ANALISI MATEMATICA A – SECONDO MODULO
ESERCIZI DELLA SETTIMANA 15

(1) *(Es 9 pag 117)* Se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

verificate che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente *legge del parallelogramma*:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Interpretate geometricamente il significato dell'uguaglianza nel caso $n = 2$.

(2) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiamo le seguenti funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

(a) dimostrate che queste funzioni sono delle *norme*;
(b) mostrate, con esempi, che l'identità del parallelogramma non vale per le due norme precedenti. Cioè trovate almeno una coppia di punti per cui l'uguaglianza sia falsa;
(c) dimostrate che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ valgono le due disuguaglianze

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\| \le \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|_\infty$$
$$\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|$$

(d) disegnate, per $n = 2$ i sottoinsiemi del piano

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_\infty \le 1 \right\}, \qquad \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 \le 1 \right\}$$

(3) Indichiamo con $C([a, b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue, a valori reali definite sull'intervallo $[a, b]$.
(a) Verificate che $C([a, b])$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.
(b) Definite le seguenti funzioni (norme): $C([a, b]) \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_1 := \int_{[a,b]} |f(x)|dx; \qquad \|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

e verificate che sono delle norme (cioè che verificano le proprietà $N1$, $N2$, $N3$).
(c) Definite la seguente funzione bilineare $C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g\rangle := \int_{[a,b]} f(x)g(x)\, dx$$

e verificate che si tratta di un prodotto scalare su $C([a, b])$ (cioè che verifica le proprietà $S1, \dots, S4$).
(d) Osservate che la funzione $C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|f\| := \left(\int_{[a,b]} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

è una norma, associata al prodotto scalare definito precedentemente.
(e) Scrivete la disuguaglianza di Schwartz in questo caso.

(4) Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente e $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è di accumulazione per E.

(5) Siano $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ due punti fissati in $\mathbb{R}^2$. Disegnate i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e stabilite se si tratta di insiemi aperti, chiusi o non aperti né chiusi. Stabilite inoltre quali siano i loro punti di accumulazione, la loro frontiera e la loro chiusura.
   (a) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a_i \le x_i \le a_i + 1\big\}$;
   (b) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \|\mathbf{x}\| \le 2\big\}$;
   (c) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le 2\big\}$;
   (d) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}, \quad \lambda \in [0, 1]\big\}$;
   (e) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \lambda \in (0, +\infty)\big\}$;
   (f) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \mu \in (0, +\infty),\ \lambda \in (0, +\infty)\big\}$;
   (g) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \in (0, +\infty)\big\}$;
   (h) $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0\big\}$.

(6) Determinate tutti i punti di accumulazione del sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ definito da

$$E := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \neq 0, n \neq 0 \right\}.$$

(7) *(Esercizio 1 pag 131)* Siano $E, F \subset \mathbb{R}^2$

$$E := \big\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\big\} \cup \{(x, y) : xy = 0\}$$
$$F := \big\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\big\} \cup \{(x, y) : xy = 1\}$$

Determinate punti interni, esterni, di frontiera e di accumulazione.

(8) Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente e $\sup E \notin E$ allora $\sup E$ è un punto di accumulazione di E.

(9) Ricordate che se $E \subset \mathbb{R}^n$ allora con $\bar{E}$ si indica l'insieme chiuso definito da $\bar{E} := E \cup \partial E$. L'insieme $\bar{E}$ si chiama la chiusura di E.
Dimostrate che se $E \subset \mathbb{R}^n$ non ha punti isolati anche $\bar{E}$ non ha punti isolati.

(10) Verificate che $\bar{E} = \{\bigcap C : C \text{ chiuso e } C \supset E\}$. Questo fatto viene spesso espresso come: *$\bar{E}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene E.*

(11) Mostrate che ogni sottoinsieme aperto, non vuoto, $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione di una famiglia finita o numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.

(12) Ricordate che un insieme A si dice *denso in un insieme* B se $A \subset B$ e se $\bar{A} \supseteq B$. Dimostrate che A è denso in B se e solo se ogni $x \in B \setminus A$ è un punto di accumulazione di A.

(13) *(Difficile)* Siano α e β due numeri reali positivi tali che $\frac{\alpha}{\beta}$ sia un numero irrazionale. Dimostrate che l'insieme

$$E := \{m\alpha + n\beta : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$$

è denso in $\mathbb{R}$.

(14) (*Molto difficile*) Dimostrate che:
   se $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ è una norma, cioè soddisfa le proprietà:
   $(N1)$: $\|\mathbf{x}\|_* \ge 0$ e $\|\mathbf{x}\|_* = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
   $(N2)$: $\|\lambda\mathbf{x}\|_* = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|_*$;

$(N3)$: $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_* \leq \|\mathbf{x}\|_* + \|\mathbf{y}\|_*$.

e inoltre $\|\cdot\|_*$ soddisfa la proprietà del parallelogramma

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_*^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2 = 2\|\mathbf{x}\|_*^2 + 2\|\mathbf{y}\|_*^2,$$

allora $\|\cdot\|_*$ "proviene" da un prodotto scalare, cioè esiste un *prodotto scalare* $\langle\cdot,\cdot\rangle_* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\|\mathbf{x}\|_* = \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_*^{1/2}.$$

Suggerimento: Definite

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_* := \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_*^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_*^2\right)$$

e provate a dimostrare che "è un prodotto scalare".