

1a. (4 punti) Trovate la soluzione del problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$ e disegnatene approssimativamente il grafico.

1b. (4 punti) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \log(1 + \sin(x^2))}{x^4}.$$

2a. (3 punti) Calcolate

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{4e^x}{4e^{2x} - 1} dx$$

2b. (5 punti) Trovate la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2 + 1}{yx} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ e disegnatene approssimativamente il grafico.

3a. (4 punti) Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) := \begin{cases} x^2 \sqrt{|\log x|} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Studiate l'andamento di f e disegnatene approssimativamente il grafico. (*Studiate continuità, derivabilità e determinate gli eventuali punti di massimo o minimo locale e assoluto*).

3b. (4 punti) Determinate, in funzione del parametro $\alpha \geq 0$, il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k + k^\alpha}{k^3 + k^\alpha}$$