ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 10

(1) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile in (a,b). Se $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ coincide con f tranne che in un solo punto dimostrate che anche g è Riemann integrabile e che

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{(a,b)} g(x)dx.$$

Estendete il risultato precedente al caso in cui $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ coincide con f tranne che in un numero finito di punti.

(2) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x)\geq 0$ in $[a,b]$. Dimostrate che se

$$\int_{(a,b)} f(x)dx = 0$$

allora $f(x)=0$ per ogni $x\in[a,b]$.
Ricordando il problema precedente, osservate che se f non fosse continua l'enunciato sarebbe falso.

(3) Usando la tabella delle primitive elementari calcolate le seguenti primitive:

(a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x+1}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{3+x^3}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{3-4x}{1+x^2}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log x}}\,dx$; $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\cos x}\sin x\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{2^x}{\cos^2(2^x+3)}\,dx$.

(4) *(Difficile)* Dimostrate, utilizzando accuratamente la definizione, che se $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ è definita da

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x := \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, \quad p,q \text{ primi fra loro.}\end{cases}$$

allora

- ϕ è Riemann integrabile in $[0,1]$ e che
- $$\int_{(0,1)} \phi(x)\,dx = 0.$$