ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 1

Disequazioni e sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

(1) Risolvete le seguenti disequazioni (nei numeri reali) cioè trovate l'insieme dei numeri reali per i quali la disequazione indicata è vera.

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\geq 0$;

(b) $x^2+2|x|-3<0$;

(c) $\dfrac{|x-1|}{|x-3|}>1$;

(d) $\dfrac{|x^2-2x|+x^2}{2+|x|}\leq 1$

(e) $\sqrt{2x-x^2}>x$

(f) $2(x-\sqrt{x^2+2x+5})>3$

(g) $\dfrac{3^{x+1}}{27^{2x}}>\dfrac{1}{3^{x^2+5}}$

(h) $8\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-6\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1>0$

(i) $\log(2x^2-5x+3)<0$

(j) $\log(x^2-4x+3)-\log(x-2)\geq\log(x+1)$

(k) $\log^2 x+4\log x-5\geq 0$

(2) Determinate gli insiemi seguenti, eventualmente in funzione del parametro o, in altri termini, risolvete le disequazioni indicate:

(a) $A:=\{x:-6x^2-|x|+1>0\}$;

(b) $B_a:=\{x:x^3-x^2+ax-a\leq 0\}$, $\quad (a\in\mathbb{R})$;

(c) $X_c:=\left\{x:\dfrac{x-3}{cx+1}<0\right\}$, $\quad (c\in\mathbb{R})$;

(d) $C:=\{x:\cos(x+|x|)>0\}$.

Insiemi e funzioni.

(1) In ciascuna riga, disegnate approssimativamente il grafico della prima funzione (sul suo naturale dominio di definizione) e utilizzando quello disegnate approssimativamente il grafico delle altre funzioni (sul loro naturale dominio di definizione).

(a) $\dfrac{1}{x}$; $\quad\dfrac{x-3}{x-1}$;

(b) $\sqrt{x}$; $\quad\sqrt{x+1}$ $\quad\sqrt{x^2+1}$; $\quad\sqrt{(x+1)^2}$;

(c) 3^{-x}; $\quad 3^{-x}+1$; $\quad 3^{-x+1}$; $\quad 3^{|-x+1|}$

(d) $\log x$; $\quad\log_2 x$; $\quad\log_2(x+2)$; $\quad\log_2(2x)+2$; $\quad|\log_2(2x)-2|$

(e) $\sin x$; $\quad\sin(x+\pi)$; $\quad\sin(x+\pi/2)$; $\quad\sin(4x+\pi/2)$; $\quad\sin(x^2)$; $\quad\sin^2 x$.

(2) Disegnate approssimativamente il grafico della seguenti funzioni.

(a) $\arccos(x-3)$; $\arctan(2x)-\pi$; $\tan(2x)+1$

(b) $1-\sqrt[3]{x+1}$; $|2x^2+4x+1|$; $|2^{|x|}-2|$;

(3) La differenza simmetrica $A\Delta B$ di due insiemi A e B è definita come

$$A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Dimostrate che

(a) $A\Delta B=\emptyset \iff A=B$

(b) $(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$

(4) X è un insieme. Per ogni $A\subset X$ definiamo la *funzione caratteristica di* A denotata da $\mathbf{1}_A : X\to\mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x\in A \\ 0 & \text{se } x\notin A. \end{cases}$$

Dimostrate che

(a) $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B=\mathbf{1}_{A\cap B}$;

(b) $\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B=\mathbf{1}_{A\cup B}$.

(5) X e Y sono due insiemi e $f : X\to Y$ è una funzione. Definiamo le funzioni seguenti:

$$f_\sharp : \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y) \text{ come } f_\sharp(A) := \{f(a) : a\in A\} \equiv \bigcup_{a\in A} f(a) \equiv f(A)$$

e

$$f^\sharp : \mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X) \text{ come } f^\sharp(B) := \{x\in X : f(x)\in B\} \equiv \bigcup_{y\in B} f^{-1}(b) \equiv f^{-1}(B).$$

Dimostrate le seguenti affermazioni:

(a) se $f : X\to Y$ è iniettiva allora $f_\sharp : \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ è iniettiva;

(b) se $f : X\to Y$ è suriettiva allora $f_\sharp : \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ è suriettiva;

(c) per qualsiasi coppia di sottinsiemi $A,B\subset X$ vale $f_\sharp(A\cup B)=f_\sharp(A)\cup f_\sharp(B)$

(d) per qualsiasi coppia di sottinsiemi $A,B\subset X$ vale $f_\sharp(A\cap B)\subset f_\sharp(A)\cap f_\sharp(B)$ e mostrate con un esempio che l'inclusione può essere stretta.

(e) Ponetevi gli analoghi problemi per la funzione $f^\sharp : \mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$.

(6) *Questo problema è simile al precedente.* Siano X e Y due insiemi e $f : X\to Y$ una funzione. Dimostrate che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) f è iniettiva;

(b) per ogni sottoinsieme $A\subset X$ vale $f^{-1}(f(A))=A$;

(c) per ogni coppia di sottinsiemi A,B di X vale $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

(d) per ogni coppia di sottinsiemi A,B di X se $A\cap B=\emptyset$ allora $f(A)\cap f(B)=\emptyset$.

(7) Siano A,B,C,D quattro insiemi e f,g,h tre funzioni tali che

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D.$$

Dimostrate la seguente affermazione:

se $g\circ f : A\to C$ e $h\circ g : B\to D$ sono entrambe biiettive allora le tre funzioni f,g,h sono tutte e tre biiettive.