ANALISI 1 (laurea in Fisica)– Seconda Prova Intermedia	11 gennaio 2018

1. (7 punti) Trovate, in funzione di $\alpha \in \mathbf{R}$, la soluzione y_α del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{t} + \dfrac{2}{t^2} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Disegnate approssimativamente i grafici di y_α per $\alpha = 3$ e per $\alpha = -1$. *(Studiatene segno, punti di massimo e limiti agli estremi del campo di esistenza).*

2. (7 punti) Per ogni fissato $\beta \in \mathbf{R}$ indichiamo con S_β la regione piana *limitata* compresa fra la parabola di equazione $y = x(x-1)$ e la retta di equazione $y = \beta x$ e interna alla striscia verticale delimitata dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 3$.
Disegnate approssimativamente la regione S_β in funzione di β.
Calcolate il valore dell'area $A(\beta)$ di S_β.
Trovate per quale β la funzione $\beta \mapsto A(\beta)$ ha minimo e calcolate tale valore minimo.

3. (7 punti) Scrivete la formula di Taylor con centro in $x_0 = 0$ e con resto in forma integrale (o con resto secondo Lagrange) per la funzione $x \mapsto e^x$.
Utilizzate tale formula per stimare il valore di $\sqrt[4]{e}$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
Giustificate il risultato ottenuto. *(Utilizzate pure la stima elementare* $2 < e < 4$*).*