ANALISI MATEMATICA 1–Prima Prova Intermedia		**7 novembre 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di Laurea in Fisica		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Quale delle seguenti è una serie divergente? $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-1/n}}{n^4+2^{-n}}$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n}{2n+3}\right)^n$; $\boxed{c}$ $\displaystyle *\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+2^{-n}}{n+\log n}*$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2^{-n}}{n^3+2^n}$.

2. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z+2i|<1$ e $|z|^2-|z|>0$ è: $\boxed{a}$ una circonferenza; $\boxed{b}$ l'esterno di un cerchio; $\boxed{c}$ $*$ un cerchio $*$; $\boxed{d}$ l'insieme vuoto.

3. Sia $A\subset\mathbf{R}$ e sia $\ell\in\mathbf{R}$ l'estremo superiore di A. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera? $\boxed{a}$ Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $a\in A$ tale che $\ell-\varepsilon<a<\ell$; $\boxed{b}$ $*$ esiste una successione $(a_n)_n$ tale che $a_n\in A$, per ogni n, e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\ell*$; $\boxed{c}$ Se $\ell=\max A$ allora A è un insieme finito; $\boxed{d}$ Se $\ell=\max A$ allora A è un insieme limitato.

4. Sia $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente con addendi non negativi. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera? $\boxed{a}$ $a_{n+1}\le a_n$ definitivamente per $n\to+\infty$; $\boxed{b}$ $\displaystyle *\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=k}^{2k} a_n = 0*$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ è divergente; $\boxed{d}$ $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n=0$.

5. Sia A un insieme formato da 8 elementi. Il numero dei sottoinsiemi di A formati da almeno 5 elementi è: $\boxed{a}$ $*93*$; $\boxed{b}$ 84; $\boxed{c}$ 345; $\boxed{d}$ 92.

6. L'estremo superiore dell'insieme $\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{3n}\right): n\in\mathbf{N}\setminus 0\right\}$ è: $\boxed{a}$ $*\frac{7}{6}*$; $\boxed{b}$ $-\frac{4}{3}$; $\boxed{c}$ $\frac{4}{3}$; $\boxed{d}$ 1.

7. Quante sono le funzioni iniettive definite su un insieme di 4 elementi a valori in un insieme di 7 elementi? $\boxed{a}$ $*\dfrac{7!}{3!}*$; $\boxed{b}$ Non esistono; $\boxed{c}$ $\dbinom{7}{4}$; $\boxed{d}$ 7^4.

8. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n=$$

   $\boxed{a}$ e; $\boxed{b}$ $1/e$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ $*1*$.

ANALISI MATEMATICA 1 – Prima Prova	7 novembre 2015

1. (6 punti)

Studiate, in funzione del parametro reale x, la convergenza della serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

Dimostrate che: $\displaystyle\frac{1}{3} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{2}$.

Soluzione: Se $|x| > 3$ allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{|x|}{3}\right)^n = +\infty$; quindi non valendo $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x}{3}\right)^n = 0$ manca la condizione necessaria per la convergenza della serie. La serie non converge per $|x| > 3$. In particolare per $x > 3$ la serie diverge a $+\infty$.

Se $x = 3$ la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente.

Se $x = -3$ la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$. Poiché la serie dei valori assoluti è convergente anche questa serie è convergente.

Se $|x| < 3$ osserviamo che la serie dei valori assoluti $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{|x|}{3}\right)^n$ è minorante della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi è convergente per il teorema del confronto. Di conseguenza $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ è convergente per $|x| < 3$.

Il primo addendo (per $n = 1$) di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ è $= \displaystyle\frac{1}{3}$. Quindi, trattandosi di una serie a termini positivi, la somma totale è $> \displaystyle\frac{1}{3}$.

La serie è minorante della serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ la cui somma è $\displaystyle\frac{1}{1-1/3} - 1 = \frac{1}{2}$.

2. (6 punti) Trovate le soluzioni $z \in \mathbf{C}$ dell'equazione

$$(z-1)^3 = -i$$

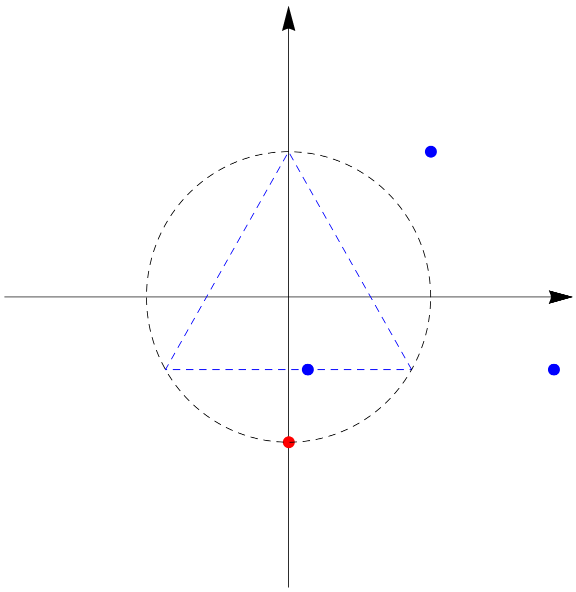
e disegnate tali soluzioni sul piano complesso.

Soluzione: L' equazione è equivalente a $z - 1 = \sqrt[3]{-i}$ che è equivalente a $z = \sqrt[3]{-i} + 1$.

Poiché $|-i| = 1$ e l'argomento principale di $-i$ è $= -\frac{\pi}{2}$, le tre radici cubiche di $-i$ sono

$$\sqrt[3]{-i} = \begin{cases} \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) & = \sqrt{3}/2 - i/2 \\ \cos(-\pi/6 + 2\pi/3) + i\sin(-\pi/6 + 2\pi/3) & = i \\ \cos(-\pi/6 + 4\pi/3) + i\sin(-\pi/6 + 4\pi/3) & = -\sqrt{3}/2 - i/2. \end{cases}$$

Quindi le tre soluzioni sono $z = \begin{cases} 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} \\ 1 + i \\ 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}. \end{cases}$



3. (6 punti) Scrivete le definizioni di maggiorante, massimo ed estremo superiore di $E \subset \mathbf{R}$.

Dimostrate che: se $E \subset \mathbf{R}$ è non vuoto e non ha massimo allora esiste una successione strettamente crescente $(x_n)_n$ di punti di E tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = \sup E$.

Soluzione:

- $m \in \mathbf{R}$ è *un maggiorante* di E se per ogni $x \in E$ vale $x \leq m$.
- $m \in \mathbf{R}$ è *il massimo* di E se $m \in E$ e se m è un maggiorante di E.
- $m \in \mathbf{R}$ è *l'estremo superiore* di E se m è il minimo dei maggioranti di E.

Un insieme E può non avere maggioranti (e quindi nemmeno massimo); in questo caso diciamo che E è illimitato superiormente oppure che l'estremo superiore di E è $+\infty$.

Per la costruzione della successione $(x_n)_n$ distinguiamo i due casi: (i) E non ha massimo perché è illimitato superiormente e (ii) E è limitato superiormente, cioè $\sup E \in \mathbf{R}$, ma $\sup E \notin E$.

(i) Se E non è limitato superiormente allora per ogni $N \in \mathbf{R}$ esiste $x \in E$ tale che $N < x$. Scegliamo come x_1 un qualsiasi punto di E. Poi, se sono stati scelti i punti $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ scegliamo come elemento x_n della successione un punto di E che sia maggiore del massimo fra x_{n-1} e n. (*Osservate che la successione così costruita è crescente perché* $x_{n-1} < x_n$ *e inoltre* $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty = \sup E$ *perchè* $n < x_n$).

(ii) Se $\sup E \in \mathbf{R}$ ma $\sup E \notin E$ sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x \in E$ tale che $\sup E - \epsilon < x < \sup E$. Utilizzando questo fatto costruiamo la successione $(x_n)_n$ nel modo seguente: come x_1 scegliamo un qualsiasi punto di E. Poi, dopo avere scelto $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ in E definiamo come $\epsilon_n > 0$ il minimo fra $1/n$ e $\sup E - x_{n-1}$ e scegliamo come x_n un punto di E tale che $\sup E - \epsilon_n < x_n < \sup E$. Per costruzione $x_{n-1} < x_n$ (*perché la distanza fra* x_n *e* $\sup E$ *è minore della distanza fra* x_{n-1} *e* $\sup E$) e, sempre per costruzione, $\lim_{n \to +\infty} x_n = \sup E$ (*perché la distanza fra* x_n *e* $\sup E$ *è minore di* $1/n$).