ANALISI MATEMATICA A – ANALISI MATEMATICA 1
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 12

(1) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} \cos 2t\, dt$. Determinate i punti critici di g e calcolate il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}.$$

(2) Scrivete i primi due termini dello sviluppo di Taylor (con centro in $x_0 = 1$) della funzione
$$f(x) := \int_{2x^2}^{x^2+x} \sin(t^2)\, dt$$

(3) Calcolate, in funzione del parametro reale α,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{1-\cos x} te^{t^4}\, dt.$$
(Usate il Teorema di de L'Hospital)

(4) Data la funzione
$$f(x) := 1 + \int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{1-t}}$$
trovate l'insieme T dove f è definita e provate che f è invertibile su T. Se g è la funzione inversa di f calcolate $g'(1)$.

(5) Sia $M > 1$. Calcolate
$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\, dx; \qquad \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\, dx.$$
(Suggerimento: prima calcolate $\int_1^M \frac{1}{x}\, dx$ e poi calcolate il limite. Analogamente negli altri casi.)

(6) Per quali valori del parametro reale α il seguente limite è finito?
$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx.$$

(7) Sia $0 < \delta < 1$. Calcolate
$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x}\, dx; \qquad \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

(8) Per quali valori del parametro reale β il seguente limite è finito?
$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\beta}\, dx.$$

(9) Calcolate $\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+4)} dt$ e $\lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}(t+4)} dt$.

(10) Determinate per quali valori del parametro β sono convergenti

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \left(x + x^2 - \sin x\right)^{\beta} x^{-\beta}\, dx \quad e \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \left(x + x^4 - \sin x\right)^{\beta} x^{-\beta}\, dx.$$

(11) Tracciate un grafico approssimativo della funzione integrale

$$F(x) := \int_1^x \sqrt{9 - t^2}\, |t|\, (t-2)\, dt.$$

(12) Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \int_1^x \frac{\sqrt{t} - 2}{t + 4}\, dt.$$

(a) Studiate l'andamento di F in $[0, +\infty)$ e disegnatene approssimativamente il grafico.
(b) Calcolate il valore minimo di F in $[0, +\infty)$.

(13) (a) Trovate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-\alpha} \arctan\left(\frac{x}{x^4 + 1}\right) dx.$$

(b) Calcolate il valore dell'integrale, quando α è nell'insieme trovato precedentemente.

(14) (a) Studiate l'andamento e disegnate approssimativamente il grafico di

$$f(x) := \frac{|e^x - 2|}{e^x - 4}$$

sul suo naturale dominio di definizione.

(b) Disegnate approssimativamente il grafico di $F(x) := \int_1^x f(t)\, dt$ sul suo naturale dominio di definizione.

(15) Determinare il volume del solido di rotazione attorno all'asse delle ascisse della porzione limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni: $f_1(x) = x^3 + x$ e $f_2(x) = 2\sqrt{x}$. *(Si noti che i due grafici si intersecano in due soli punti, facili da determinare).*

(16) *(Molto difficile)* Dimostrate che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\sin x)^n\, dx = 0.$$

(Suggerimento: non tentate di calcolare esplicitamente l'integrale; ma osservate che per ogni $\delta > 0$ *e "piccolo" vale :* $\int_0^{\pi} (\sin x)^n\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (\sin x)^n\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} (\sin x)^n\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi} (\sin x)^n\, dx$ *e poi provate a stimare quale sia il limite dei tre addendi.)*