1a. (4 punti) Sia  $E:=\{z:=a+ib\in \mathbf{C}:1< a^2+b^2<4, |a|<|b|\}$  e sia  $R:=\{z\in \mathbf{C}:z^2\in E\}.$  Disegnate gli insiemi E ed R, motivando la vostra risposta.

**1b.** (4 punti) Trovate  $a, b \in \mathbf{R}$  tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} + ax + bx^2 - e^{2x}}{x^2} = 0.$$

1a. (4 punti) Sia  $E:=\{z:=a+ib\in \mathbf{C}:1< a^2+b^2<4, |a|>|b|\}$  e sia  $R:=\{z\in \mathbf{C}:z^2\in E\}.$  Disegnate gli insiemi E ed R, motivando la vostra risposta.

1b. (4 punti) Trovate  $a, b \in \mathbf{R}$  tali che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} + ax + bx^2 - \cos(2x)}{x^2} = 0.$$

**2a.** (6 punti) Per  $a \in \mathbf{R}$  sia  $g_a : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$  definita da  $g_a(x) := (x - a)e^{-x^2}$ . In funzione del parametro a, determinate se esistono i punti di massimo e minimo assoluto di  $g_a$  in  $[0, +\infty)$  e trovate tali punti.

Disegnate approssimativamente i grafici delle funzioni  $g_a$  in  $[0, +\infty)$ .

**2a.** (6 punti) Per  $a \in \mathbf{R}$  sia  $g_a : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$  definita da  $g_a(x) := (x - a)e^{-x^2}$ . In funzione del parametro a, determinate se esistono i punti di massimo e minimo assoluto di  $g_a$  in  $(-\infty, 0]$  e trovate tali punti.

Disegnate approssimativamente i grafici delle funzioni  $g_a$  in  $(-\infty, 0]$ .

3a. (4 punti) Siano  $a \in \mathbf{R}$  e  $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  definita da  $f_a(x) := \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 0 \\ a - \frac{x}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$ Trovate quale è l'insieme degli  $a \in \mathbf{R}$  per i quali  $f_a$  è iniettiva in  $\mathbf{R}$ . Trovate l'insieme immagine  $D_a := f_a(\mathbf{R})$  e scrivete l'espressione analitica della funzione inversa

 $f_a^{-1}:D_a\to\mathbf{R}.$ 

3b. (4 punti) Mostrate, motivando la vostra risposta, quante sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^5 - 2x^3 - 8x = 11.$$