

**1a. (4 punti)** Trovate la soluzione del problema di Cauchy:  $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$  e disegnatene approssimativamente il grafico.

**1b. (4 punti)** Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \log(1 + \sin(x^2))}{x^4}.$$

**2a. (3 punti)** Calcolate

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{4e^x}{4e^{2x} - 1} dx$$

**2b. (5 punti)** Trovate la soluzione del problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = \frac{y^2 + 1}{yx} \\ y(1) = 1 \end{cases}$  e disegnatene approssimativamente il grafico.

**3a. (4 punti)** Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $f(x) := \begin{cases} x^2 \sqrt{|\log x|} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Studiate l'andamento di  $f$  e disegnatene approssimativamente il grafico. (*Studiate continuità, derivabilità e determinate gli eventuali punti di massimo o minimo locale e assoluto*).

**3b. (4 punti)** Determinate, in funzione del parametro  $\alpha \geq 0$ , il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k + k^\alpha}{k^3 + k^\alpha}$$