ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 – SETTIMANA 16

(1) Determinate limite inferiore, limite superiore e classe limite per $n \to +\infty$ di ciascuna delle seguenti successioni.

- $n \mapsto \sin \dfrac{n\pi}{3}$
- $n \mapsto \sin^2 \left(\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{1}{n} \right)$
- $\{0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
- $n \mapsto \left[\dfrac{n}{10} \right]$ (con il simbolo $[x]$ si intende la parte intera di x)
- $n \mapsto \left\langle \dfrac{n}{10} \right\rangle$ (con il simbolo $\langle x \rangle := x - [x]$ si intende la parte decimale di x)

(2) *(Esercizio 20 pag 180)* Determinate limite inferiore, limite superiore e classe limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni.

- $1 - \cos(n\pi)$;
- $(-1)^n \dfrac{n+1}{n-1}$; $(-1)^n \dfrac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1}$;
- $n \sin(n\pi/2)$; $\dfrac{n}{n+1} \sin(n\pi/4)$; $\dfrac{2n}{n+1} \sin(n\pi/8)$;
- *(Difficile)* $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$;

(3) *(Esercizio 21 pag 180)*

- Dimostrate che se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sono successioni di numeri reali, allora
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n)$$
$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$
- Mostrate con degli esempi che le disuguaglianze possono essere strette.

(4) Verificate la validità della condizione di Cauchy per la successione:
$$n \mapsto 1 + \frac{1}{n^2}$$

(5) Sia $(x_n)_n$ una successione di numeri reali. Un numero $y \in \mathbb{R}$ si dice *maggiorante definitivo* per $(x_n)_n$ se esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq y$ per tutti gli $n \geq n_0$ (Equivalentemente: se la disuguaglianza $x_n > y$ è vera solo per al più un numero finito di indici).

- Dimostrate che
$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lambda \text{ se e solo se } \lambda = \inf\{y : y \text{ maggiorante definitivo di } (x_n)_n\}.$$
- Come si modifica l'affermazione precedente se $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$?
- Enunciate anche l'analoga equivalenza per $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lambda$.

(6) *(Esercizi 6 e 7 pag 132)* Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se l'affermazione è vera dimostratela o indicate il teorema di cui è conseguenza, se è falsa costruite un controesempio. A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (oppure di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^n$):

(a) A compatto, B chiuso $\Longrightarrow$ $A \cap B$ compatto;
(b) A aperto, B chiuso $\Longrightarrow$ $A \cap B$ chiuso;
(c) A aperto, B aperto, $A \subset B$ $\Longrightarrow$ $\partial A \subset B$;
(d) A aperto, B chiuso, $A \subset B$ $\Longrightarrow$ $\partial A \subset B$;
(e) A chiuso, B aperto, $A \subset B$ $\Longrightarrow$ $\partial A \subset B$;

(7) Costruite un compatto di $\mathbb{R}$ con una infinità numerabile di punti di accumulazione.

(8) Considerate l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con la (solita) distanza $d(p, q) := |p - q|$ e il suo sottoinsieme

$$E := \{p \in \mathbb{Q} : \ 2 < p^2 < 7\}.$$

Dimostrate che E, come sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, è chiuso, limitato ma non compatto.

(9) *(Difficile)* Costruite esplicitamente una copertura aperta e infinita di $F := [-1, 1] \setminus \{0\}$ che non ammette sottocoperture finite.

(10) Dimostrate che se H e K sono due compatti disgiunti di $\mathbb{R}^n$ (cioè $H \cap K = \emptyset$) allora esistono due aperti A e B in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$H \subset A, \quad K \subset B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

(11) Dato un segmento chiuso T contenuto in $\mathbb{R}^2$ e un aperto A che lo contiene, dimostrate che esiste un rettangolo aperto R tale che $T \subset R \subset A$.

(12) *(Esercizi 9 pag 132)* Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Dimostrate che E è connesso se e solo se non è unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

(13) *(Esercizi 6 e 7 pag 132)* Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se l'affermazione è vera dimostratela o indicate il teorema di cui è conseguenza, se è falsa costruite un controesempio. A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

(a) A connesso per segmenti, B connesso per segmenti $\Longrightarrow$ $A \cup B$ connesso per segmenti;
(b) A connesso per segmenti, B connesso per segmenti $\Longrightarrow$ $A \cap B$ connesso per segmenti;

(a) A convesso, B convesso $\Longrightarrow$ $A \cup B$ convesso;
(b) A convesso, B convesso $\Longrightarrow$ $A \cap B$ convesso;
(c) A connesso per segmenti, B convesso $\Longrightarrow$ $A \cap B$ convesso.