglianza ha senso anche se $x \in \mathbb{R}$ è sostituito da un numero immaginario iy, con $y \in \mathbb{R}$, questo *suggerisce di definire*

$$e^{iy} := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo che il limite scritto sulla destra esiste e calcoliamone il valore.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \cdots + i^n \frac{y^n}{n!} \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{iy} &:= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y, \qquad\qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nel prossimo esempio si vede che non necessariamente una ”serie di Taylor” converge per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 29. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ converge per $-1 < x \leq 1$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \log(1+x), \qquad \text{per } -1 < x \leq 1.$$

Analogamente agli esempi precedenti, scriviamo la formula di Taylor con resto integrale per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$. Allora, per $-1 < x$ vale

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{1}{n!} \int_0^x (D^{(n+1)} \log(1+t)) \cdot (x-t)^n dt.$$

Osserviamo che

$$D^{(n+1)} \log(1+t) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+t)^{n+1}}.$$

Quindi, sempre per $-1 < x$,

$$\begin{aligned}\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right| &= \left|\frac{1}{n!}\int_0^x (D^{(n+1)}\log(1+t))\cdot(x-t)^n dt\right| \\ &\le \frac{1}{n!}\int_0^{|x|}\left|(D^{(n+1)}\log(1+t))\cdot(x-t)^n\right| dt \\ &\le \frac{1}{n}\int_0^{|x|}\frac{|x-t|^n}{(1+t)^{n+1}}dt \\ &\le \max(1,\frac{1}{1+x})\cdot\frac{|x|^{n+1}}{n(n+1)} \to 0 \qquad \text{per } n\to+\infty \text{ per ogni } |x|\le 1.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo provato che

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} := \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = \log(1+x) \qquad \text{per } -1 < x \le 1.$$

La serie trattata nell'esempio precedente è, fra l'altro, una 'serie a segni alternati'. La convergenza di queste serie può essere trattata anche nel seguente modo.

Esempio 30 (Esempio 2.16 pag 441)**.** Le serie 'a segni alternati'

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \ldots$$

è una serie convergente. Basta osservare che le somme parziali sono "ordinate" nel modo seguente

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_5 < s_3 < s_1$$

e che

$$s_{N+1} - s_N \le \frac{1}{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

quindi la successione s_N delle somme parziali converge a un limite S tale che

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots S \cdots < s_5 < s_3 < s_1$$

Queste disuguaglianze danno inoltre delle stime molto semplici della somma S. Per esempio $s_2 < S < s_1$ cioè $\frac{1}{2} < S < 1$, oppure con maggiore precisione $s_6 < S < s_5$ cioè $\frac{37}{60} < S < \frac{47}{60}$, ...

In realtà di questa serie conosciamo esattamente la somma; infatti questa serie è la serie di Taylor della funzione $x \mapsto \log(1+x)$ calcolata per $x = 1$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \log 2.$$

Teorema 49 (Corollario 2.2, pag 431. Condizione necessaria di convergenza di una serie)**.**

$$\textit{se } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ è convergente allora } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Vale anche la seguente condizione necessaria e sufficiente

Teorema 50 (Teorema 2.1, pag 430. Condizione di convergenza di Cauchy)**.** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *è convergente se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N(\varepsilon) > 0$ *tale che per ogni* m, n *tali che* $N \leq m < n$ *valga*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

2.2 Serie numeriche a termini non negativi

Teorema 51 (Proposizione 2.3, pag 432)**.** *Una serie a termini non negativi è convergente oppure è divergente a* $+\infty$*.*

Teorema 52 (Teorema 2.4, pag 432 e Corollario 2.5, pag 434: criteri del confronto e del confronto asintotico)**.** *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sono serie a termini non negativi allora*

(1) *se* $0 \leq a_k \leq b_k$ *per* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *allora*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ divergente} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \textit{ divergente}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \textit{ convergente} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ convergente}$$

(2) *l'ipotesi si può indebolire nel modo seguente: se esistono due costanti* $C > 0$ *e* $\bar{N} > 0$ *tali che* $0 \leq C a_k \leq b_k$ *per* $k = \bar{N}, \bar{N}+1, \bar{N}+2, \ldots$ *allora*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ divergente} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \textit{ divergente}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \textit{ convergente} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ convergente}$$

(3) *nella forma più generale: se esistono tre costanti* $0 < C_1 < C_2$ *e* $\bar{N} > 0$ *tali che*

$$0 \leq C_1 a_k \leq b_k \leq C_2 a_k \quad \textit{per } k = \bar{N}, \bar{N}+1, \bar{N}+2, \ldots \textit{ allora}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \textit{hanno lo stesso carattere.}$$

Una variante spesso operativamente più semplice è: se $0 < a_k$ *e* $0 < b_k$ *per* $k = \bar{N}, \bar{N} + 1, \bar{N} + 2, \ldots$ *allora*

$$0 < \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \textit{hanno lo stesso carattere.}$$

Sono corollari dei Teoremi del Confronto i seguenti teoremi (enunciati qui non nella loro forma più generale):

Teorema 53 (Teorema 2.6 pag 434: criterio della radice)**.** *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è una serie a termini* non negativi *(cioè* $a_n \geq 0$*) e se*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è convergente.*

Teorema 54 (Teorema 2.8 pag 435: criterio del rapporto)**.** *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è una serie a termini* positivi *(cioè* $a_n > 0$*) e se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è convergente.*

Esempio 31. Per qualsiasi $\alpha > 0$ fissato, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ è convergente. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n+1} = 0$$

e quindi, utilizzando il criterio del rapporto, abbiamo provato che la serie è convergente.

2.3 Convergenza e convergenza assoluta

Sono pochi i teoremi generali ed elementari sulla convergenza di serie numeriche con termini di segno qualsiasi. Il seguente teorema fornisce una condizione sufficiente *ma non necessaria* di convergenza.

Teorema 55 (Teorema 2.11 pag 438)**.** *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è una serie a termini* reali o complessi*, allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ è convergente} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è convergente.}$$

Definizione 21 (Definizione 2.2 pag. 439)**.** Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con termini reali o complessi, si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Esempio 32. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$$

è assolutamente convergente per $\alpha > 1$ ed è convergente ma non assolutamente convergente per $0 < \alpha \leq 1$.

Esempio 33. La serie esponenziale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è assolutamente convergente, e quindi convergente, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Infatti la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

è convergente.

Serie a segni alternati: sono serie della forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$ dove $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per queste serie vale il seguente criterio *solo sufficiente* di convergenza.

Teorema 56 (Teorema 2.12 pag. 440. Criterio di convergenza di Leibniz[22])**.** *Supponiamo che*

[22]Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipsia 1646 – Hanover 1716)

(1) $a_k \geq 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$,
(2) $a_{k+1} \leq a_k$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$,
(3) $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \textit{è convergente.}$$

Nelle stesse ipotesi possiamo fare la seguente 'stima dell'errore'. Indichiamo con S la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ allora

$$\left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k - S \right| < a_{N+1}.$$

Esempio: stima del valore di $\dfrac{1}{e}$ usando la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$

2.5 Proprietà associativa e commutativa.

Definizione 22 (Definizione 2.3 pag.445)**.** Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ è un riordinamento della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se esiste una applicazione biunivoca $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$a_k = b_{j(k)}.$$

Teorema 57 (Teorema 2.17 pag 446)**.** *Se una serie è assolutamente convergente allora ogni suo riordinamento è convergente ed ha la stessa somma.*

Teorema 58 (Teorema 2.18 pag 446 di Riemann Dini)**.** *Se una serie è convergente ma non assolutamente convergente, allora scelto un qualsiasi $S \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento della serie data con somma S.*

14. **Settimana 14:**

Cap 8 par 3.1, 3.2, 3.3 **Funzioni integrali. Integrali generalizzati e serie numeriche**

3.1 Integrabili impropri

Definizione 3.1 e Definizione 3.2: Sia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ e sia Riemann integrabile in $[a+\delta, b]$ per ogni δ, $0 < \delta < b-a$. Se esiste finito

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx$$

diciamo che f è *Riemann integrabile in senso generalizzato in* $(a,b]$ e poniamo

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx.$$

Sia $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tale che f sia Riemann integrabile in $[c,b]$ per ogni $c < b$. Se esiste finito

$$\lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx$$

diciamo che f è *Riemann integrabile in senso generalizzato in* $(-\infty, b]$ e poniamo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Analogamente se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ oppure $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$.
Si dice che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Riemann integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$ se è integrabile in senso generalizzato in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$.

Esempi 3.3, 3.4, 3.5

(1)

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\, dx := \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx := \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

[**Esempio**]

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx := \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{(\log 2)^{1-\beta}}{\beta - 1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}$$

3.2 Criteri di convergenza
Teorema 3.1 Criterio del confronto

Proposizione 3.2 Criterio del confronto asintotico

Definizione: I è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio su I se $|f|$ è integrabile in senso improprio su I

Teorema 3.3 assoluta convergenza implica convergenza: I è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia Riemann integrabile in ogni sottointervallo chiuso e limitato $J \subset I$. Allora, f è assolutamente integrabile in I implica f è Riemann integrabile in I e

$$\left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|\, dx$$

Esempio 3.9 L'integrale $\int_{=}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ è convergente ma non assolutamente convergente.

Esempio La *funzione di Gauss*[23] $f(x) := e^{-x^2}$ è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$. In particolare vale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

La funzione integrale della funzione di Gauss, normalizzata in modo da avere asintoti orizzontali a ± 1 si denota spesso come *funzione errore*

$$\mathbf{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

3.3 Serie e integrali

Sia $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ una serie numerica. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione, costante a tratti, definita da

$$f(x) := a_k \qquad \text{se } x \in [k, k+1)$$

Allora

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k = \int_1^{N+1} f(x)\, dx.$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è convergente se e solo se f è integrabile in senso generalizzato in $[1, +\infty)$.

[23] Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, Sacro Romano Impero, 1777 – Gottinga, Regno di Hanover, 1855)