

**ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1—ANALISI MATEMATICA A
SETTIMANA 12**

Calcolare gli integrali generali o le soluzioni dei problemi a valore iniziale delle seguenti equazioni del primo ordine. Nei vari casi disegnate approssimativamente i grafici delle funzioni ottenute.

(1) $y' = y, \quad y' = xy, \quad y' = x^2y, \dots$

(2)

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(3) $y' = y + x, \quad y' = y + x^2, \quad y' = y + \sin x, \dots$

(4) $y' = xy + x, \quad y' = xy + x^2, \quad y' = xy + x^3,$

(5)

$$\begin{cases} y' = xy + x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(6) $y' = y^2, \quad y' = xy(y-1), \quad y' = (y-1)(y-2), \quad y' = x^2(y-1)(y-2), \dots$

(7)

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(8) $y' = \frac{y}{x^2+1}, \quad y' = \frac{y^2}{x^2+1}, \quad y' = \frac{1}{y^2(x^2+1)}, \dots$

(9)

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(10) ci si può ridurre a casi simili anche per:

$$xyy' = 1 - x^2, \quad xy' - y = y^3, \quad (\text{più difficile } \dots) \quad y' = (x+y)^2.$$

(11) $y' = y \tan x + \cos x, \quad y' = \frac{y}{t} + t, \quad x' + \frac{2x}{t} = t^3$

(12) ci si può ridurre alla risoluzione di equazioni simili anche per i seguenti problemi:

$$\begin{cases} xy' + y - e^x = 0 \\ y(1) = a \end{cases} \quad \begin{cases} y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (13) Risolvete i seguenti problemi a valori iniziali (problemi di Cauchy) e disegnate approssimativamente il grafico della soluzione ottenuta.

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2 \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' - y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

- (14) Determinate l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = f(x)$$

nei seguenti tre casi:

- (a) $f(x) := x^3 - 6x^2$;
 (b) $f(x) := e^x + e^{2x}$;
 (c) $f(x) := e^x \sin x$.

- (15) Scrivete un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che abbia le seguenti coppie di soluzioni:

- (a) $y_1(x) := \sin 4x$; $y_2(x) := \cos 4x$;
 (b) $y_1(x) := e^{-2x}$; $y_2(x) := e^{-3x}$;
 (c) $y_1(x) := e^x \sin 2x$; $y_2(x) := e^x \cos 2x$;
 (d) $y_1(x) := 1$; $y_2(x) := x$;
 (e) $y_1(x) := e^{-x}$; $y_2(x) := xe^{-x}$;

- (16) Risolvete i seguenti problemi a valori iniziali (problemi di Cauchy) e disegnate approssimativamente il grafico della soluzione ottenuta.

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 3y' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \sin 4t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$