ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 11

(1) Calcolate i seguenti integrali "immediati"

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx;\qquad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx;\qquad \int_0^1 \sqrt[3]{x+3}\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x)^3\, dx;\qquad \int_0^1 (Ax^2+Bx+C)\, dx;\qquad \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} \alpha_k (x-x_0)^k\, dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x^2}{x}\, dx;$

(2) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (t^2+2)\, dt & \text{se } x > 0 \\ a^2 x + b & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$.

(3) Calcolate i seguenti integrali di funzioni razionali *(Vedi Cap 8, Complementi con esercizi)*

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\, dx;\qquad \int_0^3 \frac{2x^2-3x+1}{x-4}\, dx;\qquad \int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2}\, dx.$$

(4) Calcolate i seguenti integrali *(Tenete conto, se il caso, di eventuali simmetrie)*

$$\int_{10}^{11} \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2+x+1}\, dx;\qquad \int_0^1 \big||x-1|-2\big|\, dx;\qquad \int_{-2}^1 e^{-|x|}\, dx.$$

(5) Disegnate approssimativamente le seguenti regioni piane e calcolatene l'area:

(a) E è la regione di piano limitata individuata dai grafici delle funzioni $f(x) := x^2 - |x|$ e $g(x) := -2|x| + 2$;

(b) F è la regione di piano limitata delimitata dal grafico della funzione $f(x) := -\sqrt[3]{x}$ e dalle rette di equazione $y = 2x + 3$ e $y + 4x = 3$.

(6) Calcolate i seguenti integrali riducibili con sostituzioni a funzioni razionali *(Vedi il libro al Cap 8, Complementi con esercizi)*

$$\int_1^2 \frac{x+2\sqrt[3]{x}}{x^2}\, dx;\qquad \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}\, dx;\qquad \int_0^1 \frac{1+e^{2x}}{1+e^x}\, dx.$$

(7) Calcolate i seguenti integrali (integrazione per parti)

(a) $\displaystyle\int_2^3 x^3(\log x)^2\, dx;\qquad \int_0^{4\pi} x^2 \sin x\, dx;\qquad \int_0^{\log 10} x^2 e^x\, dx;$

(b) $\int_0^\pi (\sin x)^2\,dx$; $\qquad \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\,dx$; $\qquad \int_1^2 \log x\,dx$;

(c) per $n \in \mathbb{N}$ sia $I_n := \int_0^1 x^n e^x\,dx$; scrivi I_n in funzione di I_{n-1};

(d) *(Vedi il libro al Cap 8, Complementi con esercizi)* Se m, n sono interi, non entrambi nulli, definite $I_{m,n}(x) := \int (\sin x)^m (\cos x)^n\,dx$. Provate che

$$I_{m,n}(x) = -\frac{(\cos x)^{n+1}(\sin x)^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} I_{m-2,n}(x),$$
$$I_{m,n}(x) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} I_{m,n-2}(x).$$

(8) Calcolate il seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + 1}\,dx$$

Vedi il libro al Cap 8, Complementi con esercizi e utilizzate il cambio di variabile:

$$t := \tan\frac{x}{2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

(9) Calcolate i seguenti integrali *(Tenete conto, se il caso, di eventuali simmetrie)*

(a) $\int_1^2 \frac{\log(1+2x)}{x^2}\,dx$; $\qquad \int_0^1 x\sin(x^2-5)\,dx$;

(b) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

(c) $\int_{-1}^1 x^{2n+1}e^{x^2}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$;

(d) $\int_0^\pi \frac{1}{\cos x + 2}\,dx$; $\qquad \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos x + 2}\,dx$;

(e) $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin x}{(\cos x)^4 + (\cos x)^2 + 2}\,dx$.